Insiemi

1. Elementi e insiemi: uguaglianza, appartenenza e inclusione

In principio ci sono gli elementi. Immaginiamoci l'universo primordiale della teoria degli insiemi come un oceano, visto da un sommozzatore. Un oceano in cui fluttuano gli *elementi*, sotto forma di pesci, meduse, alghe e altri oggetti in sospensione.

La nostra mente appena creata è ancora abissalmente ignorante, ma è corredata di un'ottima memoria fotografica. Sappiamo distinguere una singola sardina da tutte le sue compagne di banco. Più precisamente, se fissiamo gli occhi su una sardina e poi ci distraiamo un attimo, sappiamo sempre dire se una nuova sardina su cui ci si posa lo sguardo è quella stessa di prima o no. Beh, magari *noi* non lo sappiamo, ma *loro* (le sardine in questione) lo sanno. Insomma, vale il postulato che segue.

• **Postulato dell'identità fra elementi.** *C'è un predicato di due variabili, detto uguaglianza e indicato con '$x = y$', che ha senso ed è vero o falso per ogni coppia di elementi x, y. Inoltre $x = y$ se e solo se ogni predicato insiemistico che è vero per x è vero anche per y e viceversa.*

	a	b	c	d	e	f	$\dots$
a	$=$	$\neq$	$=$	$\neq$	$\neq$	$\neq$	$\cdots$
b	$\neq$	$=$	$\neq$	$\neq$	$\neq$	$\neq$	$\cdots$
c	$=$	$\neq$	$=$	$\neq$	$\neq$	$\neq$	$\cdots$
d	$\neq$	$\neq$	$\neq$	$=$	$\neq$	$\neq$	$\cdots$
e	$\neq$	$\neq$	$\neq$	$\neq$	$=$	$\neq$	$\cdots$
f	$\neq$	$\neq$	$\neq$	$\neq$	$\neq$	$=$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Un predicato di due variabili è come una tabella con due entrate: ogni riga e ogni colonna sono capeggiate da un elemento (da una fotografia di un pesce) e agli incroci fra righe e colonne andrà scritto se il predicato è vero o falso per la coppia di elementi che individuano quella casella, cioè se le due fotografie sono dello stesso pesce o no. Nella tabella di un'"uguaglianza" qui accanto abbiamo scritto direttamente '$=$' e '$\neq$' invece di "vero" o "falso". Attenzione, però, il postulato ci dice che l'uguaglianza *non* è un predicato *arbitrario*. Quando $a = b$ dobbiamo vedere a e b come nomi diversi della stessa cosa, o sue fotografie da diversi punti di vista: ogni predicato insiemistico che sia vero per uno dei due dev'essere vero anche per l'altro, ossia a e b devono essere intercambiabili a tutti gli effetti della teoria degli insiemi. Più in formule, dire che $a = b$ è la stessa cosa di dire che per ogni predicato insiemistico $P(x)$ si ha che $P(a) \iff P(b)$, cioè che $P(a)$ e $P(b)$ sono o entrambi veri o entrambi falsi. (Di predicati *insiemistici* fondamentali non ne introdurremo tanti: soltanto tre, compresa l'uguaglianza stessa; tutti gli altri saranno combinazioni logiche di questi). Disuguaglianza vuol dire non intercambiabilità: c'è almeno un predicato insiemistico che è vero per a ma è falso per tutti i b diversi da a (il predicato P definito da $P(x) :=$ '$x = a$').

Il bisogno di un postulato che regolamenti l'uguaglianza forse non si avverte se sentiamo l'universo come un dato di fatto che noi semplicemente esploriamo. Però c'è un altro punto di vista, quello di quando si vuole *costruire* un universo che abbia delle certe proprietà: bisognerà allora stare attenti che le relazioni di uguaglianza e disuguaglianza che assegnamo fra gli elementi $a, b, c \dots$ non contraddicano tutto il resto. Sono i due punti di vista di un sommozzatore che nuota in una barriera corallina indipendente dalla sua volontà, e quello di un fabbricante di acquari che lavora su commissione rispettando le varie specifiche di legge (i postulati). Nel teorema seguente sono elencate tre proprietà che sono implicitamente richieste già dal primo postulato.

Teorema. *L'uguaglianza è riflessiva ($\forall a$ elemento: $a = a$), simmetrica ($\forall a, b$ elementi: $a{=}b \iff b{=}a$) e transitiva ($\forall a, b, c$ elementi: $(a{=}b) \wedge (b{=}c) \Rightarrow a{=}c$).*

Dimostrazione. Tutto deriva dalle proprietà dell'equivalenza logica: $p \iff p$, $(p \iff q) \iff (q \iff p)$ e $((p \iff q) \wedge (q \iff r)) \Rightarrow (p \iff r)$. Riflessività: sia a un elemento qualsiasi; per ogni predicato insiemistico P si ha $P(a) \iff P(a)$; per il postulato abbiamo quindi $a = a$. Simmetria: siano a, b due qualunque elementi e supponiamo che $a = b$; allora per ogni predicato insiemistico P si ha $P(a) \iff P(b)$, che implica $P(b) \iff P(a)$; quindi per il postulato si ha $b = a$; viceversa, se $b = a$ si deduce allo stesso modo che $a = b$. Transitività: siano a, b, c tre elementi tali che $a = b$ e $b = c$; allora per ogni predicato insiemistico $P(x)$ si ha $P(a) \iff P(b)$ e $P(b) \iff P(c)$, che insieme implicano che $P(a) \iff P(c)$; da qui e di nuovo usando postulato si conclude $a = c$. $\square$

Queste tre proprietà restringono la nostra libertà di inserire i simboli '$=$' e '$\neq$' nella tabella. Supponiamo che gli elementi siano elencati nello stesso ordine sulle righe e sulle colonne. Allora riflessività vuol dire che la diagonale principale deve contenere solo segni '$=$', mentre simmetria è precisamente... simmetria rispetto alla diagonale (il segno che c'è in una casella deve essere lo stesso di quello sulla casella simmetrica).

In realtà l'essere riflessivo, simmetrico e transitivo basta ad un predicato per essere una possibile uguaglianza. Sarà cura degli altri due predicati insiemistici di base di non assegnare proprietà diverse ad elementi che dovrebbero essere considerati uguali.

Esercizio. Il predicato $P(x) :=$ "x si pronuncia 'ics'" è vero per x ma non per y. Quindi non potremo mai porre $x = y$?

Esercizio. Come si traduce la transitività in termini della tabella di un predicato? È transitivo l'esempio che abbiamo scritto prima? Dimostrare che ogni predicato riflessivo e simmetrico su non più di due elementi è anche per forza transitivo (esaminare tutti i casi possibili, che non sono tanti).

Esercizio. Sia $P(x, y)$ un predicato di due variabili riflessivo, simmetrico e transitivo. Per ogni fissato y_0 definiamo il predicato di una variabile $P'_{y_0}(x) := P(x, y_0)$. Dimostrare che, assegnati x, y, $P(x, y)$ è vera se e solo se per ogni y_0 si ha $P'_{y_0}(x) \iff P'_{y_0}(y)$. In termini della tabella di verità di P, questo vuol dire che all'incrocio fra la riga x con la colonna y c'è "vero" se e solo se le righe (o le colonne) x e y coincidono in tutta la loro lunghezza.

Esercizio. La disuguaglianza fra elementi è sempre simmetrica, ma sarebbe riflessiva solo se non ci fosse nessun elemento e transitiva se di elementi ce ne fossero al massimo uno. Una relazione riflessiva e simmetrica è automaticamente transitiva se ci sono al massimo due elementi.

A volte un elemento in lontananza, se guardato da vicino si rivela essere un banco di pesci. Ciò non toglie che il banco di pesci come tale continui a essere un elemento a pieno titolo. Quegli elementi che riconosciamo essere degli ammassi di altri elementi si diranno "insiemi".

• **Postulato degli insiemi come particolari elementi.** *C'è un predicato, indicato con "x è un insieme", che ha senso ed è vero o falso per ogni elemento x. Quegli elementi per cui è vero si dicono insiemi e quelli per cui è falso si dicono elementi puri, o atomi.*

In particolare, *ogni insieme è un elemento*. L'unica restrizione a cui è sottoposto il predicato "x è un insieme" è di non contraddire il postulato dell'uguaglianza fra elementi, ossia non deve accadere che due elementi siano uguali ma uno dei due sia un insieme e l'altro no.

a	b	c	d	e	f	...
insieme	atomo	insieme	insieme	atomo	insieme	...

Nell'esempio qui accanto si noterà che abbiamo rispettato l'uguaglianza fra a e c che era stata decisa nella prima tabella. Infatti a e c sono ora entrambi insiemi.

Quando pensiamo contemporaneamente ad un dato pesce e a un certo banco di pesci, la situazione cambia a seconda se il pesce sia o no nel banco. Forse potremo non sapere in quale dei due casi ci troviamo, ma loro due (il pesce e il banco) lo sanno.

• **Postulato dell'appartenenza.** *C'è un predicato di due variabili, chiamato appartenenza e indicato con $x \in A$, che ha senso ed è vero o falso per ogni elemento x e ogni insieme A.*

	a	b	c	d	e	f	...
a	$\notin$		$\notin$	$\in$		$\in$	$\cdots$
b	$\in$		$\in$	$\notin$		$\notin$	$\cdots$
c	$\notin$		$\notin$	$\in$		$\in$	$\cdots$
d	$\notin$		$\notin$	$\in$		$\in$	$\cdots$
e	$\in$		$\in$	$\notin$		$\in$	$\cdots$
f	$\notin$		$\notin$	$\notin$		$\notin$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

La negazione di "x appartiene ad A" si abbrevia in simboli come '$x \notin A$'. Qui accanto abbiamo sparpagliato dei segni di appartenenza e non appartenenza nella tabella a due entrate degli elementi. Si intende che un segno prende a sinistra l'elemento che individua la riga e a destra quello della colonna. Ad esempio, il '$\notin$' all'incrocio fra la riga c e la colonna a vuol dire che $c \notin a$, non che $a \notin c$. I segni non sono stati distribuiti del tutto a caso, perché abbiamo tenuto conto delle due tabelle precedenti. Infatti l'uguaglianza $a = c$ impone che la colonna sotto a sia uguale a quella sotto c (altrimenti avremmo un predicato $P(x) :=$ '$x_0 \in x$' che sarebbe vero per a ma non per c o viceversa), che pure la riga di a sia uguale alla riga di c, e che le colonne con in cima gli atomi b ed e siano vuote (avremmo anche potuto risparmiare spazio e scrivere solo le colonne degli insiemi).

Di solito un oggetto viene indicato con una lettera minuscola se in quel contesto è pensato come elemento, e con una lettera maiuscola se è trattato come insieme. Ma ci sono dei casi in cui un certo insieme compare più volte in una stessa formula in ruoli diversi, e la convenzione delle minuscole e maiuscole non si può applicare. Formule come '$A \in B$' o addirittura '$X \in y$' sono quindi tollerabili, e a volte persino inevitabili. Nell'"insiemistica" insegnata nelle scuole primarie, gli elementi e gli insiemi vivono in due mondi separati. Invece qui da noi abbiamo postulato che ogni insieme sia elemento. Non solo, ma non prenderemo mai posizione sul problema se esistano o no elementi che non siano anche insiemi. Si può anche concepire un universo in cui ogni oggetto è sia elemento che insieme. Vedremo poco più avanti come questo atteggiamento ha delle conseguenze che i pionieri della teoria non avevano anticipato e che li mise per qualche tempo in grave imbarazzo.

Forse non è inchiostro sprecato mettere in chiaro che l'appartenenza non ha *nessun* motivo di essere riflessiva, simmetrica o transitiva. Per cominciare, ribadiamo che *non* si dà significato a '$x \in y$' quando y è un atomo:

$$\left.\begin{array}{c}\text{atomo}\\ \text{o}\\ \text{insieme}\end{array}\right\} \in \text{insieme.}$$

Quindi la diagonale della tabella dell'appartenenza, lungi dall'essere riempita di tutti '$\in$', contiene caselle vuote in corrispondenza degli atomi. Inoltre, quand'anche una casella diagonale non sia vuota, il postulato non dice niente su che segno ci va scritto. Ad esempio, nella pagina precedente si ha $a \notin a$ e $d \in d$. C'è sì un'idea intuitiva che ogni cosa ha una relazione speciale con se stessa, ma nella teoria degli insiemi tale relazione è chiamata *"uguaglianza"*, non "appartenenza". Torneremo comunque su questo punto anche più avanti. Nemmeno la simmetria e la transitività hanno motivi di sussistere: nell'esempio di prima abbiamo $a \in f$ ma $f \notin a$; $b \in a$ e $a \in f$ ma $b \notin f$.

Con l'appartenenza abbiamo esaurito l'elenco dei predicati fondamentali della teoria degli insiemi: l'uguaglianza, l'essere un insieme, e l'appartenenza. Tutti gli altri predicati saranno combinazioni di questi e ogni nuovo postulato dirà qualcosa sempre su questi stessi predicati. Un "universo" della teoria degli insiemi sarà una particolare assegnazione delle tabelle di verità dei tre predicati basilari (verrebbe da dire "predicati *elementari*"...).

Tornando alla metafora, un banco di pesci può cambiare forma, migrare, compattarsi e rarefarsi, ma decidiamo che sia lo stesso banco qualora nessun nuovo pesce gli si sia aggiunto e nessuno l'abbia lasciato. In altre parole ciò che conta per individuare un insieme sono i suoi elementi: la mercanzia, non la confezione.

• **Postulato dell'uguaglianza fra insiemi.** *Dati due qualsiasi insiemi A, B, si ha $A = B$ se e solo se $\forall x$ elemento: $x \in A \iff x \in B$.*

Attenzione: nonostante le apparenze, questo postulato non è una *definizione* di uguaglianza fra insiemi. In linea di principio abbiamo a che fare con due relazioni: da una parte l'uguaglianza fra insiemi come caso particolare dell'uguaglianza fra elementi, già assegnata d'autorità nel primo postulato, e dall'altra la proprietà di "avere gli stessi elementi". Il nuovo postulato impone che le due relazioni *coincidano*. Quindi nell'atto di costruire un universo, dobbiamo rispettare dei vincoli quando dettiamo le relazioni di uguaglianza fra elementi, la proprietà di essere insiemi e le relazioni di appartenenza.

Se due insiemi A, B sono uguali, per il postulato dell'uguaglianza fra elementi il predicato insiemistico '$x \in A$' deve equivalere al predicato '$x \in B$'. Il postulato dell'uguaglianza fra insiemi afferma che vale anche il viceversa: se ($\forall x : \quad x \in A \iff x \in B$) allora $A = B$. In particolare, non solo due insiemi uguali devono avere uguali colonne nella tabella dell'appartenenza, ma anche viceversa: se due insiemi hanno la stessa colonna allora sono uguali.

Quando un banco si divide in due, ciascuno dei due banchi risultanti, se confrontato col banco originale, è in una posizione che assomiglia a quella dell'appartenenza di un elemento a un insieme. Però non è proprio la stessa cosa. Conviene introdurre una nuova relazione, questa volta fra insiemi: l'*inclusione*.

Definizione. *Dati due insiemi A, B, diremo che A è sottinsieme di B e scriveremo $A \subset B$, se $\forall x$ elemento: $x \in A \Rightarrow x \in B$.*

Invece di "A è sottinsieme di B" si può dire "A è incluso in B", o "B contiene A". Il simbolo per "B contiene A" è '$B \supset A$'. La negazione di '$A \subset B$' si scrive '$A \not\subset B$', &c. Su molti libri si trova una convenzione leggermente diversa, secondo la quale "A è incluso in B" si scrive '$A \subseteq B$', mentre il simbolo '$\subset$' è riservato per l'inclusione *propria*, cioè '$(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$'. Noi qui useremo '$\subseteq$' come sinonimo di '$\subset$', con differenza solo di enfasi sulla possibilità di '$=$', mentre all'inclusione propria dedicheremo '$\subsetneqq$'.

Se guardiamo la tabella dell'appartenenza, si ha che $A \subset B$ quando ogni '$\in$' della colonna di A si trova anche nella colonna di B, mentre B potrà avere o non avere qualche '$\in$' in più. Per esempio, nella tabella scritta prima, si ha $c \not\subset d$ perché c'è un elemento (ad esempio b) che sta in c ma non in d, e $d \not\subset c$ perché c'è un altro elemento (ad esempio a) che sta in d ma non in c. Invece d è candidato a essere sottinsieme di f, perché ogni '$\in$' della colonna di d si trova anche nella colonna di f, e come sottinsieme sarebbe *proprio*, perché e appartiene a f ma non a d. Se non ci fossero altri elementi oltre ad a, b, c, d, e, f potremmo dire che $d \subsetneqq f$ senza riserve.

Una parola di ammonimento: capita spesso nel parlare di usare "contenuto" quando si dovrebbe dire "appartiene", o che un insieme "contiene" un elemento. Il peccato è veniale in quei contesti in cui si considerano solo atomi da una parte e insiemi di atomi dall'altra.

Invece che in forma discorsiva, daremo la dimostrazione del seguente teoremino sotto forma di una sfilza di (doppie) implicazioni, ognuna giustificata dal commento a margine. Buon divertimento.

Teorema (proprietà antisimmetrica dell'inclusione). *Due insiemi A, B coincidono se e solo se* $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$.

Dimostrazione. In formule

$$A = B$$

$$\Updownarrow \qquad \text{postulato}$$

$$\forall x \text{ elemento: } x \in A \iff x \in B$$

$$\Updownarrow \qquad \text{logica: '}p \iff q\text{' equivale a '}(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\text{'}$$

$$\forall x \text{ elemento: } \big(x \in A \Rightarrow x \in B\big) \wedge \big(x \in B \Rightarrow x \in A\big)$$

$$\Updownarrow \qquad \text{logica: '}\forall x{:}p(x) \wedge q(x)\text{' equivale a '}(\forall x{:}p(x)) \wedge (\forall x{:}q(x))\text{'}$$

$$\big(\forall x \text{ elemento: } x \in A \Rightarrow x \in B\big) \wedge \big(\forall x \text{ elemento: } x \in B \Rightarrow x \in A\big)$$

$$\Updownarrow \qquad \text{definizione di inclusione}$$

$$(A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

□

Esercizio. "x è un elemento" è un predicato insiemistico?

Esercizio. Dimostrare che $\forall A, B, C$ insiemi si ha $A \subset A$ e $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$ (proprietà riflessiva e transitiva dell'inclusione).

Esercizio. Possiamo pensare di specificare un universo assegnando l'elenco dei suoi elementi distinti, dicendo quali di questi sono insiemi e quali elementi appartengono a ciascun insieme e quali no. Supponiamo ad esempio di avere esattamente due atomi $a \neq b$ e due insiemi $A \neq B$, con le seguenti relazioni di appartenenza: $a \in A$, $a \in B$, $b \notin A$, $b \in B$, $A \notin A$, $A \notin B$, $B \notin A$, $B \notin B$. Verificare che in questo universo valgono i postulati che abbiamo elencato fin qui, e che dati due insiemi uno dei due è sempre contenuto nell'altro.

a	b	A	B
atomo	atomo	insieme	insieme

	a	b	A	B
a	$=$	$\neq$	$\neq$	$\neq$
b	$\neq$	$=$	$\neq$	$\neq$
A	$\neq$	$\neq$	$=$	$\neq$
B	$\neq$	$\neq$	$\neq$	$=$

	a	b	A	B
a			$\in$	$\in$
b			$\notin$	$\in$
A			$\notin$	$\notin$
B			$\notin$	$\notin$

Esercizio. Assegnamo un universo con esattamente due elementi distinti X, Y, i quali sono anche insiemi, in modo tale che X è l'unico elemento di Y e Y è l'unico elemento di X. Mostrare che questo arrangiamento rispetta i postulati enunciati finora. In questo universo due insiemi distinti si appartengono a vicenda ma ciascuno non ha sottinsiemi oltre a se stesso.

	X	Y
X	$\notin$	$\in$
Y	$\in$	$\notin$

2. Insiemi definiti da una proprietà e paradosso di Russel.

Il figurarsi gli elementi di un insieme come pesci in un banco rende bene l'idea che all'interno dell'insieme non è richiesto alcun ordinamento o gerarchia. Quello che conta per individuare un insieme è quali elementi gli appartengono e quali no. Per il resto, i pesci del banco sono in perpetuo rimescolamento.

Per i successivi sviluppi della teoria, è meglio introdurre un altro paradigma della relazione che c'è fra elemento ed insieme: quello di pensare un insieme come *elenco* di elementi. In altre parole, il pesce non deve necessariamente stare di persona all'interno di un banco, ma può semplicemente iscriversi ad un club; l'indirizzario dei membri del club *è* un insieme. Diventa così più facile immaginare che un elemento appartenga a più club nello stesso tempo.

Aggiorniamo la nostra visione dell'oceano degli elementi: alcuni di loro saranno elementi puri (i pesci), altri saranno elenchi di elementi (gli insiemi). Ogni tanto occorrerà ricordarsi che questi elenchi non sono ordinati: più che dei papiri forse dovremmo pensarli come i sacchetti che contengono i numeri della tombola. Invece di un numero, sulle palline ci sarà scritto nome e indirizzo di un elemento. Non spingiamo troppo l'analogia, però. I postulati finora non ci autorizzano, per esempio, a infilare la mano nel sacchetto ed estrarre una pallina a caso. Tutto ciò che possiamo fare è chiamare alla cieca il nome di un elemento e ascoltare se una voce risponde "presente!" o no.

Poiché ogni insieme è anche un elemento, nulla ci vieta di pensare che fra gli elementi di un insieme ci siano non solo elementi puri, ma anche altri insiemi. Questi ultimi a loro volta possono essere insiemi di insiemi... Nulla sembra vietare che fra gli elementi di un elenco-insieme A ci sia l'elenco-insieme A stesso. La cosa sarebbe bizzarra se si pensa all'elenco dei membri di un club; molto meno bizzarra se si considera ad esempio una spedizione di documenti a cui si allega un elenco dei documenti spediti: non è irragionevole che tale elenco abbia se stesso fra gli articoli anche "il presente elenco".

Lavoriamo pure di fantasia quanto ci pare, ma poi questi insiemi contorti che abbiamo escogitato a tavolino ci saranno davvero? Possiamo istituire un club prescrivendo semplicemente una regola di ammissione? Le prime teorie degli insiemi, verso la fine dell'ottocento, presupponevano un associazionismo illimitato, che potremmo chiamare **postulato ingenuo dell'insieme definito da una proprietà**: appena sia dato un predicato $P(x)$ che abbia senso e sia o vero o falso per ogni elemento x, deve necessariamente esistere l'insieme di tutti e soli gli elementi x per i quali $P(x)$ è vero (*"insieme definito da una proprietà"*).

Nell'anno 1901 il tedesco Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848–1925), che stava per completare il secondo volume della sua opera *Die Grundgesetze der Arithmetik*, ricevette una comunicazione da parte dell'inglese Bertrand Arthur William Russel (1872–1970). Vi si faceva notare, fra l'altro, il fatto che andiamo a illustrare, e che è ora noto come "antinomia di Russel". Antinomìa vuol dire contraddizione, e una genuina contraddizione c'era davvero all'interno della teoria "ingenua" di Frege. Nella teoria smaliziata che abbozziamo qui non si tratta di contraddizione, ma di semplice paradosso, cioè di un fatto che va contro le aspettative di chi non ci ha pensato su.

Detto a parole, il paradosso di Russel consiste nel fatto che non esiste l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi. L'appartenere o il non appartenere a se stessi sono predicati insiemistici perfettamente ben definiti, grazie al postulato secondo cui ogni insieme è un elemento, e quindi all'incrocio fra la riga x e la colonna x della tabella dell'appartenenza ci deve essere uno dei due segni $\in$ e $\notin$.

Teorema (paradosso di Russel). *Non esiste un insieme R tale che*

$$\forall x \text{ insieme: } x \in R \iff x \notin x\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che un tale insieme R esista. Poiché la proprietà '$x \in R \iff x \notin x$' vale per ogni insieme x, vale anche quando ad x sostituiamo R, ottenendo

$$R \in R \iff R \notin R\,.$$

Quindi le due proposizioni '$R \in R$' e '$R \notin R$' dovrebbero essere o entrambe vere o entrambe false. Ma questo va contro il postulato dell'appartenenza, secondo il quale una delle due deve essere vera e l'altra falsa. Altrimenti detto, usando la metafora degli elenchi: se ci proponiamo di compilare l'elenco di tutti gli elenchi che non elencano se stessi avremo il problema se elencare o no l'elenco stesso, e qualunque scelta facciamo sarà contradditoria: se lo includiamo dovremmo escluderlo e viceversa. $\square$

	A	B	C	D	E	$\dots$
A	$\boldsymbol{\notin}$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\cdots$
B	$\notin$	$\boldsymbol{\in}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\cdots$
C	$\in$	$\notin$	$\boldsymbol{\in}$	$\notin$	$\notin$	$\cdots$
D	$\in$	$\in$	$\notin$	$\boldsymbol{\notin}$	$\notin$	$\cdots$
E	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\boldsymbol{\notin}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

La dimostrazione del paradosso di Russel diventa più intuitiva se viene riferita alla tavola di verità del predicato "appartenenza". Supponiamo che tutti gli insiemi $A, B, C \dots$ siano ordinati nello stesso modo per righe e per colonne (lasciamo fuori gli atomi). Concentriamo la nostra attenzione sulle caselle diagonali (quelle col simbolo in grassetto, se si distingue). Componiamo poi una colonna di simboli scrivendo nell'n-esima casella il segno *opposto* a quello che appare nell'n-esima casella della diagonale. Pensiamoci un attimo e vedremo che questa colonna sarebbe quella del fantomatico insieme R di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi.

R
$\in$
$\notin$
$\notin$
$\in$
$\in$
$\vdots$

Orbene, la colonna di R *non può essere una colonna della tabella.* Infatti, immaginiamo di sovrapporre in trasparenza la colonna di R successivamente alla prima colonna della tavola, alla seconda, alla terza, &c, tenendo d'occhio la casella diagonale. La colonna di R non può coincidere con la prima colonna perché nella prima casella c'è un simbolo diverso, con la seconda colonna nemmeno, perché la seconda casella ha un simbolo diverso, e così via, non può essere l'n-esima colonna perché nell'n-esima casella c'è un simbolo diverso.

L'*argomento diagonale*, ossia la manipolazione della diagonale di una tabella a due entrate, compare in più di un punto chiave della teoria degli insiemi, e non solo di questa. Il suo uso nel paradosso di Russel presta però il fianco ad una seria (anche se esoterica) obiezione: nulla ci garantisce che gli insiemi si possano ordinare tutti quanti in una fila e che quindi si possa costruire una tabella di verità dell'appartenenza che assomigli a quella che abbiamo disegnata (già quella contiene troppi '$\cdots$' per essere tollerata da un purista). Rimandiamo i chiarimenti a quando parleremo degli insiemi infiniti. Gli universi con solo un numero finito di insiemi, in cui il problema non si porrebbe, saranno esclusi da alcuni dei prossimi postulati. L'argomento diagonale non dimostra, a rigore, il paradosso di Russel, ma vale la pena averlo visto in azione. La dimostrazione ineccepibile che abbiamo dato per prima non è altro, a guardar bene, che una versione dell'argomento diagonale *depurata* dall'ipotesi nascosta che gli insiemi fossero ordinabili in fila indiana.

Esercizio. Supponiamo di avere un universo senza atomi e con tre insiemi distinti A, B, C, aventi la tabella di appartenenza qui accanto. I postulati finora espressi sono verificati? Russellificare questo universo (cioè trovare un insieme "mancante" nel modo che Russel ci ha insegnato). E se provassimo ad aggiungere all'universo quell'insieme mancante, potremmo farla in barba a Russel?

	A	B	C
A	$\in$	$\notin$	$\in$
B	$\in$	$\in$	$\in$
C	$\in$	$\notin$	$\notin$

Esercizio. Nell'universo dell'esercizio precedente (senza aggiunte) esistono l'insieme di tutti gli insiemi e l'insieme di tutti gli insiemi che appartengono a se stessi? Se erano questi gli insiemi che volevamo, potevamo ottenerli anche in un universo con meno di tre elementi?

Il povero Frege mandò alle stampe ugualmente il suo secondo volume, nel 1903, aggiungendo soltanto una postilla ove si avvertiva il pubblico che c'era un baco che minava il piedestallo della sua teoria.

Molti cervelli di grosso calibro si misero a cercare di salvare il salvabile. La teoria di Frege era così bella che era un vero peccato che fosse sbagliata. Una via d'uscita la trovò lo stesso Russel, rinunciando al postulato secondo cui gli insiemi sono anche elementi, e separando gli elementi in diversi "tipi": nel primo tipo ci vanno gli atomi, nel secondo gli insiemi formati da soli atomi, nel terzo gli insiemi formati da insiemi formati da soli atomi, e così via, ogni tipo formato da insiemi che prendono elementi dal solo tipo precedente. Questa teoria non è però quella comunemente seguita oggigiorno. Si preferisce lasciare che gli insiemi prendano ogni genere di elemento, è chiaro però che non si può lasciare che una *qualunque* proprietà, per quanto sensata, come $x \notin x$, delimiti necessariamente un insieme. Il paradosso di Russel non si presenta più se chiediamo, più modestamente, che una proprietà *stacchi* un insieme da ogni *insieme dato*, non dall'universo intero. Abbiamo quindi il seguente postulato smaliziato al posto di quello ingenuo.

• **Postulato del sottinsieme definito da una proprietà.** *Dato un insieme A e un predicato $P(x)$ che ha senso per tutti gli elementi di A, esiste uno (e un solo) insieme B a cui appartengono tutti e soli quegli elementi x di A per i quali $P(x)$ è vero:*

$$\forall x \text{ elemento: } x \in B \iff (x \in A) \land P(x)\,.$$

Un dettaglio fastidioso: non è richiesto che il predicato $P(x)$ sia definito per tutti gli elementi dell'universo, ma solo per gli $x \in A$, cosicché a rigore la doppia implicazione '$x \in B \iff (x \in A) \wedge P(x)$' può *non essere definita* per alcuni elementi x dell'universo, rendendo senza senso la formula del postulato, che vuole la verità per *ogni* elemento. Un esempio di predicato insiemistico che non è sempre definito è l'appartenenza '$a \in b$', che non ha senso se b è un atomo. Per cavarci dall'impiccio dovremmo scrivere la formula del postulato usando invece di P la sua modificata $\tilde{P}(x)$ che coincide con $P(x)$ per $x \in A$ ed è posta falsa (quindi sensata) per tutti gli $x \notin A$.

Bisogna intendersi su che cosa si intende per "proprietà". Di solito un elenco di partecipanti a un concorso o di membri di un'associazione viene stilata in base a qualche politica ideale, che ci aspettiamo essere di natura diversa, astratta, e più semplice dell'elenco stesso. L'elenco sarà soltanto il risultato di un vaglio di domande accidentali di adesione. Pensiamo ad esempio che per stabilire se un numero intero è pari non c'è bisogno di avere sotto mano una banca-dati contenente tutti i numeri pari. Nella teoria generale invece possono benissimo darsi dei sottinsiemi assolutamente casuali, senza nessun criterio ispiratore; ad ognuno di essi avremo associata la legittima "proprietà" di essere un loro elemento. Questo è un punto da tenere presente quando si manipolano insiemi infiniti, non tutti i sottinsiemi dei quali si possono "comprimere" in termini di una quantità finita di informazione. Ci saranno sottinsiemi per i quali, se vogliamo stabilire se un elemento appartiene loro oppure no, non ci sono scorciatoie: va sfogliata una rubrica telefonica con infinite pagine.

Teorema. *Il sottinsieme B indicato nel postulato è unico.*

Dimostrazione. Siano B e B' due insiemi tali che

$$\begin{gathered} \forall x \text{ elemento: } x \in B \iff (x \in A) \wedge (P(x) \text{ è vera})\,, \\ \forall x \text{ elemento: } x \in B' \iff (x \in A) \wedge (P(x) \text{ è vera})\,. \end{gathered}$$

Per la proprietà transitiva dell'equivalenza logica, si ha $x \in B \iff x \in B'$, cioè $B = B'$, per il postulato dell'uguaglianza fra insiemi. $\square$

Notazione: il sottinsieme B di A definito dalla proprietà $P(x)$ si indica con $B = \{x \in A \mid P(x)\}$, o anche $\{x \in A \,:\, P(x)\}$. Talvolta l'insieme A viene sottinteso quando sia chiaro dal contesto.

In termini di riempimento della tabella di verità del predicato "appartenenza", il postulato del sottinsieme definito da una proprietà ci dice che se prendiamo una qualsiasi colonna e trasformiamo uno o più segni '$\in$' in '$\notin$' la colonna risultante deve potersi trovare fra le colonne della tabella. Questo è un vincolo che si aggiunge a quelli di rispettare le uguaglianze fra elementi e fra insiemi.

Esercizio. Quel paio di universi che abbiamo assegnato come esercizi nelle pagine precedenti *non* verificano il postulato del sottinsieme definito da una proprietà.

Esercizio. Consideriamo un universo con esattamente due atomi distinti a, b e quattro insiemi A, B, C, D, in modo tale che nessun insieme appartenga a un insieme. Mostrare che esiste un unico modo possibile di completare la tabella di appartenenza qui a fianco in modo da rispettare il postulato dei sottinsiemi definiti da una proprietà. (Volendo essere formali, usare le proprietà '$x = a$', '$x = b$', nella variabile x, e loro combinazioni logiche).

	A	B	C	D
a	$\in$	$\in$		$\notin$
b	$\in$			$\notin$

Esercizio (paradosso dell'insieme di tutti gli insiemi). Dimostrare che non esiste un insieme Ω tale che $\forall x$ elemento: $x \in \Omega \iff x$ è un insieme. (Avvio: se Ω esistesse, pure l'insieme di Russel dovrebbe esistere in quanto sottinsieme di...)

Esercizio (paradosso dell'insieme di tutti gli elementi). Non esiste l'insieme di tutti gli elementi. (Quindi non bisogna pensare l'universo degli elementi come un recinto o una vasca, ma un oceano di cui non si vedono i confini: l'universo tutto intero non è un insieme. Quando è in vigore il postulato dei sottinsiemi, la tabella di verità dell'appartenenza non può contenere una colonna con...). Attenzione: il risultato non esclude che ci possa essere l'insieme di tutti gli atomi.

Esercizio (versione inoffensiva del paradosso di Russel). Dimostrare che per ogni insieme X esiste l'insieme $Y = \{x \in X \mid x \notin x\}$ e che $Y \notin X$.

3. Intersezione, unione e altre operazioni fra insiemi.

Finora abbiamo trattato solo di relazioni: $=, \neq, \in, \subset, \ldots$ Veniamo alla prima *operazione*: l'intersezione. Se si domanda a bruciapelo a un addetto ai lavori, ci sentiremo rispondere che l'intersezione $A \cap B$ fra A e B è l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A che a B. Però dei finti principianti come noi devono imparare a smascherare quei ragionamenti faciloni che danno per scontato che l'oggetto definito esista, o che sia unico. Diamo così la seguente definizione pedante, che lascia aperto il dubbio sull'esistenza e sull'unicità dell'intersezione.

Definizione. *Dati due insiemi A, B, si dice intersezione fra A e B un insieme C (se c'è) tale che*

$$\forall x \text{ elemento: } x \in C \iff (x \in A) \wedge (x \in B)\,.$$

La definizione è impostata in modo operativo: i dati sono A e B e l'intersezione è da trovare. Potremmo anche scriverla in stile constatativo: dati A, B, C si dice che C è (una) intersezione fra A e B se vale quella certa formula.

L'intersezione fra A e B si indica universalmente con $A \cap B$. Questa intersezione, se c'è, è unica, con lo stesso ragionamento che abbiamo usato nel dimostrare che il sottinsieme definito da una proprietà è unico.

Esercizio. Siano A, B, C degli insiemi. Dimostrare che se esiste $A \cap B$ esiste anche $B \cap A$ e coincidono (proprietà *commutativa* dell'intersezione). Se esiste $(A \cap B) \cap C$ allora esiste anche $A \cap (B \cap C)$ e coincidono (proprietà *associativa*). Infine $A \cap B$ esiste e coincide con A se e solo se $A \subset B$.

In realtà l'intersezione *c'è*, grazie al postulato del sottinsieme:

Teorema. *Esiste sempre l'intersezione fra due insiemi.*

Dimostrazione. Sia $P(x)$ la proprietà '$x \in B$'. Per il postulato, esiste l'insieme C degli elementi di A per i quali P è vera. Questo C è esattamente l'intersezione fra A e B:

$$x \in C \iff (x \in A) \wedge \big(P(x) \text{ è vera}\big) \iff (x \in A) \wedge (x \in B)\,.$$

□

Quindi l'intersezione esiste perché è un sottinsieme di A. Potevamo impostare la dimostrazione anche sul fatto che $A \cap B$ è un sottinsieme di B.

Se prendiamo la definizione di intersezione e scriviamo la disgiunzione '$\vee$' al posto della congiunzione '$\wedge$' si ottiene la definizione di unione:

Definizione. *Dati due insiemi A, B, si dice unione di A e B quell'insieme C (se c'è) tale che*

$$\forall x \text{ elemento: } x \in C \iff (x \in A) \vee (x \in B)\,.$$

L'unione, se c'è, è unica e si indica con $A \cup B$, ma non riusciamo a dimostrare che esiste, perché in genere non è sottinsieme di nessun insieme dato.

Esercizio. Riguardare ancora una volta gli universi specificati negli esercizi precedenti in cerca di unioni non esistenti.

Esercizio. Consideriamo un universo con esattamente due atomi a, b e tre insiemi A, B, C, in modo tale che nessun insieme appartenga a un insieme e che valga la tabella di appartenenza a fianco. Mostrare che in tale universo non è verificato il postulato dell'unione, mentre lo sono tutti i postulati precedenti a quello.

	A	B	C
a	$\in$	$\notin$	$\notin$
b	$\notin$	$\in$	$\notin$

Esercizio. Siano A, B, C degli insiemi. Se esiste $A \cup B$, allora esiste anche $B \cup A$ e coincidono (proprietà *commutativa* dell'unione). Se esiste $(A \cup B) \cup C$, esiste anche $A \cup (B \cup C)$ e coincidono (proprietà *associativa*). Se $A \subset C$ e $B \subset C$, allora $A \cup B$ esiste ed è sottinsieme di C. Infine $A \cup B$ esiste e coincide con B se e solo se $A \subset B$.

Nel caso generale introduciamo un postulato apposito:

• **Postulato dell'unione.** *Dati qualsiasi due insiemi A, B, esiste l'unione $A \cup B$.*

Il teorema seguente è la proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione.

Teorema. *Dati tre insiemi A, B, C, si ha sempre $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.*

Dimostrazione. Per ogni elemento x si ha

$$\begin{array}{cl}
x \in (A \cap B) \cup C & \\
\Updownarrow & \text{definizione di unione} \\
(x \in A \cap B) \vee (x \in C) & \\
\Updownarrow & \text{definizione di intersezione} \\
\big((x \in A) \wedge (x \in B)\big) \vee (x \in C) & \\
\Updownarrow & \text{`$\vee$' è distributiva rispetto a `$\wedge$'} \\
\big((x \in A) \vee (x \in C)\big) \wedge \big((x \in B) \vee (x \in C)\big) & \\
\Updownarrow & \text{definizione di unione} \\
(x \in A \cup C) \wedge (x \in B \cup C) & \\
\Updownarrow & \text{definizione di intersezione} \\
x \in (A \cup C) \cap (B \cup C). &
\end{array}$$

□

Esercizio. Supponiamo che gli insiemi X, Y non abbiano altri elementi oltre a quelli indicati nella tabella a fianco. Completare allora la colonna di $X \cup Y$. Fra gli elementi a, b, c, d, e, quanti come minimo devono essere distinti?

	X	Y	$X \cup Y$
a	$\in$	$\in$	
b	$\notin$	$\in$	
c	$\notin$	$\notin$	
d	$\notin$	$\notin$	
e	$\in$	$\notin$	

Esercizio. L'unione è distributiva rispetto all'intersezione: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Inoltre $A \cup A = A \cap A = A$, $A \cup B \subset A \cap B \iff A = B$.

Un avvertimento: viene naturale descrivere $A \cup B$ come l'insieme formato dagli elementi di A *e* da quelli di B. Questa congiunzione "e" può confondere le idee e spingere a scrivere la proprietà che definisce l'unione come '$(x \in A) \wedge (x \in B)$', che è sbagliato.

Con ogni probabilità non è una pura coincidenza il fatto che i simboli logici '$\wedge$' e '$\vee$' siano versioni spigolose dei tondi insiemistici '$\cap$' e '$\cup$', che sono loro gemellati. Non è evidente quale segno sia stato inventato per primo. C'è l'iniziale di "unione" che farebbe pensare ad '$\cup$', però il latino *"vel"* (che vuol dire "oppure" non esclusivo, contrapposto all'esclusivo *"aut"*, e il latino doveva essere familiare ai padri fondatori) preme sulla bilancia dalla parte di '$\vee$'.

Esercizio (non esiste il "complemento" di un insieme). Dimostrare che non esiste l'insieme degli elementi che *non* appartengono a un dato insieme.

La negazione logica si usa nella definizione delle due seguenti operazioni fra insiemi: differenza e differenza simmetrica. In parole povere, la differenza $A \setminus B$ è l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B, e la differenza simmetrica $A \triangle B$ è l'insieme degli elementi che appartengono a soltanto uno fra A e B (corrispondente alla disgiunzione *"aut"* latina). A dire il vero la differenza simmetrica praticamente non si usa mai, ma senza di lei ci sarebbe un buco in questa tornata di definizioni, che comprende tutti gli insiemi che si possono ottenere incollando i pezzi in cui A e B si tagliano a vicenda.

Definizione. *Dati due insiemi A, B, si dice differenza (insiemistica) fra A e B, e si indica con $A \setminus B$, il sottinsieme di A definito dalla proprietà '$x \notin B$':*

$$\forall x \text{ elemento: } x \in A \setminus B \iff (x \in A) \wedge (x \notin B)\,.$$

Si dice invece differenza simmetrica fra A e B il sottinsieme di $A \cup B$, indicato con $A \triangle B$, di quegli elementi che non appartengono ad $A \cap B$:

$$\forall x \text{ elemento: } x \in A \triangle B \iff (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B)\,.$$

A dire il vero un altro "buco" rimane ancora fra i sottinsiemi di $A \cup B$ definibili solo con combinazioni dei predicati '$x \in A$' e '$x \in B$": è quello corrispondente a '$(x \notin A) \wedge (x \notin B)$', ma ce ne occuperemo nel prossimo paragrafo.

La definizione di insiemi "disgiunti" che segue è più contorta di quella usuale, ma di quella capiremo il motivo nella prossima puntata.

Definizione. *Due insiemi A, B si dicono disgiunti se per ogni elemento x si ha $x \notin A \cap B$.*

Esercizio. $A \setminus B$ e $A \triangle B$ esistono sempre e sono unici. Gli insiemi $A \setminus B$ e $B \setminus A$ sono disgiunti. Inoltre valgono $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, $A \triangle B = B \triangle A$ (non per niente si chiama differenza *simmetrica*).

Esercizio (parziali analogie fra '$\cup, \setminus$' e '$+, -$'). Così come per due numeri a, b si ha $a = c - b \iff a + b = c$, se A, B sono insiemi e se $B \subset C$ allora $A = C \setminus B \Rightarrow A \cup B = C$ e se invece A e B sono disgiunti allora $A = C \setminus B \Leftarrow A \cup B = C$. (In certi universi anche senza clausole di inclusione o disgiunzione vale l'equivalenza '$A = C \setminus B \iff A \cup B = C$'. Però non sono universi da prendere sul serio, perché non verificano i prossimi postulati).

Esercizio. $X \setminus A \subset X \setminus B \iff X \cap A \supset X \cap B$. Se A e B sono sottinsiemi di X l'equivalenza precedente si semplifica in…

Esercizio. Quando $A \subset X$, definiamo *complemento di A in X* l'insieme $X \setminus A$. Dimostrare che il complemento in X dell'unione è l'intersezione dei complementi e che il complemento (sempre in X) dell'intersezione è… Il complemento di A è contenuto nel complemento di B se e solo se A…

Esercizio. Studio di fattibilità di una riforma della simbolario logico-insiemistico che estenda sistematicamente le corrispondenze angoloso/arrotondato. Ad esempio, si potrebbe pensare a scrivere qualcosa tipo '$<$' per l'implicazione, al posto di '$\Rightarrow$', da affiancare all'inclusione '$\subset$'. La negazione non ha un suo partner naturale, ma in qualche modo può essere associata al complemento rispetto ad un "insieme ambiente" dato X.

4. Insieme vuoto e singoletti.

Date una scorsa ai postulati enunciati finora: tutti quanti sono del tipo "*se* sono dati certi oggetti, *allora*…". Nessuno di essi regalava delle cose a chi non ne avesse già delle altre. Abbiamo sì dei teoremi secchi, che non richiedono che sia dato in partenza alcunché, ma sono teoremi di *non*-esistenza (Russel, insieme di tutti gli insiemi &c). Se guardiamo bene, tutto quanto detto filerebbe liscio anche in un universo che non contenesse alcun insieme, ma soltanto elementi puri, o addirittura nemmeno questi.

Per togliere di mezzo l'eventualità banalizzante di un universo vuoto, o fatto di soli atomi asociali, diamo ora un postulato di esistenza secco, col quale, per così dire, creiamo un insieme dal nulla.

• **Postulato dell'insieme vuoto.** *Esiste uno (e un solo) insieme, indicato con $\varnothing$ e chiamato insieme vuoto, tale che per ogni elemento x si ha $x \notin \varnothing$.*

Teorema. *L'insieme vuoto è unico.*

Dimostrazione. Se A e B sono due insiemi vuoti, allora i predicati '$x \in A$' e '$x \in B$' si equivalgono, perché entrambi sempre falsi. Il postulato dell'uguaglianza fra insiemi fa concludere che $A = B$. $\square$

Teorema. *L'insieme vuoto è sottinsieme di ogni insieme.*

Dimostrazione. Sia A un qualsiasi insieme. Per qualunque elemento x, il predicato '$x \in \varnothing$' è falso, e quindi l'implicazione '$x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$' è vera. Per definizione di inclusione si ha $\varnothing \subset A$. $\square$

Esercizio. $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing \cap \varnothing = \varnothing \setminus \varnothing = \varnothing \bigtriangleup \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \notin \varnothing$, $A \subset \varnothing \iff A = \varnothing$.

Esercizio. L'insieme vuoto si può far rientrare fra gli insiemi definiti da una proprietà? Cioè si può scrivere un predicato $P(x)$ che (1) abbia senso per tutti gli elementi, (2) usi solo concetti introdotti *prima* di $\varnothing$ (quindi per esempio '$x \in \varnothing$' non va bene), e (3) sia tale che $\forall x$ elemento: $x \in \varnothing \iff P(x)$?

Esercizio. Supponiamo che invece di postulare l'esistenza di $\varnothing$ avessimo postulato l'esistenza di almeno un insieme, senza precisargli nessuna proprietà. Dedurre allora l'esistenza di $\varnothing$ come teorema.

Esercizio. Rivedere la definizione di insiemi disgiunti e verificare che equivale ad avere per intersezione l'insieme vuoto. Tuttavia la definizione di per sé non presuppone l'esistenza di $\varnothing$. Certo, se esistono due insiemi (disgiunti o no), allora esiste anche l'insieme vuoto...

Attenzione a non confondere le due affermazioni: "l'insieme tal dei tali non esiste" e "l'insieme tal dei tali è vuoto". Dire che un insieme è vuoto significa che la proprietà $P(x)$ che lo definisce è falsa per ogni x dove ha senso, cioè che *non esistono elementi di A*. Invece nel caso del paradosso di Russel abbiamo un predicato '$x \notin x$' che per certi x è vero e per certi altri x sarà falso. Il paradosso è che *non esiste l'insieme R* che racchiuda tutti e soli gli x per il quale il predicato è vero. Ma R non è l'insieme vuoto, perché la proprietà che lo definisce non è sempre falsa (è vera almeno per $x = \varnothing$).

Il nostro oceano dunque non è vuoto, perché contiene almeno un elemento: l'insieme vuoto... Però i postulati del sottinsieme e dell'unione, che si intendeva "producessero" nuovi insiemi a partire da quelli vecchi, non ci fanno avanzare di un millimetro, perché l'unico sottinsieme di $\varnothing$ è lui stesso e $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$. L'universo potrebbe contenere il solo insieme vuoto, se non ci premuniamo.

Definizione. *Dato un elemento a, si dice singoletto di a, e si indica con $\{a\}$, l'(unico) insieme A, se c'è, tale che $\forall x$ elemento: $x \in A \iff x = a$.*

Una versione constatativa della definizione di singoletto suonerebbe così: dati un elemento a e un insieme A si dice che A è (un) singoletto di a se...

Non ci sognamo qui di proibire l'uso delle parentesi graffe a scopi diversi dall'indicare un singoletto. Sarà cura della scrittrice o dello scrittore di non mescolare usi diversi in modo ambiguo. Comunque, in fatto di notazioni infelici ma saldamente attestate, ne vedremo di ben peggiori.

Teorema. *Se a e b sono due elementi e se i due singoletti $\{a\}$ e $\{b\}$ esistono, allora $\{a\} = \{b\} \iff a = b$.*

Dimostrazione. Se $a = b$ si ha che $\forall x$ elemento: $x \in \{a\} \iff x = a \iff x = b \iff x \in \{b\}$ e quindi $\{a\} = \{b\}$ per il postulato dell'uguaglianza fra insiemi. Viceversa, se $\{a\} = \{b\}$, si ha $\forall x$ elemento: $x = a \iff x \in \{a\} \iff x \in \{b\} \iff x = b$. Ponendo $x = a$ si ricava che $a = a \iff a = b$, da cui $a = b$ perché '$a = a$' è automaticamente vera. $\square$

Così come l'insieme vuoto era una lista con nessun elemento, i singoletti sarebbero liste contenenti un solo elemento. Ammetteremo d'ora in poi che esistano senza restrizioni.

• **Postulato del singoletto.** *Per ogni elemento a esiste il singoletto $\{a\}$.*

Applicando il postulato del singoletto all'insieme vuoto, che è un elemento, otteniamo il singoletto $\{\varnothing\}$: la lista il cui unico elemento è una lista senza elementi. Questo singoletto non coincide con l'insieme vuoto; l'universo contiene ora due oggetti distinti.

Teorema. $\{\varnothing\} \neq \varnothing$.

Dimostrazione. Essendo $\{\varnothing\}$ ed $\varnothing$ entrambi insiemi, per dimostrare che sono diversi bisognerà esibire un elemento di uno dei due che non appartenga all'altro. Questo elemento è $\varnothing$, che esiste ed appartiene al singoletto $\{\varnothing\}$ ma non all'insieme $\varnothing$. $\square$

Notare che nella formula (vera) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$, nel membro di sinistra l'insieme vuoto è visto come insieme, mentre a destra è pensato come elemento (del singoletto).

Attenzione a non cadere nel tranello di confondere a con $\{a\}$. I due oggetti potrebbero coincidere nel caso di un elenco-insieme che ha "il presente elenco" come unico articolo. Però "normalmente" un insieme non coincide col proprio singoletto. Abbiamo visto la dimostrazione nel caso più semplice, in cui $a = \varnothing$.

Esercizio. Invece del postulato del singoletto potevamo equivalentemente richiedere che per ogni elemento a esista almeno un insieme a cui a appartiene.

Esercizio. Gli insiemi $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\{\{\varnothing\}\}\}$ sono tutti distinti.

Esercizio. Così come due insiemi coincidono se e solo se hanno gli stessi elementi, anche due elementi coincidono se e solo se appartengono agli stessi insiemi. (Prima del postulato del singoletto potevano esserci elementi che non appartenevano a nessun insieme, e quindi non potevamo distinguerli in base alla loro appartenenza.)

E via singolettando, possiamo popolare il nostro oceano di infiniti oggetti distinti: l'insieme vuoto e le sue singolettazioni successive. Il fatto che siano tutte distinte è spinoso da dimostrare, perché non abbiamo il principio di induzione a questo livello. Comunque, mentre già un paio di volte abbiamo cercato degli esempi di universi *finiti* per dimostrare che certe proprietà non erano in contrasto con i postulati, d'ora in poi possiamo scordarcene. La vita in un universo infinito è interessante e complicata.

Stiamo attenti che non siamo autorizzati a radunare tutte le infinite singolettazioni in un unico insieme infinito. Unire *due* singoletti in un unico insieme invece è perfettamente lecito.

Definizione. *Dati due elementi a, b, si dice coppia non ordinata formata da a e da b l'insieme $\{a\} \cup \{b\}$. Indicheremo tale insieme con $\{a, b\}$. Analogamente si parlerà di triplette non ordinate $\{a, b, c\} := \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$, di quadruple non ordinate &c.*

In questa sede chiameremo insiemi elementari quegli insiemi che si ottengono dall'insieme vuoto tramite un numero finito di singolettazioni e unioni. Non mettiamo questa definizione in evidenza perché a questo livello della teoria dobbiamo fingere di non sapere che cos'è un "numero finito". Accontentiamoci per ora della non rigorosa soddisfazione di avere a disposizione infiniti insiemi elementari.

Esercizio. Le coppie-non-ordinate non sono ordinate: $\{a, b\} = \{b, a\}$. Inoltre $x \in \{a, b\} \iff (x = a) \vee (x = b)$, $\{a, b\} = \{a\} \iff a = b$. Dimostrare che non è vero che $\forall a, b$ insiemi si ha $a \cup b = \{a, b\}$.

Esercizio. Poniamo $A_0 := \varnothing$, $A_1 := A_0 \cup \{A_0\}$, $A_2 := A_1 \cup \{A_1\}$, $A_3 := A_2 \cup \{A_2\}$. Verificare i seguenti fatti:

$$A_0 = \varnothing \quad A_1 = \{\varnothing\}, \quad A_2 = \bigl\{\varnothing, \{\varnothing\}\bigr\}, \quad A_3 = \Bigl\{\varnothing, \{\varnothing\}, \bigl\{\varnothing, \{\varnothing\}\bigr\}\Bigr\}.$$

Inoltre, presi due qualsiasi di questi insiemi, quando non coincidono uno dei due è sempre sia elemento che sottinsieme proprio dell'altro. Che cosa andrebbe a pennello come A_4? Come A_5, A_6...?

Esercizio. Dire se le seguenti formule sono vere o false per ogni scelta di insiemi A, B, C, con dimostrazione:

$$\begin{aligned} &(A \in B) \wedge (B \in C) \Rightarrow A \in C\,, \qquad &&(A \in B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \in C\,, \\ &(A \subset B) \wedge (B \in C) \Rightarrow A \in C\,, &&A \in B \Rightarrow A \subset B\,, \\ &A = C \setminus B \iff A \cup B = C\,, &&A \cup B = \{A, B\}\,. \end{aligned}$$

Notare che dimostrare che un '$\forall$' è falso significa dimostrare un '$\exists$', cioè *esibire un controesempio* esplicito.

5. Unioni e intersezioni di famiglie di insiemi.

Un insieme i cui elementi sono tutti insiemi è detto più spesso *famiglia* di insiemi invece che insieme di insiemi. Capita spesso di avere una famiglia di insiemi e di voler considerare l'insieme degli elementi comuni a tutti gli elementi della famiglia, o degli elementi che appartengono ad almeno un insieme della famiglia. Il caso dell'intersezione e dell'unione fra due insiemi A, B può essere vista come il caso particolare in cui la famiglia è la coppia non ordinata $\{A, B\}$. Diamo la seguente definizione generale.

Definizione. *Se $\mathcal{F}$ è una famiglia di insiemi, chiameremo rispettivamente intersezione ed unione degli insiemi di $\mathcal{F}$ gli insiemi $\bigcap\mathcal{F}$ e $\bigcup\mathcal{F}$, se ci sono, tali che*

$$\forall x \text{ elemento: } x \in \bigcap\mathcal{F} \iff \Big(\forall A \text{ insieme: } A \in \mathcal{F} \Rightarrow x \in A\Big),$$
$$\forall x \text{ elemento: } x \in \bigcup\mathcal{F} \iff \Big(\exists A \text{ insieme: } A \in \mathcal{F} \wedge x \in A\Big),$$

Si può fare la verifica formale che intersezione e unione di una famiglia di insiemi, se ci sono, sono uniche. Inoltre se $\mathcal{F} = \{A, B\}$, intersezione ed unione esistono e si ha semplicemente $\bigcap\mathcal{F} = A \cap B$ e $\bigcup\mathcal{F} = A \cup B$. Così come per l'intersezione fra due insiemi, l'intersezione di una famiglia di insiemi esiste per il postulato del sottinsieme, con una sola piccola condizione.

Teorema. *Se $\mathcal{F}$ è una famiglia non vuota di insiemi, allora esiste $\bigcap\mathcal{F}$.*

Dimostrazione. Visto che $\mathcal{F} \neq \varnothing$, esiste un insieme $A_0 \in \mathcal{F}$. Quindi $\bigcap\mathcal{F}$ esiste perché sottinsieme di A_0 definito da una proprietà. □

Esercizio. L'insieme vuoto $\varnothing$ è una famiglia di insiemi (vuota...). Ha senso quindi chiedersi che che ne è della sua unione e intersezione. Ebbene, $\bigcap\varnothing$ non esiste. (Se esistesse, sarebbe l'insieme di tutti gli elementi). Invece esiste $\bigcup\varnothing$ ed è l'insieme vuoto. Se A è un insieme, esistono unione ed intersezione della famiglia $\{A\}$ e si ha $\bigcap\{A\} = \bigcup\{A\} = A$. Se A, B, C sono insiemi, si ha $\exists\bigcap\{A, B, C\} = A \cap B \cap C$ e $\exists\bigcup\{A, B, C\} = A \cup B \cup C$.

Esercizio. Se tutti gli insiemi della famiglia $\mathcal{F}$ sono sottinsiemi di uno stesso insieme, allora esiste $\bigcup\mathcal{F}$.

Esercizio. Se si immaginano gli insiemi come degli elementi racchiusi da parentesi graffe, le famiglie di insiemi sono delle espressioni con due livelli di graffe. L'effetto dell'unione su una famiglia è quello di sopprimere le parentesi graffe immediatamente interne. Quando un oggetto ha tre o più livelli di graffe, l'unione sopprime quelle del secondo livello dall'esterno.

I postulati finora enunciati non sembrano garantire l'esistenza dell'unione di una famiglia qualsiasi di insiemi. Introduciamo un postulato apposito.

- **Postulato esteso dell'unione.** *Se $\mathcal{F}$ è una famiglia di insiemi, esiste l'unione $\bigcup\mathcal{F}$.*

Notare che non si dice che si possono unire tutti gli insiemi che si vogliono, ma solo quelli che formano un insieme di insiemi.

Esercizio. Non esiste l'unione di tutti gli insiemi. Non esiste l'insieme di tutti i singoletti.

Esercizio. "Calcolare" $\bigcap\{\{a, b, \}, \{\{a\}\}$, $\bigcup\{\{a, b, \}, \{\{b\}\}$, $\bigcap(\bigcup\{\{\{a\}\}, \{\{a\}, \{a, b\}\}\})$.

6. Insieme delle parti.

Definizione. *Dato un insieme A, si dice insieme delle parti di A, e si indica con $\mathcal{P}(A)$, l'insieme, se c'è, di tutti i sottinsiemi di A: $\forall x$ elemento: $x \in \mathcal{P}(A) \iff x \subset A$.*

Al solito, se l'insieme delle parti c'è, è anche unico. Talvolta è chiamato anche "insieme potenza" ed è indicato con 2^A invece che con $\mathcal{P}(A)$, per motivi che saranno forse svelati in un capitolo a venire. Cominciamo con l'esempio più semplice: l'insieme vuoto. Abbiamo già visto che $\varnothing$ ha $\varnothing$ come unico sottinsieme: $x \subset \varnothing \iff x = \varnothing$. Per il postulato del singoletto esiste un insieme (il singoletto $\{\varnothing\}$) che ha $\varnothing$ come unico elemento. Dalla catena di equivalenze

$$x \in \{\varnothing\} \iff x = \varnothing \iff x \subset \varnothing$$

segue che l'insieme $\{\varnothing\}$ verifica la definizione di insieme delle parti di $\varnothing$. In altre parole, $\mathcal{P}(\varnothing)$ esiste ed è $\{\varnothing\}$.

Teorema. $\mathcal{P}(\{\varnothing\})$ *esiste ed è uguale a* $\big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}$.

Dimostrazione. Fra i sottinsiemi di $\{\varnothing\}$ ci sono certamente $\varnothing$ e $\{\varnothing\}$. Infatti $\varnothing \subset \{\varnothing\}$ (perché l'insieme vuoto è sottinsieme di ogni insieme) e che $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing\}$ (perché ogni insieme è sottinsieme di se stesso). Dimostriamo che $\{\varnothing\}$ non ha altri sottinsiemi oltre a questi. Sia $x \subset \{\varnothing\}$, cioè sia x un insieme tale che $\forall y$ elemento vale l'implicazione $y \in x \Rightarrow y \in \{\varnothing\}$. Per definizione di singoletto, $y \in \{\varnothing\} \iff y = \varnothing$, e quindi l'implicazione si può riscrivere

$$\forall y \text{ elemento: } y \in x \Rightarrow y = \varnothing\,.$$

Se x ha almeno un elemento, questo è necessariamente $\varnothing$ e quindi $x = \{\varnothing\}$. Se invece x non ha elementi, è lui stesso l'insieme vuoto. Riassumendo i due casi possibili e usando la definizione di coppia non ordinata:

$$x \subset \{\varnothing\} \iff (x = \varnothing) \vee (x = \{\varnothing\}) \iff x \in \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}\,.$$

Per definizione di insieme delle parti, $\mathcal{P}(\{\varnothing\})$ esiste ed è come annunciato. □

Esercizio. Dati due qualsiasi elementi a, b, si ha $\mathcal{P}(\{a\}) = \big\{\varnothing, \{a\}\big\}$, $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\big\}$.

Se non si sottilizza sul significato di insieme "finito", non è arduo convincersi che l'insieme delle parti di $\{a, b, c, \ldots\}$ si ottiene elencando i sottinsiemi di zero elementi (ce n'è solo uno, il vuoto), quelli di un elemento (i singoletti $\{a\}$, $\{b\}\ldots$), quelli di due elementi (le coppie non ordinate $\{a, b\}$, $\{a, c\}\ldots$), quelli di tre elementi &c, separandoli tutti gli uni dagli altri con virgole e racchiudendo il tutto con una coppia di parentesone graffe. In particolare, l'insieme delle parti di un insieme finito sembrerebbe esistere sempre ed essere anch'esso un insieme finito. L'insieme delle parti di un insieme elementare parrebbe pure elementare.

Se una dimostrazione rigorosa ci sfugge a questo livello, ci toglieremo almeno il pensiero sull'*esistenza* dell'insieme delle parti con il seguente postulato, tutta la cui "potenza" apparirà trattando gli insiemi infiniti.

• **Postulato dell'insieme delle parti.** *Per ogni insieme A esiste l'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$.*

Esercizio. Dimostrare che per nessun insieme A può essere che $A = \mathcal{P}(A)$, o nemmeno che $A \supset \mathcal{P}(A)$. (Russellificare $A\ldots$). Dedurre da questo un'altra dimostrazione che non esiste l'insieme di tutti gli insiemi. (Fra l'altro, se esistesse non ci sarebbe bisogno del postulato dell'insieme delle parti).

Esercizio. Dire (con dimostrazione, almeno abbozzata in testa) quali fra le seguenti relazioni sono vere e quali false $\forall a, b$ elementi, $\forall A, B$ insiemi e $\forall \mathcal{F}$ famiglia di insiemi:

$$\begin{aligned}
&a \in \mathcal{P}(\{a\})\,, \quad \{a\} \subset \mathcal{P}(\{a\})\,, \quad \{b\} \in \mathcal{P}(\{a,b\})\,,\\
&\varnothing \in \mathcal{P}(\varnothing)\,, \quad \varnothing \subset \mathcal{P}(\varnothing)\,, \quad \varnothing \in \mathcal{P}(A)\,, \quad \varnothing \subset \mathcal{P}(A)\,, \quad A \cap \mathcal{P}(A) = \varnothing\,,\\
&A \subset \mathcal{P}(A)\,, \quad \{\varnothing, A\} \subset \mathcal{P}(A)\,, \quad \textstyle\bigcap \mathcal{P}(A) = \varnothing\,, \quad \bigcup \mathcal{P}(A) = A\,,\\
&\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \neq \varnothing \Rightarrow A \cap B \neq \varnothing\,,\\
&A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(B)\,, \quad A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)\,,\\
&\mathcal{P}(A \cup B) \subset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)\,, \quad \mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)\,,\\
&\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)\,, \quad \mathcal{P}(A \cap B) \supset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)\,,\\
&\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\textstyle\bigcup \mathcal{F})\,, \quad \mathcal{F} \in \mathcal{P}(\bigcup \mathcal{F})\,, \quad \mathcal{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup \mathcal{F}))\,.
\end{aligned}$$

Esercizio. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di famiglie di insiemi. Dimostrare che si può sopprimere il terzo (dall'esterno) livello di parentesi, ossia che esiste la famiglia degli insiemi del tipo $\bigcup \mathcal{A}$ per $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$, in quanto tale famiglia è un sottinsieme di $\mathcal{P}(\ldots)$. Si possono cancellare insieme il secondo e terzo livello considerando…

Esercizio. Sia $\mathcal{U}$ un universo che rispetta tutti i postulati elencati finora. Aggiungiamo ad $\mathcal{U}$ un elemento $\mathfrak{a}$ che non stava in $\mathcal{U}$, stipulando che sia un insieme e che sia l'unico elemento di se stesso. Inoltre affianchiamo $\mathfrak{a} \cup A$ ad ogni insieme A di $\mathcal{U}$. Il nuovo universo $\mathcal{U}'$ che si ottiene verifica i postulati? Quell'elemento $\mathfrak{a}$ avrebbe la buffa proprietà di essere indifferente alle singolettazioni: $\mathfrak{a} = \{\mathfrak{a}\} = \{\{\mathfrak{a}\}\} = \{\{\{\mathfrak{a}\}\}\} = \ldots$ e che se si cercano gli elementi, gli elementi degli elementi &c non si finisce mai: $\mathfrak{a} \ni \mathfrak{a} \ni \mathfrak{a} \ni \mathfrak{a} \ni \ldots$