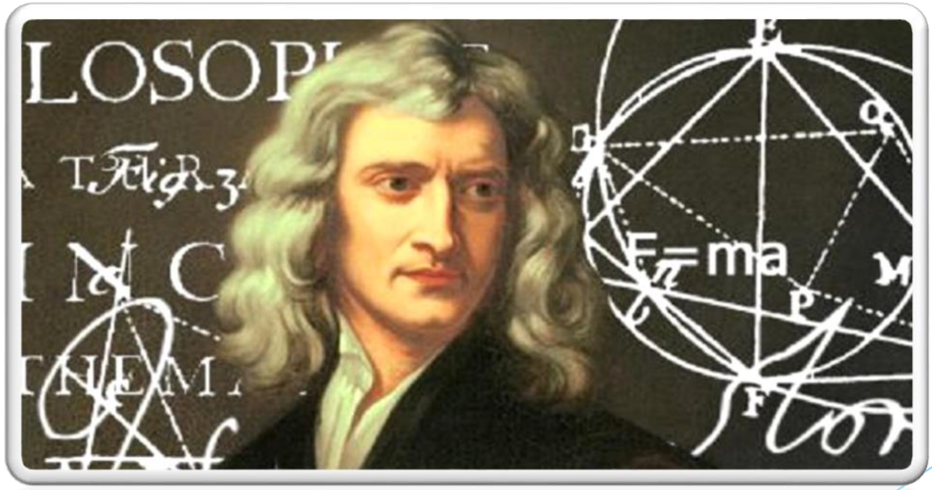
Paolo Bussotti
Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche,
Università di Udine

Piano nazionale lauree scientifiche – Matematica
Workshop di formazione per i docenti di matematica della scuola superiore di secondo grado.

L'uso della storia della matematica in chiave didattica

Euclide



Newton

Enriques

Didattica e storia della matematica (1)

- In ambito didattico, la storia della matematica può svolgere un ruolo concettuale importante: far comprendere come sono nati certi concetti e mostrare che la loro genesi è sempre – in qualche modo – operativa. Ci sono dei problemi da risolvere, i «vecchi» metodi non sono più adeguati per varie ragioni, allora se ne cercano di nuovi. A questo punto, si procede in una duplice direzione:
- 1) ampliamento dei metodi;
- 2) chiarificazione dei concetti e delle procedure a fondamento della nuova disciplina. Il cosiddetto «problema dei fondamenti».
- Nessun ramo della matematica, neppure i più formali, sono nati partendo dagli assiomi o dalle definizioni. Sono tutti nati da problemi non risolti.

Didattica e storia della matematica (2)

- Questa è la situazione riguardo all'evoluzione della matematica. Sul piano didattico, non voglio presentare un quadro eccessivamente semplificato perché il rapporto tra storia e didattica non è dato una volta per tutte. Anche limitandosi a parlare di scuole superiori, ci sono settori della matematica in cui la descrizione del percorso storico è molto utile per comprendere la natura più intima dei concetti, in altri casi questo non è vero.
- *Ciò che, in ogni modo, mi sembra sbagliato è ridurre la matematica a una tecnica*. Guardando qualunque manuale per i licei, si nota che vengono insegnate varie tecniche che comprendono diversi rami dell'algebra (equazioni, disequazioni, esponenziali, logaritmi), la geometria analitica, la trigonometria, altre parti della matematica come statistica e calcolo delle probabilità, fino a giungere all'analisi matematica. Se poi si vanno a guardare gli esercizi proposti sono quasi tutti ripetitivi, ovviamente, più o meno complessi, ma, in genere ripetitivi. Si tratta di applicare la tecnica appresa studiando la teoria, che spesso è presentata in maniera scarna e non sempre accurata.

Didattica e storia della matematica (3)

- Ovviamente, certe conoscenze tecniche sono indispensabili, però devono essere integrate in un contesto in cui si mostra che la tecnica è una parte della matematica, l'altra parte consiste nel saper ragionare sfruttando la tecnica appresa, ma oltre la tecnica stessa.
- Oggi si parla molto di creatività, sviluppo della fantasia, ecc. Purtroppo queste parole rimangono vaghi desiderata e danno luogo spesso all'idea che tali facoltà non necessitino di una educazione, di uno studio, ma siano una sorta di liberazione di qualcosa di istintivo che viene represso.
- Un'educazione matematica impostata in maniera opportuna può far veramente comprendere che cosa sia la creatività diretta a uno scopo e incasellata entro linee guida che vanno imparate e seguite. Oltre le linee guida, si svilupperà la creatività che, comunque, necessita di lunga applicazione, non è istinto.

Didattica e storia della matematica (4)

- Un aspetto utile e divertente è quello dei giochi matematici (esempio i bei libri di Martin Gardner). Qui la creatività è sviluppata e, certo, ci sono dei giochi che richiedono molto tempo e applicazione. Il problema è che nel gioco matematico manca – almeno in modo esplicito - l’idea che esista un insieme di problemi riconducibili (magari non meccanicamente!) a un certo insieme di metodi, a una teoria, appunto.
- Fatte queste considerazioni, mi voglio soffermare su alcuni suggerimenti didattici relativi a due discipline che, invece, possono andare nella direzione indicata: unire creatività e rigore.
- Queste discipline sono la geometria euclidea e l’analisi matematica.

Considerazioni su geometria euclidea e analisi matematica (1)

- Nello sviluppo della didattica questi due rami della matematica hanno avuto evoluzioni divergenti.
- L'analisi è divenuta uno degli elementi fondanti dell'educazione matematica. Cosa più che comprensibile: i concetti dell'analisi infinitesimale entrano in quasi tutti gli altri settori della matematica e in tutti quelli delle scienze esatte, esempio paradigmatico è la fisica. Impossibile, quindi farne a meno.
- La geometria euclidea è stata praticamente abbandonata. Il trattamento è puramente analitico. Accenni alle proprietà sintetiche più elementari alle medie e al biennio del liceo, ma in maniera del tutto inadeguata e molto parziale. Pensate che fino agli anni '50 del XX secolo la geometria euclidea era la base dell'educazione matematica nelle scuole classiche e scientifiche.

Considerazioni su geometria euclidea e analisi matematica (2)

- I motivi per cui la geometria euclidea è stata abbandonata si capiscono bene: all'opposto dell'analisi non trova applicazione in altri rami della matematica, o, le applicazioni possono essere effettuate tramite un trattamento analitico; non trova utilizzazione nelle scienze applicate e, fatto fondamentale, non è riducibile a una mera tecnica. A differenza dei giochi matematici, vi è una teoria – anche molto ricca – della geometria euclidea, ma la conoscenza di tale teoria non garantisce affatto che, dato un problema, si sia in grado di risolverlo. Occorre sempre un atto inventivo. Bisogna fare molti esercizi, di difficoltà crescente – questo è possibile -, fare esperienza. Ciò aumenterà le possibilità di successo, ma non garantirà un esito positivo. Inoltre la parte più interessante della geometria euclidea, quella sulla similitudine, è basata sulla teoria delle proporzioni che, per come la presenta Euclide e la usano lui e gli altri geometri greci, implica una serie di lunghe catene deduttive, veramente complesse da seguire.

Considerazioni su geometria euclidea e analisi matematica (3)

- Leggiamo cosa scrive Enriques, uno che di geometria e di didattica della matematica ne capiva:

> Se si guarda alla *preparazione scientifica* richiesta nel ricercatore, un metodo dovrebbe dirsi tanto più economico quanto più *elementare*. Ma i metodi più elementari, largamente accessibili a chi possegga uno scarso numero di cognizioni, non porgono nei vari casi, criterii direttivi d'ordine generale, onde l'applicazione loro esige ogni volta un piccolo sforzo di genio.
> La risoluzione per vie elementari riesce dunque la più economica soltanto per riguardo al caso singolo; *rispetto all'insieme* vale la pena di affrontare la fatica di una maggiore preparazione scientifica per ottenere qualche guida d'ordine generale e non incontrare ad ogni passo una nuova difficoltà[18].

- Enriques, *Osservazioni sui problemi geometrici*, in Enriques, 1924-27, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, 1983, parte II, pp. 575-596. Citazione, p. 586.

Considerazioni su geometria euclidea e analisi matematica (4)

- Vale dunque la pena di reintrodurre una disciplina che sviluppa «lampi di genio». Oltre tutto:
- La geometria euclidea è particolarmente adatta allo scopo perché:
- 1) ha a che fare con problemi che, in genere, si visualizzano in figure, così che è legata anche ai nostri organi percettivi;
- 2) tuttavia la soluzione dei problemi – di cui l’intuizione visiva può essere strumento euristico importante – deve essere rigorosa e basarsi su assiomi e verità già dimostrate.
- 3) I problemi di geometria euclidea sono vari e sono ordinabili in una lunga serie che va da questioni semplici a problemi moto complessi, quindi, anche sotto questo punto di vista, si tratta di una disciplina adatta all’insegnamento.

Considerazioni su geometria euclidea e analisi matematica (5)

- La geometria si presenta negli *Elementi* di Euclide (IV-III A.C.) già in veste molto formalizzata, con definizioni, assiomi, teoremi e problemi. Di certo gli *Elementi* sono un testo che è sintesi e superamento di una disciplina che esisteva già in Grecia da molto tempo, ma la cui storia è assai lacunosa. Quindi, in prospettiva didattica, quello che mi sembra utile è rivisitare le parti più importanti degli *Elementi* e ripercorrere le tappe salienti della storia della didattica della geometria dall'unificazione d'Italia ad oggi più che tracciare lo sviluppo storico della geometria euclidea. Nella terza lezione, cercherò di entrare in alcuni dettagli didattici (come presentare la teoria, gli esercizi, collegamenti con la geometria analitica).

Considerazioni su geometria euclidea e analisi matematica (6)

- Per l’analisi matematica, la situazione è opposta: la storia di come nasce il calcolo è ben nota. Il modo in cui furono introdotti i concetti fondamentali è molto formativo e può offrire un’interessante chiave didattica da affiancare – non certo da sostituire – a un trattamento più formalizzato dei concetti di funzione, limite, derivata e integrale.
- Qui la storia è direttamente utile per la didattica. Quindi ne traccerò gli elementi essenziali, tornando sulle possibili applicazioni didattiche nella prossima lezione.
- Dunque vedremo: 1) concetti essenziali degli *Elementi* euclidei; 2) momenti di storia della didattica della geometria euclidea; 3) accenno ai problemi che hanno portato alla nascita dell’analisi matematica.

Struttura degli *Elementi* di Euclide (1)

- Primo libro: si apre con le *Definizioni*. Quella delle *Definizioni* non è una sezione importante. Seguono i cinque *Postulati*. Questi sono veramente fondamentali Successivamente sono presentati gli elementi base della geometria piana. Geometria assoluta, teoria dell'equivalenza. Si conclude col teorema di Pitagora.
- Secondo libro. Algebra geometrica.
- Terzo libro. Fondamentale. 37 proposizioni. Riguarda il cerchio. Sono analizzate le proprietà dei diametri e delle altre corde. Posizioni reciproche di rette e cerchi e di cerchi e cerchi. Intersezioni di cerchi. Problemi di tangenza tra cerchi. Proprietà estremali dei diametri. Angoli al centro e alla circonferenza. Loro relazioni. Teorema secondo cui l'angolo in un semicerchio è retto (31). Costruzione dell'arco capace di un certo angolo (33). Teorema della tangente e della secante (36, una delle più importanti proposizioni di tutti gli *Elementi* perché trova applicazione in molti problemi e teoremi).

Struttura degli *Elementi* di Euclide (2)

- Quarto libro: 16 proposizioni. Iscrizione e circoscrizione dei poligoni nel cerchio: triangolo equilatero, triangolo qualsiasi, quadrato, pentagono regolare, esagono regolare, pentadecagono regolare.
- Col libro quarto termina la teoria dell'equivalenza e problemi connessi, la parte più elementare della geometria euclidea.
- Quinto libro: non è un libro geometrico. Euclide introduce la teoria delle proporzioni. Tale teoria è alla base dei più difficili e interessanti teoremi di geometria euclidea, in cui è fondamentale il concetto di similitudine, basato sulla nozione di proporzionalità. Non è un caso che Felix Klein identificò le trasformazioni della geometria euclidea come il gruppo delle similitudini. Ci concentreremo essenzialmente sulla definizione di proporzione data da Euclide. È un definizione molto avanzata. Si tratta di quel tipo di definizioni dette «per astrazione». Altri autori, tra i quali anche Galileo, hanno cercato una definizione alternativa e più diretta, ma quella di Euclide è la più rigorosa e generale. Nelle 25 proposizioni del libro sono date le proprietà delle proposizioni (sommando, sottraendo, componendo, scomponendo, calcolo *ex aequo*, proposizione «perturbata»).

Struttura degli *Elementi* di Euclide (3)

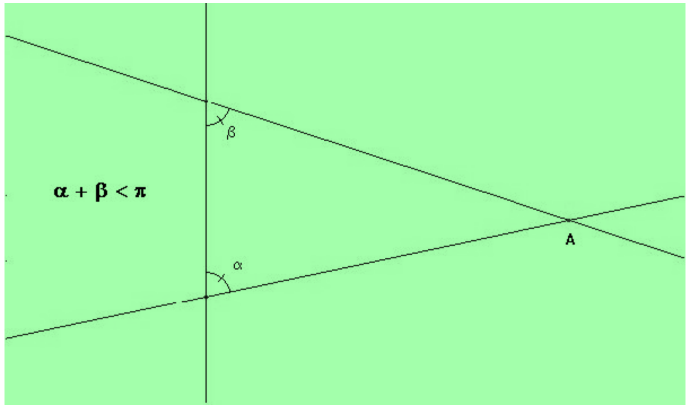
- Sesto libro: 33 proposizioni. Forse il libro più importante di tutti gli *Elementi*. Espone la teoria della similitudine. Si ha: definizione di figure rettilinee simili, criteri di similitudine dei triangoli, cosiddetti «teoremi di Euclide», trovare terza proporzionale, quarta proporzionale e media proporzionale tra due grandezze, in una proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi, costruzione di figure simili e similmente poste (omotetiche), decomposizione in triangoli simili di figure poligonali simili, teoria della similitudine per i parallelogrammi, costruzione di un poligono simile ad uno dato ed equivalente a un altro, criteri estremali per parallelogrammi, divisione in estrema e media regione (sezione aurea).
- Settimo, ottavo, nono libro: rispettivamente di 39, 27 e 36 proposizioni. Sono i libri aritmetici. Livello inferiore rispetto a quelli geometrici. Interessanti: 1) infinità dei numeri primi (IX, 20); 2) proposizione sui numeri perfetti (IX, 36).
- Decimo libro: 115 proposizioni. È di gran lunga il libro più complesso degli *Elementi*. Euclide vi tratta delle grandezze incommensurabili.

Struttura degli *Elementi* di Euclide (4)

- Undicesimo libro: Il primo dei tre libri di geometria solida. 39 proposizioni. Intersezioni retta-piano; condizioni di perpendicolarità retta-piano; rapporto tra rette parallele e perpendicolari a un piano; angoli solidi; teoremi sul volume di parallelepipedi; teoremi sui triedri.
- Dodicesimo libro: 18 proposizioni. Le prime due sono di geometria piana. La seconda è l'importante teorema che i cerchi stanno come i quadrati dei diametri. Esaustione. Volume della piramide; rapporto tra volume della piramide e volume del prisma. Proposizione 10: dati un cono e un cilindro di base equivalente e uguale altezza, il volume del cono è 1/3 di quello del cilindro. Seguono altre proposizioni sui rapporti tra volume del cono e del cilindro. Rapporto tra volume della sfera e suo diametro (18).
- Tredicesimo libro: inscrizione dei poliedri convessi regolari nella sfera.
- Ci focalizzeremo su: 1) assiomi; 2) concetto di area; 3) definizione di proporzione.

Gli assiomi (1)

- Risulti postulato che:
- 1) si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto;
- 2) una retta finita (un segmento) possa prolungarsi continuamente in linea retta;
- 3) si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e qualsiasi distanza;
- 4) tutti gli angoli retti sono uguali;
- 5) che se una retta venendo a cadere tra altre due forma angoli interni e dalla stessa (coniugati) parte minori di due retti (tali che la somma sia minore), le due rette, prolungate illimitatamente, si incontreranno dalla parte in cui la somma degli angoli è minore di due retti.



Gli assiomi (2)

- I primi tre assiomi ci dicono che la geometria euclidea è la geometria della riga e del compasso. Nessun altro strumento: dati due punti, si può tracciare il segmento che li unisce; si può prolungare questo segmento quanto si vuole (per retta, Euclide intende sempre un segmento, mai una retta infinita, a meno che non lo specifichi) e si può disegnare un cerchio, ovviamente con un compasso. Notate che i puristi disquisiscono se il compasso possa essere usato anche come trasportatore di segmenti uguali o solo come strumento atto a descrivere un cerchio. Dunque, sono ammesse solo le costruzioni fatte con riga e compasso: non sono utilizzabili la riga graduata o la squadra. Risolvere un problema, in questo contesto, significa risolverlo con riga e compasso.
- Riflessione metodologica utile in chiave didattica. Si è creato il mondo della geometria euclidea. Per giungere a dimostrare teoremi di questo universo, occorre usare solo gli strumenti euclidei. Questa è la logica e lo sviluppo interno di una disciplina che ne segna la natura intrinseca. Ovviamente, si possono fare altre scelte, per esempio consentire l’uso di strumenti più ricchi – come le coniche – per dimostrare teoremi o fare costruzione che, nell’enunciazione, sembrano richiedere solo riga e compasso.

Gli assiomi (3)

- Esempi: duplicare un cubo di spigolo dato. Di per sé il cubo è costruibile con riga e compasso, ma non se si pretende di costruire lo specifico cubo che abbia spigolo doppio di uno dato. Costruire un quadrato equivalente a un cerchio. Separatamente cerchio e quadrato sono banalmente costruibili con riga e compasso, ma non se si pone la condizione specifica. Quindi è molto educativo far passare l'idea che la matematica è una disciplina relativa ai mezzi costruttivi che si decide di usare. Non si tratta, cioè, solo di una sorta di «teoremificio», ma di una attenta analisi dei limiti degli strumenti concettuali che ci si impone di usare. Cosa posso fare con «questo»? Problema della vita quotidiana, e anche della matematica. Ovviamente, uno può decidere di usare tutta la matematica, ma deve essere cosciente che si tratta, comunque, di una scelta. Ecco perché i grandi matematici hanno spesso dato dimostrazioni diverse dello stesso teorema.

Gli assiomi (4)

- Il quarto postulato sembra banale, invece è importante. Credo sia interpretabile in questo modo: il piano euclidea non si deforma. Se io trasporto un angolo in una qualunque regione del piano, l'angolo non si deforma, qualunque sia la posizione dei suoi lati. Questa è una proprietà che è alla base del trasporto rigido delle figure. Una costruzione di pongo trasportata su una piastra a differente temperatura, cambierebbe di forma, non così le figure euclidee. La forma è un invariante della geometria euclidea, indipendentemente dalle dimensioni delle figure.
- Ogni sistema di assiomi conserva qualcosa. Può essere interpretato anche come regola di trasformazione con invarianti. Senza invarianti non ci sarebbe né matematica né fisica. Le trasformazioni euclidee più generali sono le similitudini che conservano la forma (rapporti tra segmenti e angoli). Per, esempio le trasformazioni proiettive non conservano la forma ma solo l'incidenza.
- Qui si capisce bene la natura delle trasformazioni che nei manuali ho visto introdotte in termini algebrico-analitici, il che va benissimo, ma occorre anche capirne la valenza geometrica.

Gli assiomi (5)

- Il quinto è il famoso postulato delle parallele. Euclide definisce, infatti (def. XXIII) parallele due rette che non si incontrano tra loro da nessuna delle due parti. Allora postulare
- che se una retta venendo a cadere tra altre due forma angoli interni e dalla stessa (coniugati) parte minori di due retti (tali che la somma sia minore), le due rette, prolungate illimitatamente, si incontreranno dalla parte in cui la somma degli angoli è minore di due retti
- equivale, per banale contrapposizione, a postulare che «se due rette non si incontrano da nessuna delle due parti (cioè sono parallele), allora una retta che viene a cadere tra di esse forma angoli coniugati uguali a due retti», esprime, cioè, una condizione di parallelismo.

Gli assiomi (6)

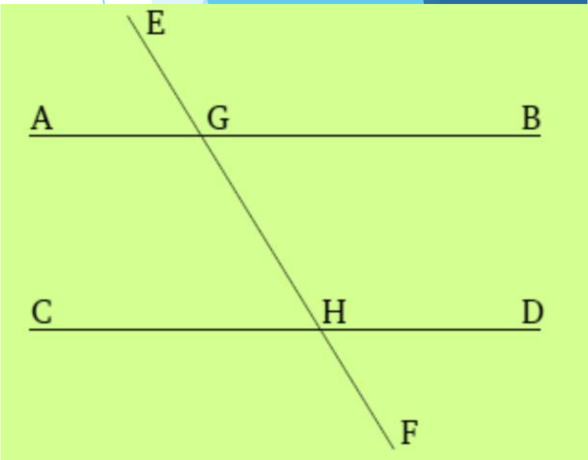
- Una divisione concettuale dei postulati in gruppi potrebbe essere questa: gli ax 1-3 definiscono le costruzioni elementari eseguibili; l'ax. 4 stabilisce una proprietà di uniformità del piano euclideo; l'ax. 5 stabilisce relazioni angolari relative all'incidenza di rette. Questa suddivisione va benissimo.
- Tuttavia, ne è possibile anche un'altra: gli ax. 1,2,4 riguardano proprietà al finito del piano euclideo, mentre il 3 e 5 concernono il comportamento all'infinito delle rette (prolungabilità e parallelismo). È una storia ben nota, anche se molto interessante, quella secondo cui fin dall'antichità si cercò di dimostrare il quinto postulato come teorema deducibile dagli altri quattro perché il carattere infinitario e la complessità concettuale sembravano collidere con la semplicità degli altri quattro. Già Proclo provò a mostrarne l'indipendenza. La storia ci ha insegnato che Euclide, a cui è probabilmente dovuta l'intera teoria delle parallele, fu assai più saggio dei suoi successori, fino a Gauss.
- Il postulato 3 sembra, per così dire, innocuo, invece non lo è, come qualunque altra proposizione concernente l'infinito, anche nella sua forma potenziale. Riemann ha, infatti, trovato una geometria, perfettamente coerente con i postulati 1,2,4, ma in cui la retta ha lunghezza finita.

Gli assiomi (7)

- Fino alla proposizione 29 del primo libro l’ax. delle parallele non è usato. Concetto di geometria assoluta.
- Tra le prime proposizioni sono del massimo interesse la I, 16 e la I, 17, ove Euclide dimostra rispettivamente che in ogni triangolo l’angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti e che in ogni triangolo la somma di due angoli è minore di due retti. C’è da chiedersi: perché Euclide dimostra questi due teoremi quando poi dimostrerà che l’angolo esterno è uguale alla somma degli interni non adiacenti e che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti, senza ricorrere a questi due teoremi. Che ne dite? Quali riflessioni didattiche induce questa scelta di Euclide?

Parallelismo e concetto di area (1)

- Con le proposizioni 27, 28, termina idealmente la prima parte del libro, quella ove non è usato il postulato delle parallele. Le due proposizioni. rappresentano il cosiddetto teorema diretto delle parallele:
- I, 27: «Se una retta che venga a cadere tra altre due forma gli angoli interni uguali tra loro, le due rette sono parallele».
- I, 28: «Se una retta cade tra due rette e forma angoli corrispondenti uguali o coniugati interni la cui somma sia uguale a due angoli retti, allora le rette sono parallele».
- Vediamo, dunque, la proposizione 29, con cui comincia la parte propriamente euclidea (e non «assoluta») della geometria. È il famoso «teorema inverso delle parallele».
- «Una retta che cada su due rette parallele forma gli angoli alterni uguali tra loro, l’angolo esterno uguale all’angolo interno e opposto ed angoli interni dalla stessa parte la cui somma è uguale a due retti». In pratica non è che la riproposizione del quinto postulato.

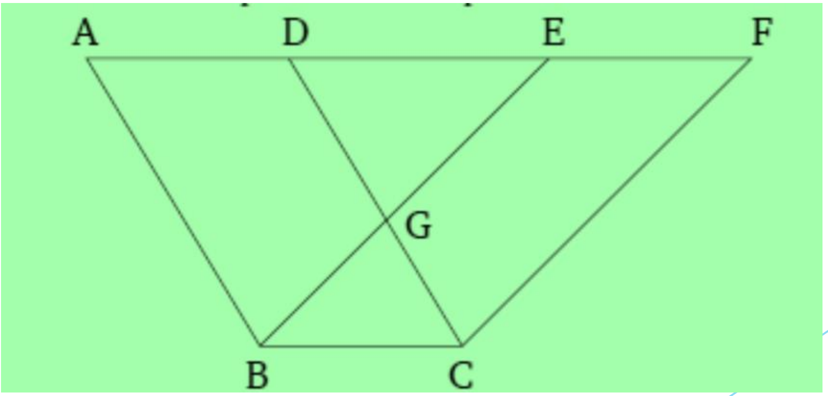


Parallelismo e concetto di area (2)

- Dopi i teoremi sulle parallele segue la teoria dei parallelogrammi e delle aree dei parallelogrammi e dei rettangoli. Il percorso conclusivo di questo breve nucleo di proposizioni è rappresentato dalle proposizioni I,37-I,41, che in pratica, determinano in maniera univoca l'area del triangolo come funzione esclusivamente della base e dell'altezza.
- I, 37: «Triangoli che siano posti sulla stessa base e tra le stesse parallele sono equivalenti».
- I, 38: «Triangoli che siano posti su basi uguali e tra le stesse parallele sono equivalenti». Le reciproche:
- I,39: «Triangoli equivalenti che siano posti sulla stessa base, sono compresi tra le stesse parallele [supponendo che i loro vertici siano dalla stessa parte rispetto alla base]».
- I, 40: «Triangoli equivalenti che siano posti su basi uguali sono compresi tra le stesse parallele. [Stessa ipotesi che in I, 39]».
- A fondamento di queste proposizioni, ve ne è una che identifica l'area del parallelogramma come funzione esclusiva della base e dell'altezza, la I,36.

Parallelismo e concetto di area (3)

- I, 36: «Parallelogrammi che siano posti sulla stessa base e tra le stesse parallele sono equivalenti».
- Si ha *AD*=*BC* ed *EF*=*BC* (dimostrato in I, 34, usando il quinto postulato). Ne segue *AD*=*EF*. Aggiungiamo ad entrambi *DE*. Allora *AE*=*DF*. Vale anche *AB*=*DC*. Tra gli angoli vale *FDC*=*EAB* (I,29, cioè il teorema inverso delle parallele), siccome *EB*=*FC*, il triangolo *EAB* uguale al triangolo *DFC* (I,4). Sottraiamo il triangolo *DGE*. Il trapezio *ABGD* che rimane del primo sarà uguale al trapezio *EGCF*. Si aggiunga ai due trapezi il triangolo *GBC*. Il parallelogrammo *ABDC* è, dunque, equivalente a *EBCF*.



Parallelismo e concetto di area (4)

- La cosa più interessante da osservare è che il concetto di equivalenza di aree e, in sostanza, di area stessa è legato al postulato delle parallele. In un piano in cui tale postulato non valesse, andrebbe ridefinito il concetto di superficie e il calcolo delle superfici sarebbe certo diverso. Quindi, elementi che sembrano in apparenza appartenere a due proprietà molto diverse del piano, come quelle inerenti al parallelismo e alle aree, sono, in realtà strettamente collegati. Non c'è niente di naturale o scontato nel calcolare l'area di un parallelogramma geometrico come base per altezza, dipende da un postulato.
- Ma c'è di più: nelle Definizioni, Euclide definisce superficie come «ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza» (def. V) e «Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su di essa».
- In realtà sono vuoti verbalismi. Il vero concetto euclideo di superficie è enucleato nei teoremi sui parallelogrammi e sui triangoli che abbiamo visto. Si tratta di un concetto «definito per astrazione», cioè si definisce il concetto, mostrando quando due entità sono uguali rispetto a quel concetto. Siccome tutte le aree poligonali sono triangolabili e siccome le aree di figure curvilinee si calcolano riferendosi a aree poligonali, il concetto di superficie è ben definito, ma lo è in virtù di questo pacchetto di teoremi, non certo in base alla definizione esplicita data da Euclide.

Il concetto euclideo di proporzione (1)

- All’inizio del quinto libro, Euclide fornisce 18 definizioni. Ci concentreremo sulla IV, V, e VI e, soprattutto, sulla fondamentale V definizione.
- IV Def.: «Si dice che hanno tra loro rapporto o ragione le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente».
- Può sembrare una definizione banale perché, formalizzata, significa che date due grandezze A e B con $A>B$ esiste un numero n tale che $nB>A$. Invece non lo è affatto. Euclide ha trattato di grandezze che non godono di questa proprietà e sono quelle tali che una è infinitesima rispetto all’altra. Caso dell’angolo di contingenza. Bene, in pratica Euclide ha dimostrato che se α è l’angolo di contingenza e β un qualsiasi angolo rettilineo, non esiste alcun intero n tale che $n\alpha>\beta$. Quindi l’angolo di contingenza e gli angoli rettilinei non hanno rapporto. In sostanza questa proprietà è un caratteristica strutturale del continuo «ordinario», quello rappresentato dai numeri reali e assunto parlando di rette, piani, ecc.

Il concetto euclideo di proporzione (2)

- Normalmente questa proprietà delle grandezze viene chiamata assioma di Archimede perché il grande siracusano la pose esplicitamente in termini postulatori. In Euclide è, tuttavia, già presente il problema e lui lo risolve con una definizione. Dedekind dimostrò che, data la sua definizione di continuità (logicamente equivalente a quella di Cantor), ne segue l'ax. di Archimede, quindi se non vale l'ax. di Archimede il continuo non può avere la sua struttura ordinaria. Si chiama, in questo caso, iperdenso ed esistono infinitesimi. Giuseppe Veronese nei suoi *Fondamenti di geometria* (1897), ideò una geometria non archimedea. Ne parla diffusamente anche Hilbert nelle celeberrime *Grundlagen der Geometrie* (1899).
- Estensione del confronto a grandezze irrazionali.

Il concetto euclideo di proporzione (3)

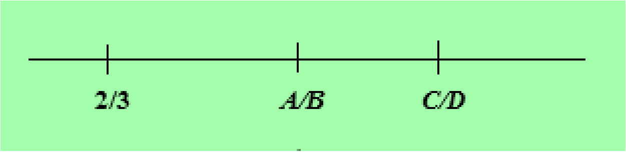
V Def: «Si dice che quattro grandezze sono nello stesso rapporto, la prima rispetto alla seconda e la terza rispetto alla quarta, quando equimultipli della prima e della terza, presi secondo un multiplo qualsiasi, ed equimultipli della seconda e della quarta, presi secondo un multiplo qualsiasi, sono gli uni rispetto agli altri o tutti e due maggiori, o tutti e due uguali o tutti e due minori, se considerati nell'ordine rispettivo».

Siano A,B,C,D quattro grandezze e siano mA e mC gli equimultipli della prima e della terza; nB ed nD gli equimultipli della seconda e della quarta. Allora Euclide definisce le quattro grandezze avere lo stesso rapporto se e solo se, a seconda che mA sia maggiore, uguale o minore di nB, risulta anche mC maggiore, uguale o minore di nD.

È fondamentale sottolineare che questa definizione è assolutamente generale, deve, cioè, valere per grandezze commensurabili ed incommensurabili. Cerchiamo di comprenderne un po' meglio la natura (*Elementi*, note de Frajese, pp. 300-302).

Il concetto euclideo di proporzione (4)

- Riprendiamo le nostre quattro grandezze *A*,*B*,*C*,*D*. Sia m=3 ed n=2. Cosa significa che $3A > 2B \rightarrow 3C > 2D$? Ciò vuol dire che se A>2B/3, allora C>2D/3. Cioè: 2/3 è un valore approssimato per difetto dei due rapporti. Ma questo non garantisce affatto che i due rapporti siano uguali. Basta guardare la figura per convincersene.



Occorre, allora, che la totalità dei valori approssimati per difetto (lo stesso vale, ovviamente, per quelli approssimati per eccesso) dell'uno dei due rapporti sia costituta da valori approssimati per difetto dell'altro rapporto. Pertanto l'infinito (non voglio necessariamente dire nella sua forma attuale, ma almeno in quella potenziale) entra in gioco nella definizione euclidea. Pur non parlando di numeri, ma di grandezze, questa definizione ha forti concordanze con quella che Dedekind dette di numero reale.

Il concetto euclideo di proporzione (5)

- Euclide fornisce dunque la definizione di «avere lo stesso rapporto», ma, in effetti, si tratta della vera definizione di rapporto stesso. Infatti, la def. III suona: «Rapporto tra due grandezze omogenee è un certo modo di comportarsi rispetto alla quantità». Ovviamente questa non è una vera definizione, ma solo un barlume di un'idea. La effettiva definizione di rapporto viene, quindi, data definendo prima l'uguaglianza di rapporti. Un rapporto sarà allora la classe di tutte le coppie di grandezze che hanno lo stesso rapporto. Ben lungi dall'essere circolare questa definizione è molto profonda e generale. Se, prendiamo, per esempio, la classe $(1,2);(\sqrt{2},2\sqrt{2});(2,4),\ldots$ di coppie di grandezze e si applica la definizione di Euclide, si vede che hanno lo stesso rapporto, quindi, quella classe di equivalenza definisce un rapporto, noi diciamo ½, ma potrebbe essere 2/4, ecc. Poi è ovvio che, operativamente, ci vorranno mezzi più semplici che non la definizione. Però, concettualmente la situazione è questa.
- VI Def.: «Grandezze che hanno lo stesso rapporto si chiamano proporzionali».

Il concetto euclideo di proporzione (6)

- Quando, come fa Euclide con la def. di rapporto, si definisce un concetto indicando quando due grandezze sono uguali rispetto a quel concetto – si enuclea, cioè, una classe di equivalenza -, si dice che la definizione è data «per astrazione». Ovviamente, occorre poi chiarire quando due grandezze non sono uguali rispetto a quel concetto. Euclide lo fa nella def. VII:
- «Quando, per equimultipli, il multiplo della prima grandezza è maggiore del multiplo della seconda, mentre il multiplo della terza è non maggiore del multiplo della quarta, allora la prima grandezza ha, rispetto alla seconda, rapporto maggiore che la terza rispetto alla quarta».
- Cioè, se $mA>nB$, ma $mC \leq nD$, allora $A:B>C:D$ (chiaramente, questo basta che avvenga per una coppia di valori m, n).
- Pensiamo alla definizione di cardinalità di un insieme data da Cantor:
- «Due insiemi hanno la stessa cardinalità se possono essere messi in corrispondenza biunivoca»

Il concetto euclideo di proporzione (7)

- Nel sesto libro viene definito il concetto di «figure simili»
- «Sono figure rettilinee simili quante abbiano gli angoli, ad uno ad uno, rispettivamente *uguali*, e *proporzionali* i lati che comprendono angoli uguali».
- Felix Klein, nel suo celebre Programma di Erlangen, 1872, mostrerà che le trasformazioni del tipo più generale di cui si occupa la geometria euclidea – le similitudini – formano un gruppo. Dunque la geometria euclidea può essere definita come il gruppo delle similitudini o delle figure invarianti per similitudine.
- Che significa questo? Che l'elemento fondante della geometria euclidea è la «forma». Ogni geometria è caratterizzata da ciò che conservano le sue trasformazioni e le trasformazioni euclidee mantengono la forma.

Accenno alla storia dell’insegnamento della geometria fino al XX (1)

- Dalla fine dell’epoca ellenistico alessandrina (V sec. D.C.), la geometria, come gran parte della scienza, visse un periodo di crisi.
- In Europa, i grandi e profondi risultati di Archimede e Apollonio furono o perduti e impossibili da comprendere. La traduzione in latino delle grandi opere della geometria greca vive un momento importante nel XIII secolo con la traduzione delle opere di Archimede. Con la fine del XV secolo le cose cambiano e si assiste a una rinascita di interesse per la geometria. Invero la conoscenza di Euclide non andò mai del tutto perduta, ma pensate che gran parte dell’insegnamento della geometria era limitato ai risultati più semplici del primo libro. Col XVI secolo, si cerca di riacquisire la sapienza greca, che diventerà una delle basi della rivoluzione scientifica del secolo successivo. Progressivamente, in tutta Europa, si torna ad insegnare Euclide riferendosi direttamente al testo del grande geometra. Tuttavia, soprattutto in Francia, si comincia a interrogarsi sul modo migliore di insegnare geometria. Cartesio nel 1637 aveva pubblicato la sua *Géométrie*, con l’introduzione della geometria analitica. Ma l’insegnamento di questa disciplina nelle scuole risale a epoca molto tarda. Sistematicamente a partire dal ‘900.

Accenno alla storia dell'insegnamento della geometria in Italia dal XIX secolo (2)

- Quindi il dibattito verteva sul modo migliore di insegnare geometria sintetica. Euclide era difficile: nonostante le apparenze era molto astratto e non faceva riferimento ad alcuna esperienza quotidiana, l'assiomatizzazione è un processo complesso, la teoria delle proporzioni crea moltissimi problemi nell'insegnamento. Che fare allora? Una prima proposta venne da un grande matematico e fisico francese: Alexis Clairault (1713-1765) che scrisse, nel 1741, una manuale che ebbe molta fortuna e che fu tradotto in diverse lingue tra cui l'italiano nel 1751, 1771: gli *Eléments de Géométrie*.
- Il contenuto del testo è quello di Euclide, ma il metodo è completamente diverso. Scrive Clairault come introduzione al suo testo e parole seguenti. Le riporto perché sono paradigmatiche di molte delle critiche successive fatte agli *Elementi* di Euclide come libro di testo da adottare nelle scuole.

Accenno alla storia dell'insegnamento della geometria fino al XX secolo (3)

«Quantunque la geometria sia per se medesima astratta, conviene nondimeno confessare, che le difficoltà che incontrano coloro che cominciano ad applicarvisi, provengono il più delle volte dalla maniera con cui essa viene insegnata nei libri elementari. Si suol cominciare con un gran numero di definizioni, di postulati, di assiomi e di princìpi preliminari, i quali non promettono altro al lettore che cose molto aride e noiose. Le proposizioni che vengono dopo non aggirandosi sopra argomenti interessanti, ed essendo per altra parte difficili a concepirsi, ne segue comunemente, che i

principianti si stancano o si disgustano prima di avere alcuna idea distinta di ciò che si vuole loro insegnare. Per temperare l'aridità naturale dello studio della geometria, alcuni Autori hanno creduto che potesse bastare di esporre dopo ciascuna proposizione essenziale l'uso che può farsene in pratica: così facendo dimostrano essi bensì l'utilità della geometria, ma senza agevolarne di molto lo studio. Poiché ciascuna proposizione precedendo all'indicazione dell'uso che essa può avere, la mente perviene solo alle idee sensibili dopo aver incontrato la fatica di concepire le idee astratte.

Accenno alla storia dell'insegnamento della geometria fino al XX secolo (4)

Alcune riflessioni che io ho fatto sull'origine della geometria mi hanno fatto sperare di scansare quelli inconvenienti, e di rendere le verità geometriche più interessanti e più intelligibili ai principianti. Io ho considerato che questa scienza, come tutte le altre deve essersi formata per gradi; che verosimilmente la necessità è stata quella che ha fatto fare in essa i primi passi, e che questi primi passi non possono essere fuori dalla portata dei principianti; poiché sono stati fatti appunto dai principianti. Preoccupato da quell'idea, mi sono proposto di trovare quel che può aver dato origine alla geometria; ed ho cercato di spiegarne i princìpi con un metodo così naturale, come quello che si suppone essere stato dei primi inventori; in modo da evitare tutti i falsi tentativi che essi hanno necessariamente dovuto fare. La misura dei terreni mi è parsa la cosa più giusta per far riscoprire le prime proposizioni della geometria; tale è in effetti l'origine di questa scienza; poiché geometria significa misura dei terreni». ([Clairaut A.C., (1771)])

Accenno alla storia dell’insegnamento della geometria fino al XX secolo (5)

- Clairault sovverte il metodo euclideo: si propone di costruire gli oggetti e le conoscenze della geometria elementare a partire dai problemi riguardanti la misura dei terreni; il matematico francese sostiene che la geometria si è formata per gradi e, per questo motivo, va insegnata secondo un metodo naturale che segua le orme dei primi inventori pur evitando i loro eventuali passi falsi. L'insegnamento della geometria deve rispettare la gradualità con cui le conoscenze geometriche si sono sviluppate, anche a costo di rinunciare al rigoroso ordine euclideo. Così Clairaut adotta un'esposizione per problemi della geometria rispetto alla sistemazione rigidamente deduttiva degli *Elementi* euclidei.
- Nel testo di Clairault non ci sono assiomi, le definizioni sono date in maniera molto intuitiva, anche gli elementi più complessi sono introdotti con riferimento all’esperienza diretta. Per dare un’idea, la prima parte si intitola «De’ mezzi che si devono naturalmente impiegare per avere la misura de’ terreni»

Accenno alla storia dell'insegnamento della geometria fino al XX secolo (6)

QUEL, che pare, che debbano aver dovuto miſurare ſul principio, ſono le lunghezze, e le diſtanze.

I.

Per miſurare una lunghezza qualunque, la Geometria naturale ci ſuggeriſce ſubito queſto eſpediente;

di

di paragonar la lunghezza d'una miſura conoſciuta a quella della lunghezza, che ſi vuol conoſcere.

II.

La linea retta è la linea più corta, che ſi poſſa tirare da un punto all'altro, e conſeguentemente la miſura della diſtanza tra due punti.

Quanto alla diſtanza, ſi vede, che per miſurare quella, che paſſa tra due punti, biſogna tirare una linea retta dall'uno all'altro punto, e sù queſta linea riportare la miſura conoſciuta: perchè tutte le altre linee facendo neceſſariamente un deviamento più ò meno grande, ſono più lunghe, che la linea retta, la qual non fa deviamento alcuno.

Accenno alla storia dell’insegnamento della geometria fino al XX secolo (6)

- Non c’è alcun accenno a problemi come quelli del quinto postulato, non si fa distinzione tra geometria assoluta e geometria «euclidea». Le proporzioni sono introdotte senza alcun riferimento teorico, ma definendole tramite la regola dell’equivalenza tra prodotto dei medi e degli estremi e si giunge a questa regola considerando due rettangoli che abbiano area uguale e una delle dimensioni diversa dalla dimensione corrispondente. Il concetto di «stare come» non è, in realtà, definito.

Se di quattro linee la prima è alla ſeconda, come la terza alla quarta, il rettangolo formato per la prima, e per la quarta ſarà uguale al formato dalla ſeconda, e dalla terza.

Quattro quantità, delle quali la prima ſia alla ſeconda, come la terza alla quarta, ſi dicono formare una proporzione.

Accenno alla storia dell’insegnamento della geometria fino al XX secolo (7)

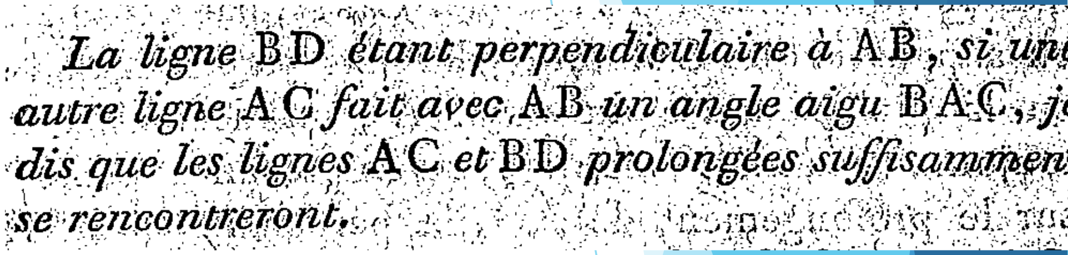
- Nella seconda metà del XVIII secolo furono presentati diversi trattati di geometria euclidea a scopo didattico. La situazione, però, non era allegra: questi testi avevano due difetti principali: il primo, e forse il più grave era che gli autori, seguendo in questo anche un problema della ricerca del tempo, erano poco disposti ad ammettere l’assioma delle parallele come proposizione indipendente e, quindi, spesso formulavano asserti equivalenti e cercavano di dedurre da questo l’assioma. Se la cosa è fatta coscientemente, non c’è nulla di male: è un’impostazione diversa da quella euclidea, ma andrebbe bene. Il problema era che venivano introdotte nozioni come quella di equidistanza tra rette che crea più problemi di quanti ne risolva perché, anzitutto l’esistenza di rette che si mantengono equidistanti è esattamente equivalente al quinto postulato, inoltre introduceva la nozione di distanza che non è affatto banale. Quindi, questi autori pensavano di offrire un trattamento più «fondamentale» di quello euclideo, quando, in realtà cadevano spesso in gravi errori logici, introducendo surrettiziamente nozioni non definite e per niente scontate.

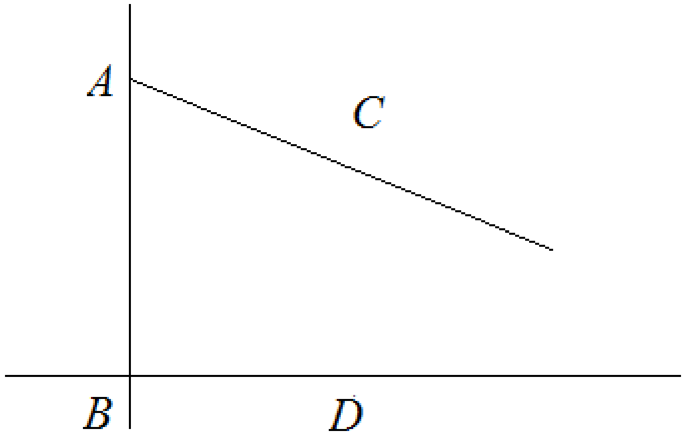
Accenno alla storia dell'insegnamento della geometria fino al XX secolo (8)

- Il secondo problema riguardava l'introduzione del concetto di proporzione: spesso era velato da problemi logici.
- Il periodo della rivoluzione francese e quello napoleonico furono un'epoca di riflessione anche sul piano della didattica della matematica. E' noto che La Scuola Normale a Parigi e il celebre Istituto Politecnico furono fondati in quest'epoca. Ciò ebbe un profonda ripercussione anche sul piano della manualistica: nel 1794 furono pubblicati gli *Eléments de Géométrie* di Adrien Marie Legendre. Si trattò di un testo che dominò la scena della didattica della geometria nella prima metà dell'Ottocento. Fu tradotto in tutte le più importanti lingue (anche in italiano), vide diverse ristampe e, soprattutto dette avvio alla moda del «legendrismo», fenomeno che si diffuse in tutta Europa.

Accenno alla storia dell'insegnamento della geometria fino al XX secolo (9)

- Il testo di Legendre ha come *caratteristica* fondamentale un forte uso dell'aritmetica e dell'algebra che sostituisce, in molti casi, il ragionamento costruttivo euclideo. Non si tratta propriamente di un approccio analitico, ma di algebra applicata alla geometria. In questo niente di strano.
- Il difetto principale è la presentazione della teoria delle parallele. Legendre è convinto di aver dimostrato il quinto postulato e non comprende che, in realtà, si muove in un vicolo cieco. A questo proposito, il teorema che Legendre crede di aver dimostrato è il seguente:
- «La retta *BD*, essendo perpendicolare ad *AB*, se un'altra retta *AC* forma con *AB* un angolo acuto *BAC*, dico che le rette *AC* e *BD* prolungate sufficientemente si incontrano».
- Nella dimostrazione dà per scontato che non possano esistere rette asintotiche. Ma questo è proprio il cuore del quinto postulato.


La ligne BD *étant perpendiculaire à* AB, *si un* *autre ligne* AC *fait avec* AB *un angle aigu* BAC, *j* *dis que les lignes* AC *et* BD *prolongées suffisammen* *se rencontreront.*



Accenno alla storia dell'insegnamento della geometria fino al XX secolo (10)

- Il trattamento delle proporzioni è particolarmente insoddisfacente sul piano logico, anche se è intuitivo. Infatti, Legendre si libera dai problemi asserendo, nella prefazione, che dà per scontata nel lettore la conoscenza della teoria delle proporzioni che si trova nei trattati elementari d'algebra. Ora: quello che poteva dare per scontato erano le regole delle proporzioni, ma non certo il concetto di numeri o grandezze proporzionali.

Si on a la proportion A : B :: C : D, on sait que le produit des extrêmes A × D est égal au produit des moyens B × C.

Cette vérité est incontestable dans les nombres ; elle l'est aussi pour des grandeurs quelconques, pourvu qu'elles s'expriment ou qu'on les imagine exprimées en nombres ; et c'est ce qu'on peut toujours supposer : par exemple si A, B, C, D, sont des lignes, on peut imaginer qu'une de ces quatre lignes, ou une cinquieme, si l'on veut, serve à toutes de commune mesure et soit prise pour unité ; alors A, B, C, D, représentent chacune un certain nombre d'unités, entier ou rompu, commensurable ou incommensurable ; et la proportion entre les lignes A, B, C, D, devient une proportion de nombres. Le produit des lignes A et D, qu'on ap-

Accenno alla storia dell'insegnamento della geometria fino al XX secolo (11)

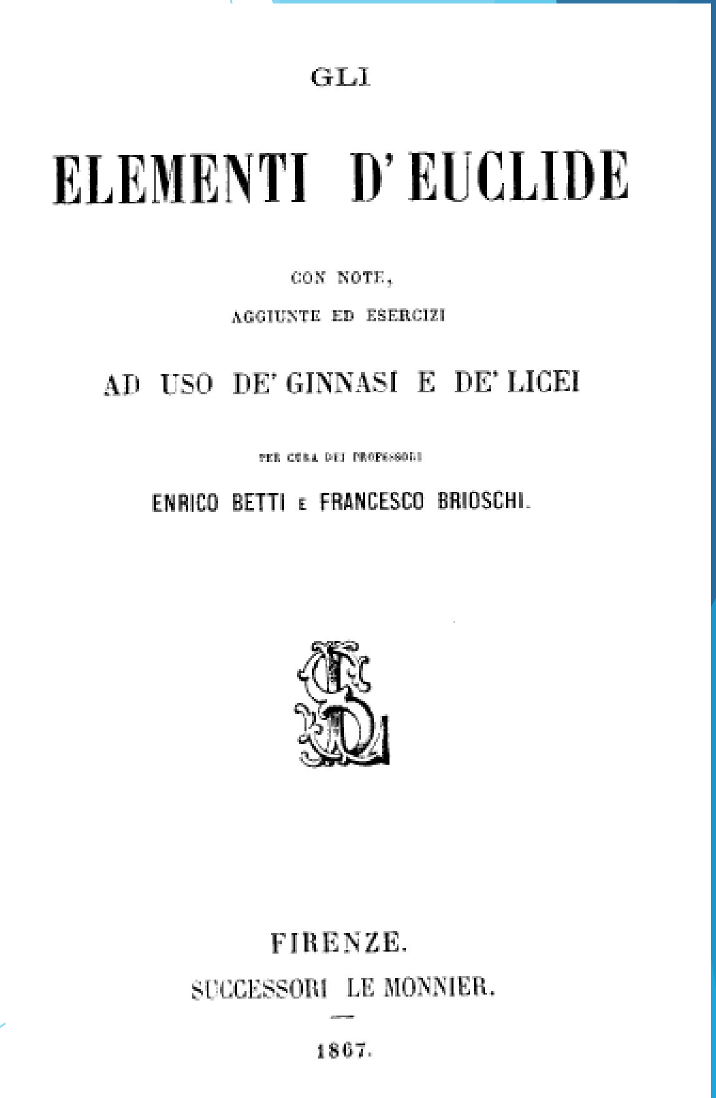
- Detto questo, il testo di Legendre ha anche molti pregi: indubbiamente il linguaggio algebrico, anche se a volte tradisce lo spirito della geometria costruttiva alla Euclide, rimane fedele a una impostazione sintetica e semplifica molto certi ragionamenti di Euclide. Lo stesso Legendre, del resto, nella prefazione aveva premesso che cercava di contemperare i pregi del rigore euclideo con una didattica che semplificasse certe parti della geometria.
- Il problema fu il «legendrismo», cioè una lunga serie di manuali a imitazione di quello di Legendre, che ne avevano tutti i difetti, molto accentuati, senza averne i pregi. Si trattava di testi, diffusi in molti ordine di scuole e che erano pieni di gravissimi errori logici. Per limitarci alla situazione negli stati italiani prima dell'unità, ricordiamo l'opinione espressa da Luigi Cremona sui libri «legendristi»

Accenno alla storia dell'insegnamento della geometria fino al XX secolo (12)

- «Ora sarebbe ormai tempo di gettare al fuoco anche certi libracci di matematica che tuttora si adoperano in qualche nostro liceo e che fanno un terribile atto di accusa contro chi li ha adottati»
- (L. Cremona, *Considerazioni sulla storia della geometria*, «Il Politecnico», VI, 1860, p. 323).
- E proprio Luigi Cremona, fu insieme a Enrico Betti e Francesco Brioschi il protagonista della «rinascita di Euclide» in Italia all'indomani dell'unificazione del 1861.

Accenno alla storia dell'insegnamento della geometria fino al XX secolo (13)

- Il ritorno a Euclide in Italia sarà segnato dalla pubblicazione di un manuale celeberrimo, il Betti-Brioschi, 1867. Il problema di questo testo è che i primi sei libri sono una riproposizione quasi letterale del capolavoro euclideo. Gli autori hanno fatto un grande sforzo per inserire una lunga serie di esercizi di difficoltà crescente, ma il lavoro interpretativo e di adattamento sul testo è minimo. Gli interventi personali degli autori sono esposti in note, alcune delle quali anche molto interessanti. Betti e Brioschi si limitano a eliminare alcune (poche) proposizioni di Euclide, a introdurne altre, ma senza un lavoro di adattamento del testo lasciatoci dal geometra greco. I libri VIII-X sono omessi. Quelli di geometria solida (XI-XIII) sono presentati con le stesse modalità dei primi sei. Segue un'appendice sulla misura delle figure rettilinee, della circonferenza, del cerchio, dei poliedri, del cilindro, del cono e della sfera.



GLI

ELEMENTI D' EUCLIDE

CON NOTE,

AGGIUNTE ED ESERCIZI

AD USO DE' GINNASI E DE' LICEI

ENRICO BETTI E FRANCESCO BRIOSCHI.

FIRENZE.

SUCCESSORI LE MONNIER.

1867.

Accenno alla storia dell’insegnamento della geometria fino al XX secolo (14)

- Il Betti-Brioschi divenne il manuale «ufficiale», nel senso che era fortemente consigliato nei programmi ministeriali, anche se non imposto. E’, comunque, importante l’idea di fondare una seria istruzione matematica in cui la geometria ha il ruolo centrale, estesa a tutto il Regno.
- Le reazioni al testo furono varie, la maggior parte positive, ma non mancarono le critiche, anche aspre, di celebri matematici. Soprattutto cominciava un movimento di pensiero che vedeva il testo di Euclide inadatto a essere riproposto in quanto tale in ambito didattico.
- Angelo Genocchi, un grande matematico, ma certo un carattere non semplice, criticando, la scelta di riproporre Euclide quasi senza modifiche, scriveva col suo classico sarcasmo:

Accenno alla storia dell’insegnamento della geometria fino al XX secolo (15)

- «Quando poi si volesse conoscere la mia particolare maniera di vedere sull'oggetto, non ho ritegno a dire che, con tutto rispetto pel merito dell'Euclide, ritengo i suoi Elementi come libro inadatto all'insegnamento, tanto se si ha in mira l'ammaestramento nella Geometria (per la povertà di quel libro) quanto se si riguarda il solo lato educativo, poiché credo che quel libro sia più adatto ad addormentare la mente dei ragazzi, che a svolgere le loro facoltà» (1869).
- Fu un periodo in cui Euclide come libro di testo fu criticato. Il più celebre articolo di critica a Euclide è dovuto al matematico inglese Wilson, il quale pubblicò nel 1868 un articolo contro l’uso di Euclide. L’articolo fu tradotto in italiano. Questi i punti principali:

Accenno alla storia dell’insegnamento della geometria fino al XX secolo (16)

- A. Difetto d'Euclide è stato quello di trascurare del tutto il metodo della sovrapposizione (movimento rigido).
- B. Ancora, la maniera con cui Euclide tratta delle parallele è difettosa. Trattate come volete delle parallele, e la nozione dell'identità di direzione non può sfuggire [. . .] e le parallele sono rette che hanno la stessa direzione.
- C. Non fo alcuna osservazione sul libro quinto (quello delle proporzioni), perché esso è morto, ed io non combatto co' morti. I matematici possono decantarne i pregi, ed io ho qualche simpatia per essi, ma fortunatamente non potranno ridargli la vita galvanizzandolo.
- D. E qui c'imbattiamo in un gran difetto d'Euclide, che ha partorita la sventurata conseguenza di separare la Geometria dell'Aritmetica

Accenno alla storia dell’insegnamento della geometria fino al XX secolo (17)

- Ne nacque un interessante dibattito, i cui elementi essenziali possono così essere riassunti:
- A. L'esigenza di riesaminare i postulati e le definizioni degli Elementi di Euclide, dunque un'approfondita analisi nei fondamenti della geometria;
- B. Il ruolo che devono avere i movimenti o, se si vuole, le trasformazioni nello studio dei problemi geometrici;
- C. L'indipendenza o meno della trattazione geometrica da una precedente teoria dei numeri reali;
- D. Il rapporto tra un'impostazione ipotetico-deduttiva e l'intuizione.

Accenno alla storia dell’insegnamento della geometria fino al XX secolo (18)

- Un elemento importante di questo dibattito, nato anche dal fatto che la geometria proiettiva, che aveva avuto una spettacolare esplosione nei primi quarant’anni dell’Ottocento, riconduceva le proprietà delle figure e delle trasformazioni piane a quelle delle figure e trasformazioni spaziali, fu il movimento fusionista.
- L’idea base era trattare insieme la geometria del piano e quella dello spazio. Così, per esempio, la teoria delle parallele veniva svolta contemporaneamente per il piano e lo spazio.
- Le lontane origini risalgono alle *Analogies de la Géométrie elementaire* di A. Mahistre, 1844 ove si evidenziavano le analogie, appunto, tra alcuni aspetti della geometria del piano e della geometria spaziale. Si giunse al testo di Charles Méray 1874 *Nouveaux éléments de géométrie*, dove la fusione è completa.

Accenno alla storia dell’insegnamento della geometria fino al XX secolo (19)

- In Italia il movimento fusionista fu molto importante. Il testo fondante furono gli *Elementi di geometria* di De Paolis (1884), testo rigoroso quanto ostico e poco adatto all’insegnamento.
- Il trattato si presenta suddiviso in sei libri:
- I. Verità fondamentali;
- II. Le figure fondamentali della geometria;
- III. Cerchio, cono, cilindro, sfera;
- IV. Teoria dell'eguaglianza;
- V. Teoria della proporzionalità;
- VI. Teoria della misura.
- Tutto è trattato contemporaneamente per il piano e lo spazio.

Accenno alla storia dell’insegnamento della geometria fino al XX secolo (20)

- Un ruolo decisivo è svolto da teoremi, di chiara derivazione proiettiva, che valgono per il piano e lo spazio. Il più importante è il teorema dei triangoli omotetici, chiara particolarizzazione del teorema di Desargues dei triangoli omologici:
- «Quando i vertici e i lati di due triangoli si corrispondono, in modo che le rette determinate dalle tre coppie di vertici corrispondenti passino per uno stesso punto, e che siano paralleli i lati corrispondenti di due coppie, anche quelli della terza coppia sono paralleli».
- L’altro testo fusionista di grande rilievo fu il Lazzeri-Bassani, 1891, poi seconda edizione 1898. Più spendibile in termini didattici, fu adottato in molte scuole. Con risultati buoni.

Accenno alla storia dell’insegnamento della geometria fino al XX secolo (21)

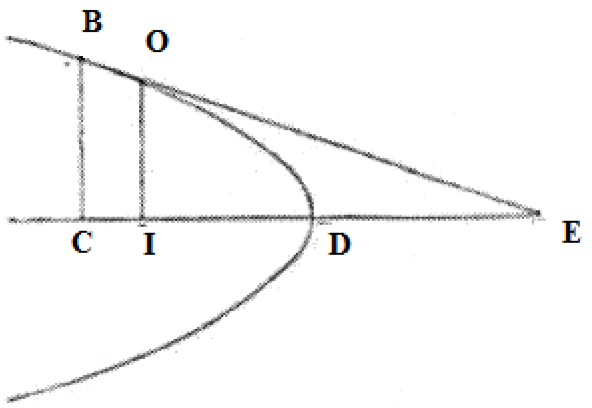
- Si arriva così ai primi anni del ‘900 con una situazione molto interessante, quanto alla didattica della geometria. Il 1903, a questo proposito, segna una data epocale. Dall’editore Zanichelli di Bologna vengono pubblicati gli *Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori* di Federigo Enriques e Ugo Amaldi. Ne analizzeremo parte dei contenuti il 5 ottobre perché credo che molti siano assai attuali.
- Per ora dico che questo testo è, probabilmente, il migliore mai scritto di geometria per i licei. Ebbe numerosissime edizioni, alcune, ridotte, sono state pubblicate anche negli anni ’70, ovviamente postume. Non è un testo fusionista, ma molti degli stimoli derivanti dal fusionismo, dalla geometria proiettiva e dalla teoria delle trasformazioni sono inseriti nel contesto euclideo. I due autori fecero anche versioni per gli istituti tecnici e professionali. Fu il manuale più diffuso fino agli anni ‘50 del ‘900.
- Il resto è storia recente: dominio della geometria analitica

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (1)

- La storia del calcolo è utile in chiave didattica perché consente in maniera naturale un approccio per problemi. Pluralità degli approcci didattici.
- Caliamoci a metà del XVII secolo: vi è la nascita della scienza moderna, si riscopre la matematica greca, soprattutto la geometria. I maggiori matematici vogliono, come è ovvio, superare i loro modelli. Uno dei problemi «all'ordine del giorno» era quello di tracciare tangenti a una qualsiasi curva e quello di calcolare aree di figure curvilinee con metodi generali. Keplero (1570-1631) e Cavalieri (1598-1647) avevano sviluppato metodi infinitesimali abbastanza potenti. Torricelli (1608-1647) aveva contribuito all'evoluzione della teoria degli indivisibili fondata da Cavalieri, ma il matematico che, prima di Newton e Leibniz ebbe le idee più chiare fu il grande Pierre de Fermat (1601-1665). Ambiente francese. Roberval, Descartes, Mersenne.

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (2)

- Gli antichi si avevano risolto il problema di tracciare le tangenti a diversi tipi di curve, tipicamente le coniche e qualche curva particolare come la spirale di Archimede. Ma mancava un metodo generale. Fermat nella *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (1637), ragiona così. Vediamo il caso di una parabola:
- Si tratta di determinare la tangente a una parabola in un suo punto *B*:
- a) *CE*=asse della parabola;
- b) *C*=proiezione ortogonale di B sull'asse;
- c) *O*=punto appartenente alla tangente e diverso da *B*. E' supposto «infinitamente vicino» a *B*;
- d) *I*=proiezione ortogonale di *O* sull'asse. Fermat pone *IC*=*e*;
- e) *D*=vertice della parabola;
- f) *E*=intersezione asse-tangente.



Elementi di storia del calcolo infinitesimale (3)

- A) Supponiamo che *F* (non indicato nella figura di Fermat) sia l'intersezione tra il segmento *OI* e la parabola. Per definizione di parabola, si ha:

$$\frac{CD}{ID} = \frac{BC^2}{FI^2}$$

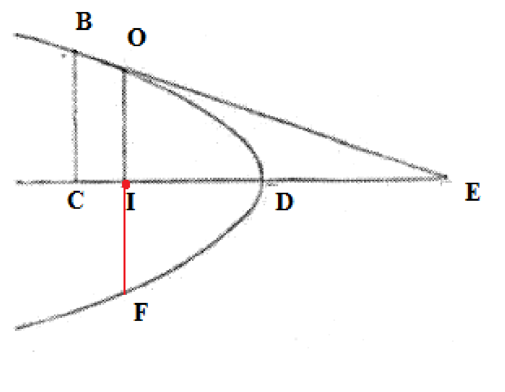
- Poiché *O* non appartiene alla parabola, risulta
- 1) $\frac{CD}{ID} > \frac{BC^2}{OI^2}$
- B) I triangoli *BCE* e *OIE* sono simili, perciò, si ha:
- 2) $BC^2 : OI^2 = CE^2 : IE^2$
- C) da 1) e 2), consegue:
- 3) $\frac{CD}{ID} > \frac{CE^2}{IE^2}$

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (4)

- D) a questo punto, Fermat pone *CD*=*d*; *CE*=*a*. Ricordiamo che *CI*=*e*. La disequazione 3) è così trasformata:
- 4) $$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$$
- Dunque:
- 5) $$d(a^2+e^2-2ae) > a^2(d-e)$$
- Da cui:
- 6) $$de^2-2aed > -a^2e$$
- E) Dal momento che *e* è quasi nullo, la disequazione 6), non è proprio una disequazione, non è neppure propriamente una equazione. Fermat usa la parola *adaequatio* (uso il simbolo $\approx$ per indicarla). Si ha, quindi
- 7) $$de^2-2aed \approx -a^2e$$

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (5)

- F) Poiché e è molto vicino a 0, ma non esattamente 0, è possibile dividere l'*adaequatio* per e, ottenendo così:
- 8) $de - 2ad \approx -a^2$
- G) Di nuovo, poiché e è quasi nullo, se tutti gli altri termini della *adaequatio*, eccetto quelli che contengono e, contengono solo quantità finite, è possibile eliminare le quantità finite moltiplicate per e, passando, dunque, da una *adaequatio* a una vera equazione che, in questo caso è
- 9) $a=2d$
- Ricordando che $CD=d$; $CE=a$, si ottiene la corretta relazione per la tangente alla parabola che già conoscevamo da Apollonio, da cui era stata ottenuta in tutt'altra maniera.



Elementi di storia del calcolo infinitesimale (6)

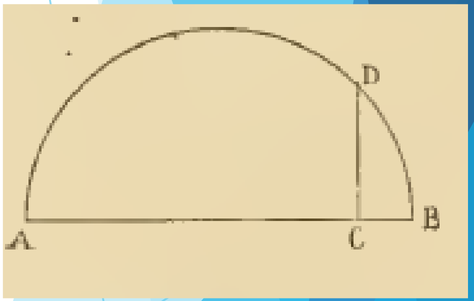
- Osservazioni da applicare in ambito didattico. Confronto tra i concetti di Fermat e quelli moderni:
- 1) il concetto di limite sembra presente in nuce perché *e* può essere interpretato come il tendere di un punto a un altro. Tuttavia Fermat fa un ragionamento molto più pragmatico: tratta, in pratica, *e* come elemento del simbolismo avente certe caratteristiche infinitesimali. Si libera poi di questa entità «anfibia» tra attuale e potenziale alla «prima occasione utile». Grandezza di questo modo di ragionare.
- 2) Il simbolo *e* può essere interpretato come un incremento della variabile indipendente. In questo senso può essere collegato al concetto di differenziale.
- 3) Il metodo di Fermat è, per usare un'espressione moderna, applicabile, in linea teorica, ad ogni funzione derivabile. Però, di fatto, può essere applicato a un insieme di funzioni, non a tutte. Il problema fondamentale del metodo è che la divisione di $f(x+e)-f(x)$ per *e* deve essere possibile algebricamente. Per esempio, una funzione «semplice» come $\sqrt{x}$ non è trattabile col metodo di Fermat perché la divisione $\frac{\sqrt{x+e}-\sqrt{x}}{e}$ non può essere eseguita algebricamente.

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (7)

- Un problema di massimo:
- «Dato un semicerchio di diametro *AB*, sia *DC* perpendicolare al diametro. Si cerca il massimo della somma *AC*+*CD*».
- Sia *b* il diametro; *AC*=*a*, allora $CD=\sqrt{ba-a^2}$. Si tratta, di trovare il massimo della quantità $a+\sqrt{ba-a^2}$. Scrive Fermat, che applicando in questo caso la regola senza alcun accorgimento, si arriva ad espressioni di grado troppo alto. Anzitutto denomina con *o* il massimo cercato.

$$a+\sqrt{ba-a^2}=o \Rightarrow o-a=\sqrt{ba-a^2} \Rightarrow o^2+a^2-2oa=ba-a^2$$

- A questo punto Fermat isola i termini con la massima potenza di *o*, ottenendo



Elementi di storia del calcolo infinitesimale (7)

$$o^2 = ba - 2a^2 + 2oa$$

- Siccome *o* è il massimo, lo sarà anche il suo quadrato. Quindi l'espressione rappresenta il massimo cercato $ba - 2a^2 + 2oa$. Non compare alcun radicale, si può, dunque adeguagliare sostituendo $AC=a$ con $AC+e=a+e$

$$ba - 2a^2 + 2oa \approx ba + be - 2a^2 - 2e^2 - 4ae + 2oa + 2oe$$

- Eliminando i termini comuni e dividendo per *e* si ha:

$$b + 2o \approx 2e + 4a$$

- Eliminando la quantità 2*e*, avremo $o = 2a - \frac{b}{2}$
- Sostituendo nell'equazione originale si ha $2a - \frac{b}{2} = a + \sqrt{ba - a^2}$ da cui, dopo facili passaggi, si ricava il valore cercato di *a*.

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (8)

- Commenti da usare in chiave didattica:
- Il metodo di Fermat è generale, in linea di principio, però, come abbiamo detto, può andare incontro a molti inconvenienti algebrici nel senso che, anche in casi semplici, l'equazione che nasce dall'adequazione può non essere trattabile algebricamente.
- In effetti, visto retrospettivamente, quello che manca è l'idea di scrivere una curva come funzione di una sola variabile. Si è visto che Fermat scrive l'ordinata di una curva come somma delle ordinate di più curve e, in questo modo, diventa poi difficile ridurre il tutto a un equazione algebrica trattabile. Manca, inoltre, propriamente, il concetto di intorno di un punto, legato anch'esso alla possibilità di scrivere una curva come funzione di una sola variabile. Newton e Leibniz progrediranno in questa direzione. Nondimeno, quello che ha fatto Fermat è stupefacente ed egli, per molti aspetti, merita insieme a Newton e Leibniz il titolo di vero padre del calcolo infinitesimale.

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (9)

- Un aspetto della storia del calcolo differenziale che può essere usato in chiave didattica e che offre molti spunti d’interesse è il modo in cui Newton introdusse il concetto di flussione e fluente, in particolare in merito a quatto aspetti:
- 1) confronto tra il concetto di funzione e di equazione;
- 2) confronto tra il concetto di flussione e quello di derivata;
- 3) derivazione delle funzioni composte;
- 4) possibilità di sviluppare contemporaneamente alcuni concetti per il calcolo con una e più variabili;
- 5) rapporti tra matematica e fisica.
- Mostrerò come procedette Newton (1642-1727) e darò alcune indicazioni didattiche. Ovviamente, dovrà poi essere l’insegnante a scegliere e selezionare l’applicazione di quanto visto.

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (10)

- Il testo che analizzeremo è uno dei capolavori del grandissimo scienziato: la *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, scritto nei primi anni ‘70 del XVII secolo, pubblicato postumo nel 1736 in traduzione inglese, originale latino pubblicato nel 1746.
- Scrive esplicitamente Newton:

I thought it not amiss, for the sake of young Students in this Science, to compose the following Treatise, in which I have endeavoured to enlarge the Boundaries of Analytics, and to improve the Doctrine of Curve-lines (Newton 1671, 1736, p. 1).

- Testo, quindi, concepito anche in funzione didattica.

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (11)

- Il modo in cui Newton introduce i concetti di flussione e fluente è coerente con due presupposti:
- 1) l'origine di questi concetti deriva dalla necessità di usare in fisica quantità istantanee;
- 2) il punto di riferimento del calcolo sono le serie infinite.
- Scrive Newton nel paragrafo della sua opera intitolato «Passaggio al metodo delle flussioni»:
- «1. Sia la lunghezza dello spazio descritta in modo continuo (cioè per ogni tempo). Trovare la velocità del moto per ogni tempo dato.
- 2. Sia la velocità del moto data continuamente. Trovare lo spazio descritto per ogni tempo dato».
- Quello che segue è davvero molto interessante.

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (12)

- Scrive Newton:
- «Così, nell'equazione $x^2 = y$, se y rappresenta la lunghezza dello spazio descritto in ogni tempo, tempo che misura un altro spazio x, che cresce con la velocità $\dot{x}$, allora $2x\dot{x}$ rappresenterà la velocità con cui lo spazio y viene descritto nello stesso periodo di tempo e viceversa». La velocità è la flussione dello spazio rispetto al tempo.
- Tuttavia, prosegue Newton, non è necessario considerare il tempo come variabile di riferimento, va bene qualunque altra quantità, anche generale, non necessariamente specificata in termini fisici o di misurazioni.
- Quindi, in sostanza l'idea che ha Newton è vicina a quella che oggi chiamiamo funzione composta: vi è una variabile, x nell'esempio specificato, che è quella che potremmo chiamare variabile-base del problema, quella cioè che compare nell'espressione da cui si parte per risolvere un certo problema. Essa, però, è, a sua volta, dipendente da un'ulteriore variabile la cui comparsa si manifesta solo nell'operazione flussionale.

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (13)

- Il primo problema che si pone Newton è quello di trovare, date quantità considerate come fluenti, le loro flussioni. Potremmo dire ‘trovare le regole di derivazione’. Newton parte da una equazione funzionale polinomiale in cui sono presenti varie ‘funzioni’ – che sono presentate notazionalmente come variabili indipendenti l’una dall’altra e chi io chiamerò «variabili» - del ‘tempo’. Consideriamo proprio uno dei suoi esempi. Prima però, forniamo il canone tramite cui Newton ottiene l’equazione delle flussioni da quella delle fluenti. Canone:
- a) si consideri ogni variabile separatamente;
- b) si disponga l’equazione delle fluenti secondo le potenze decrescenti di una variabile per esempio *x*;
- c) Si consideri il massimo esponente *m* della variabile *x*: i) occorre associare un intero *n* a tale esponente; ii) occorre moltiplicare ogni occorrenza di x^i per $\frac{\dot{x}}{x}$ e per i termini di un progressione aritmetica decrescente in questo modo:
- Il numero *n* è associato a *m*. Si moltiplicano per *n* le occorrenze delle variabili con esponente *m*, per *n*-*h* le occorrenze con esponente *m*-1 (*h* è la ragione della progressione aritmetica) e, in generale, *m*-*k* per *n*-*kh*. Usualmente si pone *m*=*n*, and *h*=1, ma ciò non è necessario;
- d) si ripeta l’operazione per ogni variabile;
- e) si sommino i risultati parziali. La somma offre l’equazione delle flussioni.

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (14)

- Consideriamo una delle equazioni prese in esame da Newton stesso (*c*=unica costante):

$$2y^3 + x^2y - 2cyz + 3yz^2 - z^3 = 0$$

- Assumiamo, per ogni variabile, *m*=*n*, *h*=1. Avremo, allora, lo schema seguente:

variabile	**fluente**	**flussione**
X	x^2y	$2\frac{\dot{x}}{x}x^2y = 2x\dot{x}y$
Y	$2y^3 + x^2y - 2cyz + 3yz^2$	$2y^3 \cdot 3\frac{\dot{y}}{y} + x^2\frac{\dot{y}}{y}y - 2c\frac{\dot{y}}{y}yz + 3y\frac{\dot{y}}{y}z^2 =$ $6y^2\dot{y} + x^2\dot{y} - 2c\dot{y}z + 3\dot{y}z^2$
Z	$-z^3 + 3yz^2 - 2cyz$	$-z^3 \cdot 3\frac{\dot{z}}{z} + 3y \cdot 2\frac{\dot{z}}{z}z^2 - 2cy\frac{\dot{z}}{z}z =$ $-3z^2\dot{z} + 6yz\dot{z} - 2cy\dot{z}$
globalmente	**equazione originaria**	**equazione delle flussioni (somma di tutte le flussioni)** $2x\dot{x}y + 6y^2\dot{y} + x^2\dot{y} - 2c\dot{y}z + 3\dot{y}z^2 - 3z^2\dot{z} + 6yz\dot{z} - 2cy\dot{z} = 0$

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (15)

- L'idea di Newton è quella di abbreviare il più possibile i calcoli. Nell'esempio considerato

$$2y^3 + x^2y - 2cyz + 3yz^2 - z^3 = 0$$

- limitiamoci alla variabile *y*. Newton associa il numero 0 a y^1 , quindi, il numero 1 a y^2 e il numero 2 a y^3 . In questo caso, occorre, però, tener presente che bisogna associare un numero diverso da 0 a y^0 e, ovviamente, si tratta del numero -1. Per cui lo schema flussionale della variabile *y* risulta:

Y	$2y^3 + x^2y - 2cyz + 3yz^2 - z^3y^0 = 0$	$2y^3 \cdot 2\frac{\dot{y}}{y} + x^2y \cdot 0\frac{\dot{y}}{y} - 2cy \cdot 0\frac{\dot{y}}{y}z + 3y \cdot 0\frac{\dot{y}}{y}z^2 - z^3 \cdot (-1)y^0\frac{\dot{y}}{y} =$ $4y^2\dot{y} + z^3\frac{\dot{y}}{y}$

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (16)

- Lasciando immodificate le flussioni per le altre variabili, l'equazione flussionale diviene, in questo caso:

$$2x\dot{x}y + 4y^2\dot{y} + \frac{\dot{y}}{y}z^3 - 3z^2\dot{z} + 6yz\dot{z} - 2cy\dot{z} = 0$$

- Si pone anzitutto, una prima questione. Il metodo per ottenere l'equazione flussionale ponendo $m=n$ e $h=1$ è esattamente equivalente alla nostra regola di derivazione. Ma chi assicura Newton che l'equazione flussionale ottenuta col metodo generale sia effettivamente equivalente a quella che otteniamo con $m=n$ e $h=1$? La cosa può essere dimostrata come segue:

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (17)

- Riconsideriamo l'equazione delle fluenti e le due equazioni delle flussioni:
- 1) $$2y^3 + x^2 y - 2cyz + 3yz^2 - z^3 = 0$$

2) $$2x\dot{x}y + 6y^2\dot{y} + x^2\dot{y} - 2c\dot{y}z + 3\dot{y}z^2 - 3z^2\dot{z} + 6yz\dot{z} - 2cy\dot{z} = 0$$

3) $$2x\dot{x}y + 4y^2\dot{y} + \frac{\dot{y}}{y}z^3 - 3z^2\dot{z} + 6yz\dot{z} - 2cy\dot{z} = 0$$

Concentriamoci sull'equazione 1). Moltiplichiamola per y^{-1}, ottenendo

4) $$2y^2 + x^2 - 2cz + 3z^2 - \frac{z^3}{y} = 0$$

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (18)

- Qui, però, è opportuna un’osservazione: se noi consideriamo l’espressione:

$$2y^3 + x^2y - 2cyz + 3yz^2 - z^3$$

- come $f(x,y,z) = 2y^3 + x^2y - 2cyz + 3yz^2 - z^3$
- cioè come funzione di $x(t), y(t), z(t)$, la sua derivata totale è proprio:

$$2x\dot{x}y + 6y^2\dot{y} + x^2\dot{y} - 2c\dot{y}z + 3\dot{y}z^2 - 3z^2\dot{z} + 6yz\dot{z} - 2cy\dot{z} = 0$$

- Diversa da $2x\dot{x}y + 4y^2\dot{y} + \frac{\dot{y}}{y}z^3 - 3z^2\dot{z} + 6yz\dot{z} - 2cy\dot{z}$

- Quindi, Newton introduce il concetto di flussione all’interno di un quadro dove l’elemento essenziale sono le equazioni flussionali e non il concetto di funzione (riflessione didattica). Newton trova sempre, per così dire, le flussioni di equazioni, non di funzioni.

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (19)

- Newton fornisce una giustificazione teorica al suo procedimento e alle sue concezioni che serve per introdurre nuove interessanti nozioni: dal momento che tutte le variabili sono considerate funzioni di t, Newton prende in esame una quantità infinitamente piccola di tempo (*quantitatem indefinite parvam*, è l'espressione). La indica con o. Il simbolo o può essere considerato come *tempo istantaneo*, *momento di tempo*, anche se Newton non lo definisce. Sono, invece definiti i *Momenti delle quantità fluenti* come il prodotto della flussione per il momento di tempo. Se, per esempio, consideriamo x, Newton definisce il suo momento come $\dot{x}o$.
- Newton giustifica nel seguente modo l'uso del «momento» per spiegare le regole di differenziazione (bisognerebbe dire di «flussionalizzazione»).

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (20)

- Consideriamo l'esempio di Newton: l'equazione

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

- In questa equazione, rimpiazza ogni variabile con la variabile stessa più il suo «momento» e ottiene:

$$(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0$$

- Se si fanno i calcoli e si tiene conto della prima equazione, si giunge all'equazione

$$3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + x^3o^3 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2o^2 + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2o^2y - \dot{y}^3o^3 = 0$$

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (21)

- Ora Newton divide questa equazione per *o* e ne ottiene un’altra, dalla quale, eliminati i termini con *o*, in quanto «infinitesimi», ottiene
- L’equazione flussionale $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$
- Questo ricorda qualcosa?

Newton	Leibniz
Quantità infinitamente piccola di tempo o	Differenziale del tempo dt
Flussione della quantità x $\dot{x}$	Rapporto tra i differenziali di x e t $\frac{dx}{dt}$
Momento della quantità fluente x $\dot{x}o$	Differenziale di x dx

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (22)

- Considerazioni didattiche:
- *Il concetto di funzione:* la definizione del concetto di funzione risale a Dirichlet (1837) che definisce una funzione come una legge qualsiasi che a un certo valore x di un intervallo dei numeri reali associa un unico altro valore y appartenente a un ulteriore intervallo dei reali. Comunque, il lavoro di Newton fu fondamentale verso la chiarificazione, o almeno verso il corretto uso, del concetto di funzione. Si è, infatti, visto che dal modo in cui Newton calcola le flussioni, egli considera le variabili $x,y,z,\ldots$ come «mutuamente indipendenti» (passatemi l'espressione imprecisa). Però, sono tutte dipendenti dal tempo. Il che significa che esiste un legame funzionale col tempo (o un'altra variabile). Newton non sviluppò una teoria della dipendenza funzionale. *Non scrive esplicitamente la relazione che lega le «funzioni» $x,y,z,\ldots$ al tempo*. Tuttavia l'idea del nesso funzionale c'è, così che la parametrizzazione delle curve sembra conseguibile all'interno dell'orizzonte concettuale newtoniano. Il concetto di derivata quasi presente. Non è esattamente presente perché non lo è il concetto di funzione.

$$\gamma(x,y)=\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (23)

- Come appena sottolineato, tale specificazione non esiste in Newton. Tuttavia, mi sembra che l'idea-base di parametrizzazione esiste. Quindi, in un percorso educativo possono essere poste queste domande:
- 1) quali sono le somiglianze e le differenze tra le relazioni tra variabili usate da Newton e il moderno concetto di funzione?
- 2) Che dire della variabile tempo usata da Newton e le moderne parametrizzazioni?
- 3) Può essere utile un percorso educativo in cui questi concetti sono introdotti alla Newton, cioè senza una particolare preparazione teorica?
- Le prime due domande potrebbero essere di stimolo a una discussione tra professori e studenti sulla natura della conoscenza matematica e sul suo sviluppo concettuale, mentre la terza è più argomento di riflessione tra docenti.

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (24)

- *Flussioni, fluenti, momenti*: Qui da un punto di vista didattico ci sono due questioni da trattare:
- 1) Newton non parla esplicitamente di limite, concetto fondamentale dell’analisi moderna. Quanto è vicino il suo concetto di «quantità di tempo infinitamente piccola» a quella di limite? Un’ulteriore procedura di Newton, introdotta qualche anno dopo dallo scienziato inglese, il «metodo delle prime e ultime ragioni» (suggerisco di leggere la sezione I dei *Principia*, *Principi matematici della filosofia naturale*, intitolata proprio «Metodo delle prime e ultime ragioni», trad. UTET), potrebbe introdurre un’interessante discussione sul concetto di limite.
- 2) Quali sono le relazioni tra il moderno concetto di derivata e la flussione di Newton? Prima risposta: poiché in Newton non si ha propriamente né il concetto di funzione né quello di limite, la flussione di Newton non è una derivata, ma neppure il rapporto differenziale di Leibniz. In Leibniz le due variabili sono completamente indipendenti, in Newton c’è una dipendenza dal tempo. Una discussione didattica molto interessante consiste nel paragonare i tre concetto: flussione di Newton, differenziale di Leibniz, moderna derivata.

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (25)

- *Regole del calcolo delle flussioni e indipendenza delle variabili*. Newton – diversamente da Leibniz – non offre una serie completa di regole per il calcolo delle flussioni. Tuttavia, le regole possono essere facilmente dedotte dai casi che egli analizza. Per esempio, se consideriamo l'equazione

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

- e l'associata equazione flussionale

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$$

- la flussione di *axy* è $a\dot{x}y + a\dot{y}x$ che, in termini moderni è la regola per la derivata del prodotto di due funzioni. Inoltre, Newton tutte le variabili *x,y,z,…* dipendenti dal tempo e le considera separatamente. Questo gli consente di trattare le flussioni espresse da equazioni in cui compare una sola variabile alla stessa stregua di quelle in cui compaiono più variabili.

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (26)

- Il calcolo newtoniano è uniforme qualunque sia il numero di variabili considerato. Prendiamo, per esempio, l'equazione delle fluenti $E(x,y,z)=0$. Le operazioni newtoniane per giungere all'equazione delle flussioni possono essere interpretate in termini moderni come segue:

$$\dot{E}(x,y,z)=\frac{\partial E}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}=0$$

- In prospettiva educativa: 1) chiave di accesso diretta alle regole delle funzioni composte e al concetto di derivata parziale e derivata totale; 2) E' possibile presentare alcuni aspetti del calcolo per una variabile insieme a quello per due o più variabili (una specie di «fusionismo in analisi»).

Elementi di storia del calcolo infinitesimale (27)

- La storia del calcolo infinitesimale offre davvero moltissimi spunti didattici. Uno assai interessante riguarda il problema del calcolo delle aree come problema inverso a quello di tracciare tangenti a una curva. Si tratta, in termini moderni, del teorema fondamentale del calcolo integrale. In questo senso le idee di Leibniz sono sfruttabili in chiave didattica.
- Su questo presenterò direttamente del materiale cartaceo il 28 settembre.