Integrali Curvilinei

Gianluca Gorni

11 gennaio 2006

1 Lunghezza di una curva

Definizione 1.1. Una *curva* N-dimensionale è una funzione definita su un intervallo (compatto, se non specificato altrimenti) e a valori in $\mathbb{R}^N$.

A seconda dei contesti si chiedono varie regolarità alle curve: continuità, derivabilità, C^1, C^∞.

Definizione 1.2. Data una curva $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^N$ e una suddivisione Π di $[a,b]$, con punti di suddivisione $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$, la *poligonale incritta* alla curva e associata a Π è la poligonale di estremi $\gamma(a_0), \gamma(a_1), \ldots, \gamma(a_n)$. La *lunghezza della poligonale* è il numero reale positivo

$$\ell(\gamma,\Pi) := \sum_{i=1}^{N} \bigl\|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\bigr\| \,. \tag{1}$$

dove la norma è una qualsiasi norma fissata su $\mathbb{R}^N$, di solito quella euclidea. La *lunghezza della curva* è

$$\ell(\gamma) := \sup\bigl\{\ell(\gamma,\Pi) \;:\; \Pi \text{ suddivisione di } [a,b]\bigr\}\,. \tag{2}$$

La curva si dice *rettificabile* se $\ell(\gamma) < +\infty$.

Proposizione 1.3 (lunghezza e cambio di parametro)**.** *Sia $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^N$ una curva, e sia $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ un omeomorfismo. Allora le due curve γ e $\gamma\circ\varphi$ hanno la stessa lunghezza.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima φ crescente. Sia Π una suddivisione di $[a,b]$ con punti $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$. Poniamo $\tilde a_i := \varphi^{-1}(a_i)$. Dato che φ^{-1} è pure crescente, si ha che $c = \tilde a_0 < \tilde a_1 < \cdots < \tilde a_n = d$, cioè i punti $\tilde a_i$ formano una suddivisione $\tilde\Pi$ di $[c,d]$. Inoltre

$$\ell(\gamma,\Pi) = \sum_{i=1}^{N} \bigl\|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\bigr\| = \tag{3}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \bigl\|\gamma\circ\varphi\circ\varphi^{-1}(a_i) - \gamma\circ\varphi\circ\varphi^{-1}(a_{i-1})\bigr\| = \tag{4}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \big\| \gamma \circ \varphi(\tilde a_i) - \gamma \circ \varphi(\tilde a_{i-1}) \big\| = \tag{5}$$

$$= \ell(\gamma \circ \varphi, \tilde\Pi)\,. \tag{6}$$

Viceversa, dato una qualsiasi suddivisione $\tilde\Pi$ di $[c, d]$, con punti $\tilde a_i$, ponendo $a_i := \varphi(\tilde a_i)$ otteniamo una suddivisione Π di $[a, b]$ tale che $\ell(\gamma \circ \varphi, \tilde\Pi) = \ell(\gamma, \Pi)$. Questo dice che i due insiemi di numeri reali

$$\big\{\ell(\gamma, \Pi)\ :\ \Pi \text{ suddivisione di } [a, b]\big\} \tag{7}$$

$$\big\{\ell(\gamma \circ \varphi, \tilde\Pi)\ :\ \tilde\Pi \text{ suddivisione di } [c, d]\big\} \tag{8}$$

sono uno contenuto nell'altro, e quindi coincidono. I loro estremi superiori, che sono rispettivamente $\ell(\gamma)$ e $\ell(\gamma \circ \varphi)$ pertanto coincidono. Il caso in cui φ è decrescente si fa con un ragionamento analogo, ponendo $\tilde a_i := \varphi^{-1}(a_{n-i})$. □

Lemma 1.4 (sulla derivata)**.** *Sia* $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^N$ *una funzione derivabile nel punto* $x \in [a, b]$ *e sia* $\varepsilon > 0$. *Allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* $\forall \alpha, \beta \in [a, b]$

$$x-\delta \le \alpha \le x \le \beta \le x+\delta \quad \Rightarrow \quad \big\|\gamma(\beta)-\gamma(\alpha)-\gamma'(x)(\beta-\alpha)\big\| \le \varepsilon(\beta-\alpha)\,. \tag{9}$$

Dimostrazione. Per definizione di derivata

$$\gamma'(x) = \lim_{y \to x} \frac{\gamma(y) - \gamma(x)}{y - x} \tag{10}$$

e quindi esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $y \in [a, b]$

$$0 < |y - x| \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{\gamma(y) - \gamma(x)}{y - x} - \gamma'(x) \right\| \le \varepsilon \tag{11}$$

Facendo denominatore comune e moltiplicando per $|y - x| > 0$ si ha

$$0 < |y - x| \quad \Rightarrow \quad \big\|\gamma(y) - \gamma(x) - \gamma'(x)(y - x)\big\| \le \varepsilon|y - x|\,. \tag{12}$$

Quando $y = x$ l'ultima disuguaglianza è banalmente verificata. Quindi possiamo scrivere leggermente più in generale

$$|y - x| \quad \Rightarrow \quad \big\|\gamma(y) - \gamma(x) - \gamma'(x)(y - x)\big\| \le \varepsilon|y - x|\,. \tag{13}$$

Siano ora $\alpha, \beta \in [a, b]$ tali che $x-\delta \le \alpha \le x \le \beta \le x+\delta$. La disuguaglianza (13) si può applicare sia per $y = \alpha$ che per $y = \beta$:

$$\big\|\gamma(\alpha) - \gamma(x) - \gamma'(x)(\alpha - x)\big\| \le \varepsilon|\alpha - x| = \varepsilon(x - \alpha), \tag{14}$$

$$\big\|\gamma(\beta) - \gamma(x) - \gamma'(x)(\beta - x)\big\| \le \varepsilon|\beta - x| = \varepsilon(\beta - x) \tag{15}$$

Dalla disuguaglianza triangolare e dalle due disuguaglianze precedenti ricaviamo

$$\big\|\gamma(\beta) - \gamma(\alpha) - \gamma'(x)(\beta - \alpha)\big\| =$$

$$
\begin{aligned}
&= \big\|\gamma(\beta) - \gamma(x) + \gamma(x) - \gamma(\alpha) - \gamma'(x)(\beta - x + x - \alpha)\big\| \leq \\
&\leq \big\|\gamma(\beta) - \gamma(x) - \gamma'(x)(\beta - x)\big\| + \big\|\gamma(x) - \gamma(\alpha) - \gamma'(x)(x - \alpha)\big\| = \qquad (16)\\
&= \big\|\gamma(\beta) - \gamma(x) - \gamma'(x)(\beta - x)\big\| + \big\|\gamma(\alpha) - \gamma(x) - \gamma'(x)(\alpha - x)\big\| \leq \\
&\leq \varepsilon(\beta - x) + \varepsilon(\beta - x) = \\
&= \varepsilon(\beta - \alpha)\,,
\end{aligned}
$$

come volevasi dimostrare. □

Lemma 1.5 (lemma tecnico)**.** *Sia $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^N$ una curva continua in tutti i punti, e derivabile in tutti i punti fuori da un sottinsieme $D \subset [a,b]$ al più numerabile. Siano inoltre $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione qualsiasi, e $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}^N$ tale che $g(t) = \gamma'(t)$ per ogni $t \in [a,b] \setminus D$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un calibro $\delta(x) > 0$ tale che per ogni suddivisione Π di $[a,b]$ si ha*

$$
\Pi \prec \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} |h(x_i)| \big\|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1}) - g(x_i)(a_i - a_{i-1})\big\| \leq \varepsilon\,. \qquad (17)
$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Sia $x \in [a,b] \setminus D$. Per questi x vale $g(x) = \gamma'(x)$. Applicando il lemma sulla derivata 1.4 con

$$
\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2(b-a)(1 + |h(x)|)} \qquad (18)
$$

al posto di ε otteniamo un $\delta(x) > 0$ tale che, per una qualsiasi suddivisione, se $x_i \notin D$,

$$
\begin{aligned}
x_i - \delta(x_i) \leq a_{i-1} \leq x_i \leq a_i &\leq x_i + \delta(x_i) \\
&\Downarrow \\
|h(x_i)| \big\|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1}) - g(x_i)(a_i - a_{i-1})\big\| &= \qquad (19)\\
= |h(x_i)| \big\|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1}) - \gamma'(x_i)(a_i - a_{i-1})\big\| &\leq |h(x_i)| \varepsilon'(a_i - a_{i-1}) = \qquad (20)\\
&= |h(x_i)| \frac{\varepsilon}{2(b-a)(1 + |h(x_i)|)} (a_i - a_{i-1}) \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (a_i - a_{i-1})\,.
\end{aligned}
$$

Se la condizione di adattamento $x_i - \delta(x_i) \leq a_{i-1} \leq x_i \leq a_i \leq x_i + \delta(x_i)$ è verificata per tutti gli i per i quali $x_i \notin D$, sommando si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\{i\,:\,x_i \notin D\}} |h(x_i)| \big\|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1}) - g(x_i)(a_i - a_{i-1})\big\| \leq \\
&\leq \sum_{\{i\,:\,x_i \notin D\}} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (a_i - a_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{\{i\,:\,x_i \notin D\}} (a_i - a_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}\,. \qquad (21)
\end{aligned}
$$

Nel caso in cui $D = \varnothing$ la $\delta(x)$ è definita su tutto $[a,b]$ e non c'è altro da dimostrare. Saltiamo il caso in cui D è non vuoto ma finito, e supponiamo direttamente che D sia numerabile. Sia $\varphi\colon \mathbb{N} \to D$ una biiezione. In ogni punto $x = \varphi(k) \in D$ la γ è continua, e quindi esiste un $\delta_k > 0$ tale che per ogni $t \in [a, b]$

$$|t - x| \leq \delta_k \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(t) - \gamma(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+4}\big(1 + |h(x)|\big)} . \tag{22}$$

Sempre per un tale $x = \varphi(k) \in D$ poniamo

$$\delta(x) = \delta\big(\varphi(k)\big) := \min\Big\{\delta_k, \frac{\varepsilon}{2^{k+4}\big(1 + |h(x)|\big)\big(1 + \|g(x)\|\big)}\Big\} . \tag{23}$$

Questo completa la definizione del calibro δ su tutto $[a, b]$. Sia Π una suddivisione marcata adattata a δ. Se $x_i = \varphi(k) \in D$, poiché $x_i - \delta(x_i) \leq a_{i-1} \leq x_i \leq a_i \leq x_i + \delta(x_i)$ si ha

$$\begin{aligned}
&|h(x_i)|\big\|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1}) - g(x_i)(a_i - a_{i-1})\big\| \leq \\
&\quad \leq |h(x_i)|\Big(\big\|\gamma(a_i) - \gamma(x_i)\big\| + \big\|\gamma(x_i) - \gamma(a_{i-1})\big\| + \big\|g(x_i)\big\|(a_i - a_{i-1})\Big) \leq \\
&\quad \leq |h(x_i)|\Bigg(\frac{\varepsilon}{2^{k+4}(1 + |h(x_i)|)} + \frac{\varepsilon}{2^{k+4}(1 + |h(x_i)|)} + \\
&\qquad\qquad + \big\|g(x_i)\big\| \cdot 2\frac{\varepsilon}{2^{k+4}\big(1 + |h(x_i)|\big)\big(1 + \|g(x_i)\|\big)}\Bigg) \leq \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+4}} + \frac{\varepsilon}{2^{k+4}} + \frac{\varepsilon}{2^{k+3}} = \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}
\end{aligned} \tag{24}$$

Notiamo che

$$\begin{aligned}
\{i \ : \ x_i \in D\} &= \{i \ : \ \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } x_i = \varphi(k)\} = \\
&= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{i \ : \ x_i = \varphi(k)\}
\end{aligned} \tag{25}$$

e che l'unione è disgiunta. Quindi

$$\begin{aligned}
&\sum_{\{i \,:\, x_i \in D\}} |h(x_i)|\big\|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1}) - g(x_i)(a_i - a_{i-1})\big\| = \\
&\qquad = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\{i \,:\, x_i = \varphi(k)\}} \big\|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1}) - g(x_i)(a_i - a_{i-1})\big\| \leq \\
&\qquad \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\{i \,:\, x_i = \varphi(k)\}} \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \#\big(\{i \ : \ x_i = \varphi(k)\}\big) ,
\end{aligned} \tag{26}$$

dove $\#$ indica la cardinalità. Fissato k, il numero di intervallini per i quali il punto marcato x_i coincide con $\varphi(k)$ può essere 0, 1 o al massimo 2 (nel caso in cui $\varphi(k)$ sia punto marcato di entrambi due intervallini adiacenti). Quindi possiamo ulteriormente maggiorare

$$\sum_{\{i \,:\, x_i \in D\}} |h(x_i)|\big\|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1}) - g(x_i)(a_i - a_{i-1})\big\| \leq \tag{27}$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k}\#\big(\{i\ :\ x_i=\varphi(k)\}\big) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\cdot 2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{28}$$

Mettendo insieme le stime (21) e (28), ricaviamo infine

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} |h(x_i)|\big\|\gamma(a_i)-\gamma(a_{i-1})-g(x_i)(a_i-a_{i-1})\big\| = \\
&\quad= \sum_{\{i\,:\,x_i\notin D\}} |h(x_i)|\big\|\gamma(a_i)-\gamma(a_{i-1})-g(x_i)(a_i-a_{i-1})\big\| + \\
&\qquad+ \sum_{\{i\,:\,x_i\in D\}} |h(x_i)|\big\|\gamma(a_i)-\gamma(a_{i-1})-g(x_i)(a_i-a_{i-1})\big\| \leq \\
&\quad\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,
\end{aligned} \tag{29}$$

come volevasi dimostrare. □

Teorema 1.6 (formula integrale per la lunghezza)**.** *Sia $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^N$ una curva continua che sia derivabile in tutti i punti eccetto un insieme al più numerabile. Allora l'integrale $\int_a^b \|\gamma'\|$ esiste nel senso di Henstock-Kurzweil e si ha*

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \big\|\gamma'(t)\big\|\,dt \tag{30}$$

(sia nel caso rettificabile che non).

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon>0$. Sia $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}^N$ tale che $g(t)=\gamma'(t)$ in ogni punto di derivabilità. Si può applicare il lemma tecnico 1.5 precedente con $h(t)\equiv 1$, ottenendo che esiste un calibro $\delta(x)>0$ tale che per ogni suddivisione Π di $[a,b]$ si ha

$$\Pi \prec \delta \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{n}\big\|\gamma(a_i)-\gamma(a_{i-1})-g(x_i)(a_i-a_{i-1})\big\| \leq \varepsilon\,. \tag{31}$$

Questa δ è fissata d'ora in poi.

Fatto 1. Se Π è una suddivisione di $[a,b]$ allora

$$\Pi \prec \delta \quad\Rightarrow\quad \big|\ell(\gamma,\Pi) - S(\|g\|,\Pi)\big| \leq \varepsilon(b-a)\,. \tag{32}$$

Siano infatti $a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b$ i punti di suddivisione e x_i i punti marcati di Π. Per definizione di adattamento, per ogni $i=1,\ldots,n$ vale $x_i-\delta(x_i)\leq a_{i-1}\leq x_i\leq a_i\leq x_i+\delta(x_i)$, e quindi

$$\big\|\gamma(a_i)-\gamma(a_{i-1})-g(x_i)(a_i-a_{i-1})\big\| \leq \varepsilon(a_i-a_{i-1})\,. \tag{33}$$

Pertanto, usando la disuguaglianza $\big|\|u\|-\|v\|\big|\leq\|u-v\|$ e quella triangolare,

$$\Big|\ell(\gamma,\Pi) - S\big(\|\gamma'\|,\Pi\big)\Big| =$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \bigl\|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\bigr\| - \sum_{i=1}^{n} \bigl\|g(x_i)\bigr\|(a_i - a_{i-1}) \right| = \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \Bigl(\bigl\|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\bigr\| - \bigl\|g(x_i)(a_i - a_{i-1})\bigr\| \Bigr) \right| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \Bigl| \bigl\|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\bigr\| - \bigl\|g(x_i)(a_i - a_{i-1})\bigr\| \Bigr| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \Bigl\| \gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1}) - g(x_i)(a_i - a_{i-1}) \Bigr\| \leq \\
&\leq \varepsilon\,.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Fatto 2. Per ogni suddivisione Π_0 di $[a,b]$ esiste un calibro $\delta_0(x) > 0$ tale che per ogni altra suddivisione Π si ha che

$$
\Pi \prec \delta_0 \quad \Rightarrow \quad \ell(\gamma, \Pi_0) \leq S\bigl(\|\gamma'\|, \Pi\bigr) + \varepsilon(b-a) \leq \ell(\gamma, \Pi) + 2\varepsilon(b-a)\,. \tag{35}
$$

Partiamo infatti da una suddivisione Π_0 formata da $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = b$, con punti marcati α_i. Consideriamo la seguente funzione su $[a,b]$:

$$
\delta_1(x) := \min\Bigl\{ \frac{1}{2}|x - \alpha| \ : \ \alpha \in \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\} \setminus \{x\} \Bigr\}. \tag{36}
$$

Questa funzione δ_1 è sempre > 0, e inoltre $\delta_1(x) < |x - \alpha_i|$ per ogni $x \neq \alpha_i$. Quindi δ_1 è un calibro su $[a,b]$, e ogniqualvolta Π è una suddivisione adattata a δ_1, i punti $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono punti marcati di Π.

□

2 Integrali al differenziale d'arco

Definizione 2.1. Data una curva $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^N$, una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, e una suddivisione Π di $[a,b]$ con punti di suddivisione $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$ e punti marcati $x_1, \dots, x_n$, la *somma di Riemann di f nel differenziale d'arco* è

$$
\mathrm{Sl}(f, \gamma, \Pi) := \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \bigl\|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\bigr\|\,. \tag{37}
$$

Dato un numero reale I, diremo che *f è integrabile lungo γ nel differenziale d'arco con integrale I* se $\forall \varepsilon > 0$ esiste un calibro $\delta(x) > 0$ su $[a,b]$ tale che per ogni suddivisione Π di $[a,b]$

$$
\Pi \prec \delta \quad \Rightarrow \quad \bigl|\mathrm{Sl}(f, \gamma, \Pi) - I\bigr| < \varepsilon\,, \tag{38}
$$

Si userà una delle seguenti notazioni:

$$
I = \int_\gamma f\, ds = \int_\gamma f\, \|d\gamma\|\,. \tag{39}
$$

Diremo che $\int_\gamma f\,ds = +\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R}$ esiste un calibro $\delta(x) > 0$ tale che per ogni $\Pi \prec \delta$ si ha $\mathrm{Sl}(f,\gamma,\Pi) > M$. Analogamente si definisce il significato di $\int_\gamma f\,ds = -\infty$.

Spesso invece di una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ si ha a che fare con una funzione definita su insieme Ω contenente il supporto di γ, e quella che si vuole integrare è la funzione composta $f = F\circ\gamma$. Scriveremo lo stesso $\int_\gamma F\,ds$ invece di $\int_\gamma F\circ\gamma$, lasciando al contesto di decidere qual'è il dominio della funzione integranda.

Proposizione 2.2 (integrale e cambio di parametro)**.** *Sia $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^N$ una curva, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, e sia $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ un omeomorfismo. Allora*

$$\int_\gamma f\,ds = \int_{\gamma\circ\varphi} f\circ\varphi\,ds\,, \tag{40}$$

nel senso che se uno dei due integrali esiste allora esiste anche l'altro e sono uguali.

Teorema 2.3 (integrale lungo una curva derivabile)**.** *Sia $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^N$ una curva continua e che sia derivabile in tutti i punti eccetto un insieme al più numerabile, e sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora*

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(t)\big\|\gamma'(t)\big\|dt\,, \tag{41}$$

nel senso che quando uno dei due integrali esiste, esiste anche l'altro e coincidono.

3 Integrali di forme differenziali

Definizione 3.1. Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, diremo *forma differenziale su* Ω (di grado 1, o lineare) una qualsiasi applicazione $\omega\colon \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$.

Con $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ si intende lo spazio delle applicazioni lineari da $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}$, cioè il duale di $\mathbb{R}^N$. Data una forma differenziale ω, il suo valore in $x \in \Omega$ è $\omega(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$. A sua volta, il valore del funzionale $\omega(x)$ nel vettore $h \in \mathbb{R}^N$ sarà indicato con $\omega(x)[h]$.

Definizione 3.2. Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$,una forma differenziale $\omega\colon \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ e una curva $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$, diremo che *$\omega$ è integrabile lungo γ con integrale $I \in \mathbb{R}$* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un calibro $\delta(x)$ su $[a,b]$ tale che per ogni suddivisione Π si abbia che

$$\Pi \prec \delta \quad\Rightarrow\quad \big|\mathrm{Sd}(\omega,\gamma,\Pi) - I\big| < \varepsilon\,, \tag{42}$$

dove $\mathrm{Sd}(\omega,\gamma,\Pi)$ è la *somma di Riemann della forma differenziale su* γ, definita da

$$\mathrm{Sd}(\omega,\gamma,\Pi) := \sum_{i=1}^N \omega(x_i)\big[\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\big]\,. \tag{43}$$

Analoga è la definizione nel caso $I = \pm\infty$. Useremo la notazione

$$I = \int_\gamma \omega\,. \tag{44}$$

Proposizione 3.3 (integrale e cambio di parametro)**.** *Sia* $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ *una curva,* $\omega\colon \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ *una forma differenziale, e sia* $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ *un omeomorfismo. Allora*

$$\int_\gamma \omega = \begin{cases} \displaystyle\int_{\gamma\circ\varphi} \omega & \text{se } \varphi \text{ è crescente,} \\ \displaystyle -\int_{\gamma\circ\varphi} \omega & \text{se } \varphi \text{ è decrescente}\,, \end{cases} \tag{45}$$

nel senso che se uno dei due integrali esiste allora esiste anche l'altro e i due membri sono uguali.

Teorema 3.4 (integrale lungo una curva derivabile)**.** *Siano* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^N$, $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ *una curva derivabile e* $\omega\colon \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ *una forma differenziale. Allora*

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega\big(\gamma(t)\big)\big[\gamma'(t)\big]\,dt\,, \tag{46}$$

nel solito senso che quando uno dei due integrali esiste, esiste anche l'altro e coincidono.

Definizione 3.5. Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e una funzione $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$, si dice che F è *differenziabile* nel punto $x_0 \in \Omega$ se esiste un funzionale $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ tale che

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0) - Ah}{\|h\|} = 0\,. \tag{47}$$

Il funzionale A è unico, ed è detto *il differenziale di F in x_0*, e scriveremo $A = dF(x_0)$.

È noto che se una funzione è differenziabile in x_0 allora F ha tutte le derivate parziali, e il differenziale $dF(x_0)$ si scrive come

$$dF(x_0)[h] = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)h_i\,, \tag{48}$$

dove $h = (h_1,\dots,h_i)$. Inoltre il teorema sulla differenziabilità delle funzioni composte ci dice che se $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ è derivabile in t_0 e F è differenziabile in $\gamma(t_0)$, allora $F\circ\gamma$ è derivabile in t_0 e

$$(F\circ\gamma)'(t_0) = dF\big(\gamma(t_0)\big)\big[\gamma'(t_0)\big]\,. \tag{49}$$

Una funzione $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile in tutti i punti di Ω definisce una forma differenziale $\omega = dF\colon \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$. Una forma differenziale ω che sia il differenziale di una qualche F si dice *forma esatta*, e la F si dice una *primitiva* di ω.

Teorema 3.6 (teorema fondamentale)**.** *Siano* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^N$*,* $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione differenziabile in tutti i punti,* $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ *una curva continua che sia inoltre o (a) derivabile oppure (b) rettificabile. Allora la forma differenziale* dF *è integrabile lungo* γ *e*

$$\int_\gamma dF = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)\,. \tag{50}$$