Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II
Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni, Dott. Stefano Cavallaro

Testo di riferimento: Franco Conti, *Calcolo*, McGraw-Hill, parti dei cap. 5, 7, 8, 12. Materiale didattico attinente al corso è disponibile presso `http://www.dimi.uniud.it/~gorni`.

Regolamento d'esame: Durante il corso si svolgono 2 **"compitini"**, ognuno con votazione data in trentesimi. Chi supera tutti i compitini con voto di almeno 12 è esonerato da altre prove scritte; per chi fra questi ha un voto medio $\geq$ 18 l'orale è facoltativo (si faccia vivo/a a un appello orale per sbrigare le formalità) e vale la media dei voti dei due compitini, arrotondata per eccesso; la lode si può avere solo con l'orale; per chi ha una media $\geq$ 12 e $<$ 18 l'orale è obbligatorio, in ogni caso entro febbraio 2000, pena l'annullamento dei compitini. Il programma orale per chi viene dai compitini è ridotto; dettagli in calce.
Gli studenti che non hanno fatto o superato i compitini devono sostenere **scritto e orale**. Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere se dare l'orale nello stesso appello o nel successivo. In quest'ultimo caso si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e si ritorna a poter scegliere se dare l'orale subito o all'appello successivo. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento.
Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

1. Funzioni di due variabili.

Insiemi del piano. Funzioni di più variabili: esempi dalla fisica e dall'informatica. Insieme di definizione di una funzione di due variabili: esempi. Distanza euclidea di punti del piano. Intorni circolari (o quadrati) di un punto del piano e loro significato geometrico. Insiemi limitati. Punti interni, esterni e di frontiera per un insieme. Insiemi aperti e insiemi chiusi. Esempi di insiemi contemporaneamente aperti e chiusi, e di insiemi che non sono né aperti né chiusi. Formula della distanza euclidea in $\mathbb{R}^n$ e generalizzazione dei concetti precedenti a spazi a dimensione qualsiasi.

Limiti e continuità. Visualizzazione di funzioni di due variabili: plastici, visioni prospettiche calcolate su griglie rettangolari o polari o "ad hoc', curve di livello, grafici di densità. Esempi. Definizione di limite di una funzione di due variabili. Esempi di calcolo di limiti in due variabili. Definizione di continuità. Elenco di proprietà che si estendono senza problemi da una a più variabili.

Derivate parziali, direzionali e differenziabilità. Estensione del concetto di differenziabilità al caso di più variabili: le derivate parziali. Esempi. La derivabilità parziale non implica la continuità. Definizione di differenziabilità. Interpretazione geometrica. *La differenziabilità implica la continuità. Le funzioni con derivate parziali continue (cioè "di classe C^1") sono differenziabili.* Definizione di derivata direzionale. Formula della derivata direzionale nel caso di funzioni differenziabili. Definizione di gradiente di una funzione differenziabile e sua interpretazione geometrica (senza dimostrazione) come direzione di massima pendenza del grafico. Equazioni del piano tangente e della retta normale al grafico di una funzione differenziabile (senza dimostrazione).

Regole di calcolo dei differenziali. Derivate parziali seconde di una funzione di due variabili: esempio di Peano e teorema di Schwarz sulle derivate miste (senza dimostrazione). *Derivata di una funzione composta della forma $f(x(t), y(t))$ dove f è differenziabile e $x(t)$ e $y(t)$ sono derivabili.* Differenziabilità di una funzione composta della forma $f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ se f, x, y sono differenziabili (senza dimostrazione). *Formule di Taylor del secondo ordine con resti di Lagrange e di Peano per funzioni di due variabili.*

Massimi e minimi locali. Forme quadratiche: condizioni sui coefficienti per determinare se la forma cambia o no segno. *Condizioni necessarie e condizioni sufficienti per avere massimi o minimi locali in termini dei segni delle derivate prime e seconde.* Esempio di studio dei massimi e minimi locali interni usando la matrice hessiana.

2. Equazioni differenziali.

Generalità ed equazioni lineari del primo ordine. Equazioni differenziali: generalità. Esempi: equazione di Newton, moto di un grave, equazioni di un circuito con induttanza e capacità, equazione del decadimento radioattivo. Definizione di ordine di un'equazione, equazioni in forma normale, soluzioni di un'equazione. *Soluzione esplicita delle equazioni differenziali lineari del primo ordine*: primo caso: $x' + ax = 0$ con a costante, secondo caso: $x' + ax = g(t)$, terzo caso: $x' + p(t)x = g(t)$, usando il metodo del fattore integrante. Esempi.

Studio qualitativo delle soluzioni di equazioni del primo ordine. Problema di Cauchy (o ai valori iniziali). Esempi di problemi di Cauchy in cui le soluzioni non sono definite su tutto $\mathbb{R}$. Enunciato del teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ in ipotesi $f \in C^1$. Esempio di un problema di Cauchy che ha due soluzioni distinte. Studio qualitativo delle soluzioni: isocline, campi di pendenze, soluzioni particolari, regioni di crescenza o decrescenza, massimi e minimi locali, convessità o concavità, simmetrie, due soluzioni diverse non si possono scavalcare, regioni in cui le soluzioni sono definite per tutti i $t \in \mathbb{R}$, andamento asintotico di tali soluzioni.

Altre equazioni del primo ordine risolubili esplicitamente. *Equazioni a variabili separabili*, con esempi. *Equazioni esatte*, con esempi.

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy (solo enunciato) per le equazioni lineari del secondo ordine. Definizione dell'operatore lineare $L(u) := u'' + a(t)u' + b(t)u$. Soluzioni dell'equazione omogenea e della non omogenea in termini di L e del suo nucleo. *Il wronskiano di due funzioni. Il nucleo di L ha dimensione 2.* Il metodo di D'Alembert per la riduzione dell'ordine, con esempio. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti. Equazioni non omogenee: metodo della variazione delle costanti. Esempi. Metodo per il caso in cui il termine noto ha la forma speciale $e^{\rho t}(p_1(t) \cos \omega t + p_2(t) \operatorname{sen} \omega t)$. Esempio: l'oscillatore armonico forzato.

Sistemi di due equazioni del primo ordine. Generalità sui sistemi di due equazioni del primo ordine e teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy (senza dimostrazione). Caso autonomo: interpretazione in termini di campi vettoriali e la ricerca di traiettorie la cui velocità coincide col campo. Punti di equilibrio. Equazione differenziale delle orbite. Definizione di integrale primo. Studio qualitativo del ritratto di fase. Sistemi newtoniani: studio qualitativo delle orbite a partire dal grafico dell'energia potenziale.

Sistemi lineari del primo ordine. Sistemi di due equazioni lineari a coefficienti costanti omogenee del primo ordine. *Riduzione di una matrice reale 2×2 in forma canonica.* Sistemi di due equazioni differenziali lineari: riduzione in forma canonica. Comportamenti qualitativi nel caso di due autovalori reali distinti: nodo attrattivo, nodo repulsivo, sella, caso degenere. Caso di due autovalori reali coincidenti: matrice diagonale, nodo improprio attrattivo o repulsivo, caso degenere. *Caso di due autovalori complessi coniugati*: matrice diagonale, fuoco attrattivo o repulsivo, centro. Esempi di calcolo esplicito della matrice di riduzione in forma canonica nel caso di sistemi con autovalori reali distinti o coincidenti.

Curve, aree e integrali doppi.

Area racchiusa da una curva. Curve parametriche nel piano: definizione, ed esempi. Curve chiuse e curve semplici. Una curva semplice e chiusa divide il piano in una regione interna e una esterna (senza dimostrazione). Formula dell'area della regione interna a una curva parametrica semplice chiusa. Cambio di parametro nelle curve parametriche e suo effetto sugli integrali del tipo $\int yx'dt$ e $\int xy'dt$. Scomposizione di una curva parametrica in più curve e suo effetto sugli integrali. *Dimostrazione della formula per l'area nel caso di regione semplice rispetto alle parallele all'asse y, e cenno al caso generale.* Esempi. Formula dell'area di un triangoloide in coordinate polari. Esempi.

Quadrabilità e integrali doppi. Quadrabilità e area nel senso di Peano-Jordan, usando le quadrettature del piano (senza dimostrazioni). Definizione di integrabilità e integrale doppio di una funzione limitata su un dominio quadrabile. Proprietà dell'integrale doppio: linearità rispetto alla funzione, additività rispetto al dominio, monotonia, maggiorazioni, teorema di Fubini (senza dimostrazioni). Esempi di calcolo di integrali doppi e tripli. Baricentro di una regione piana. Formula di integrazione in coordinate polari. Teorema sul volume dei solidi di rotazione (solo enunciato).

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

Oltre alla **dimostrazione** dei teoremi seguenti, lo studente dovrà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti che sono stati introdotti nel corso, e di saper illustrare definizioni e teoremi con **esempi**, qualora ce ne siano di semplici.

Chi viene all'orale dai *compitini* basterà che sappia dimostrare i teoremi con l'*asterisco*. Dovrà comunque sapere l'enunciato anche degli altri.

1. La differenziabilità implica la continuità.

*2. Le funzioni con derivate parziali continue (cioè "di classe C^1") sono differenziabili.

3. Derivata di una funzione composta della forma $f(x(t), y(t))$ dove f è differenziabile e $x(t)$ e $y(t)$ sono derivabili.

*4. Formule di Taylor del secondo ordine con resti di Lagrange e di Peano per funzioni di due variabili.

*5. Condizioni necessarie e condizioni sufficienti per avere massimi o minimi locali in termini dei segni delle derivate prime e seconde.

6. Soluzione esplicita delle equazioni differenziali lineari del primo ordine.

*7. Equazioni differenziali a variabili separabili.

8. Equazioni differenziali esatte.

*9. Proprietà del wronskiano e dimostrazione che il nucleo di $L(u) := u'' + a(t)u' + b(t)u$ ha dimensione 2.

*10. Riduzione di una matrice reale 2×2 in forma canonica.

*11. Soluzione del sistema lineare in forma canonica nel caso di due autovalori complessi coniugati.

12. Dimostrazione della formula per l'area della regione delimitata da una curva semplice piana nel caso di una regione semplice rispetto alle parallele all'asse y, e cenno al caso generale.