Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1999/2000

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Prova Scritta dell'11 dicembre 2000

Cognome e Nome:

Matricola: — Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Trovare massimo e minimo globali (se esistono) della funzione

$$f(x,y) := \big(|x|-1\big)^2 + y^2$$

sull'insieme $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \le y \le 2 - |x|\}$.

2. Del problema di Cauchy

$$x'(t) = x(t)\big(x(t)-1\big)\big(x(t)-2\big)\,, \qquad x(0) = 1/2$$

si determinino (non necessariamente in questo ordine) esistenza e unicità locale e globale, andamento asintotico, soluzione esplicita.

3. Calcolare il volume e il baricentro del solido

$$S := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \ge 0, z \ge 0, \quad x^2+y^2+(z-1)^2 \le 4, \quad x^2+y^2+(z+1)^2 \le 4\Big\}\,.$$

Punti: 12, 14, 14.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

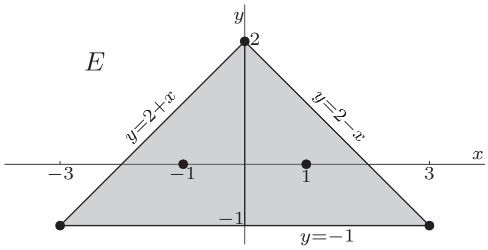
Analisi Matematica II

Prova Scritta dell'11 dicembre 2000

Svolgimento

1. L'insieme $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \le y \le 2 - |x|\}$ si può scrivere come l'unione dei due insiemi più semplici $E_1 \cup E_2$, dove

$$E_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \ge 0, -1 \le y \le 2 - x\},$$
$$E_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \le 0, -1 \le y \le 2 + x.\}$$



E_1 è il triangolo di vertici $(0,-1),(0,2),(3,-1)$, mentre E_2 è il triangolo di vertici $(0,-1),(0,2),(-3,-1)$, compresi i bordi. Quindi E è il triangolo di vertici $(-3,-1),(3,-1),(0,2)$, compresi i bordi. In particolare E è chiuso e limitato. Inoltre E_1 ed E_2 sono uno il simmetrico dell'altro rispetto all'asse y.
La funzione

$$f(x,y) := \big(|x|-1\big)^2 + y^2$$

è definita e continua su tutto $\mathbb{R}^2$ perché composizione di funzioni continue ovunque (polinomi e valore assoluto). Il teorema di Weierstraß ci garantisce che f assume massimo e minimo globale su E. La f è simmetrica per scambio di x con $-x$:

$$f(-x,y) = \big(|-x|-1\big)^2 + y^2 = \big(|x|-1\big)^2 + y^2 = f(x,y)\,,$$

Dato che anche E è simmetrico per scambio di x con $-x$, basterebbe studiare la f sul triangolo E_1, dove fra l'altro abbiamo il vantaggio che $f(x,y)$ coincide col polinomio

$$g(x,y) := (x-1)^2 + y^2\,,$$

che è di classe C^∞, mentre la f non è globalmente differenziabile (a causa del valore assoluto).
La f è sempre ≥ 0, in quanto somma di due quadrati, e si annulla soltanto quando entrambi i quadrati sono nulli:

$$(|x|-1)^2 + y^2 = 0 \iff \begin{cases} |x|-1=0 \\ y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\pm 1, \\ y=0. \end{cases}$$

Il minimo globale di f è già trovato: è 0, e viene assunto nei due punti $(\pm1,0)$, che appartengono a E.
Le derivate parziali di g sono:

$$g_x(x,y) = 2(x-1)\,, \qquad g_y(x,y) = 2y\,.$$

Queste si annullano contemporaneamente soltanto in $(1,0)$, che sappiamo già essere punto di minimo globale. Dunque non ci sono altri punti di massimo o minimo locale interni a E_1. Resta da studiare la frontiera di E_1.
Il segmento da $(0,-1)$ a $(3,-1)$ si parametrizza subito con $x \in [0,3]$ e $y=-1$, e la g lungo sul segmento parametrizzato vale

$$h_1(x) := g(x,-1) = (x-1)^2 + (-1)^2 = (x-1)^2 + 1$$

che ha chiaramente $x=1$ (corrispondente a $(1,-1)$) come unico punto critico interno.
Il segmento da $(0,-1)$ a $(0,2)$ si parametrizza con $x=0$ e $y \in [-1,2]$, e la g vale

$$h_2(y) := g(0,y) = (0-1)^2 + y^2$$

che ha $y=0$ (corrispondente a $(0,0)$) come unico punto critico interno.
Il segmento da $(0,2)$ a $(3,-1)$ si parametrizza con $x \in [0,3]$ e $y = 2-x$, e la g vale

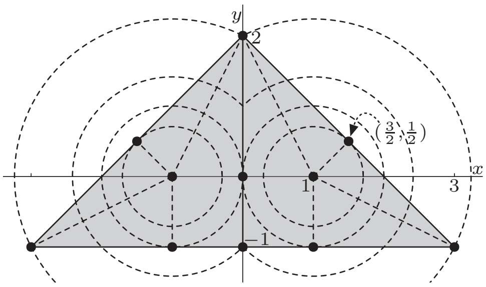
$$h_3(x) := g(x,2-x) = (x-1)^2 + (2-x)^2 = x^2 - 2x + 1 + 4 - 4x + x^2 = 2x^2 - 6x + 5\,.$$

La derivata di $h_3(x)$ è $4x-6$, che si annulla solo per $x = 3/2$ (corrispondente al punto $(3/2, 2-3/2) = (3/2,1/2)$, che è in E_1).

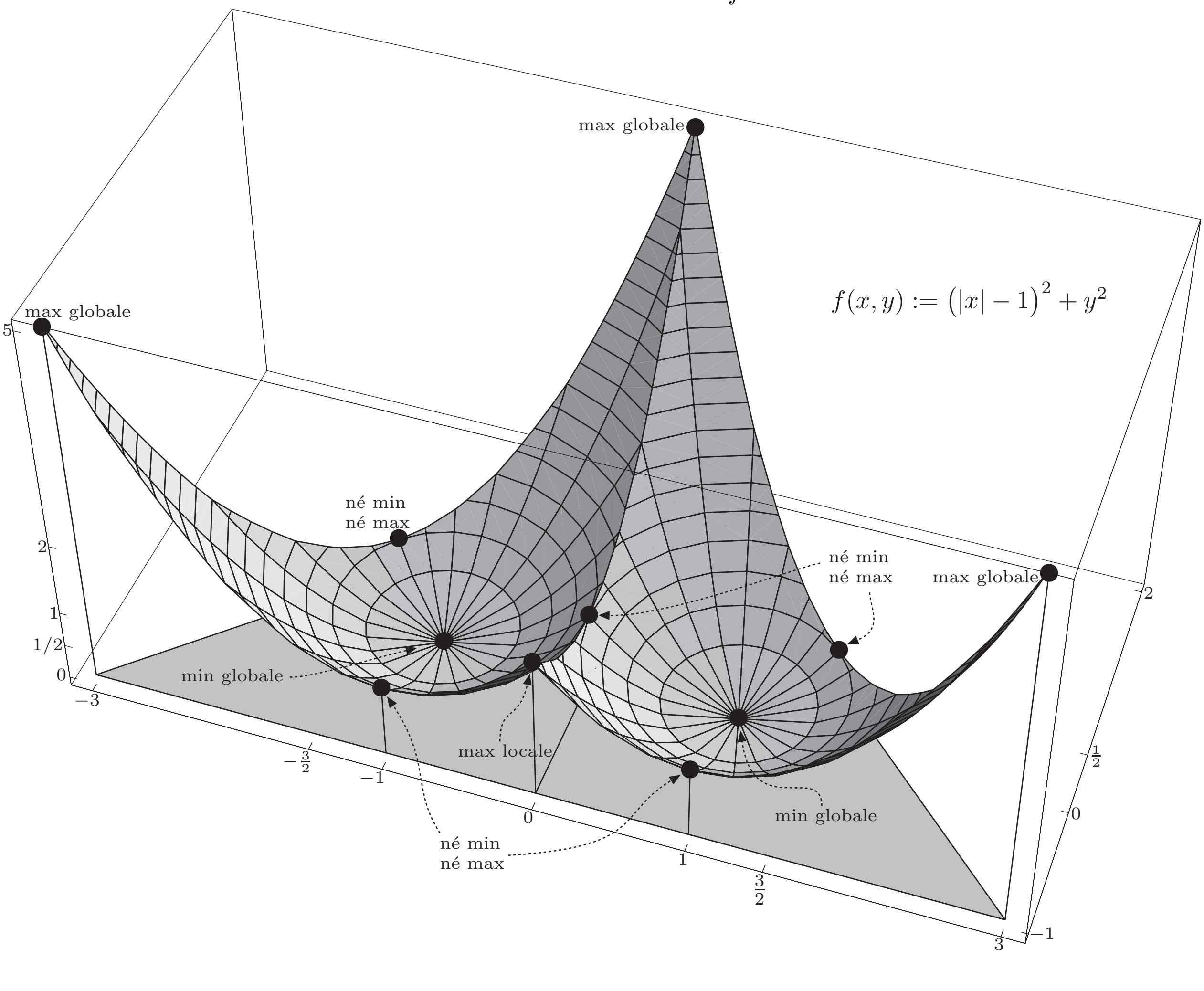
Riassumendo, candidati a essere punti di massimo o minimo globale di f (o g) su E_1 sono il punto critico interno $(1,0)$ (che sappiamo già essere di minimo per altra via), i tre punti critici sui tre lati, cioè $(1,-1)$, $(0,0)$ e $(3/2,1/2)$, nonché naturalmente i tre vertici del triangolo: $(0,-1)$, $(0,2)$ e $(3,-1)$. Calcoliamo la f (o la g) nei punti candidati:

$$f(1,0) = (1-1)^2 + 0^2 = 0, \quad f(1,-1) = (1-1)^2 + (-1)^2 = 0 + 1 = 1, \quad f(0,0) = (0-1)^2 + 0^2 = 1,$$
$$f\Big(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\Big) = \Big(\frac{3}{2} - 1\Big)^2 + \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad f(0,-1) = (0-1)^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2,$$
$$f(0,2) = (0-1)^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5, \quad f(3,-1) = (3-1)^2 + (-1)^2 = 4 + 1 = 5.$$

Il valore di f più piccolo fra i candidati è 0 (lo sapevamo già), mentre il più grande è 5, che viene assunto nei due vertici $(0,2)$ e $(3,-1)$. Questi sono dunque il minimo e il massimo globale di f su E_1. Se consideriamo f su tutto E si aggiungono un altro punto di minimo globale in $(-1,0)$ e uno di massimo globale in $(-3,-1)$.



Sul semipiano $x \geq 0$ la $f(x,y)$ si può interpretare come il quadrato della distanza di (x,y) da $(1,0)$ e i suoi insiemi di livello di f sono cerchi di centro $(1,0)$ (o meglio, la loro intersezione col semipiano). I punti $(1,-1)$, $(0,0)$ e $(3/2,1/2)$ sono i punti in cui i lati sono tangenti alle curve di livello. La figura qui a sinistra mostra gl'insiemi di livello critici di f. Si intuisce che per la f considerata su E i punti $(\pm 1,-1)$, $(0,0)$ e $(\pm 3/2,1/2)$ non sono né di massimo né di minimo locale, mentre $(0,-1)$ è di massimo locale. Qui sotto c'è un grafico tridimensionale di f su E.

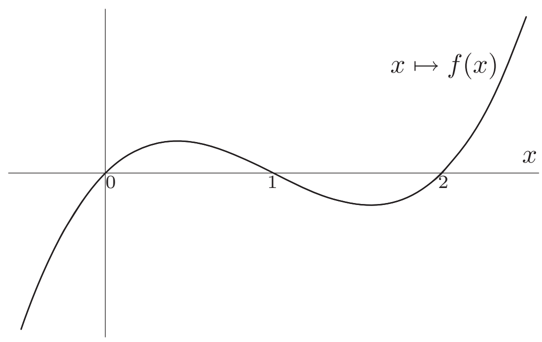


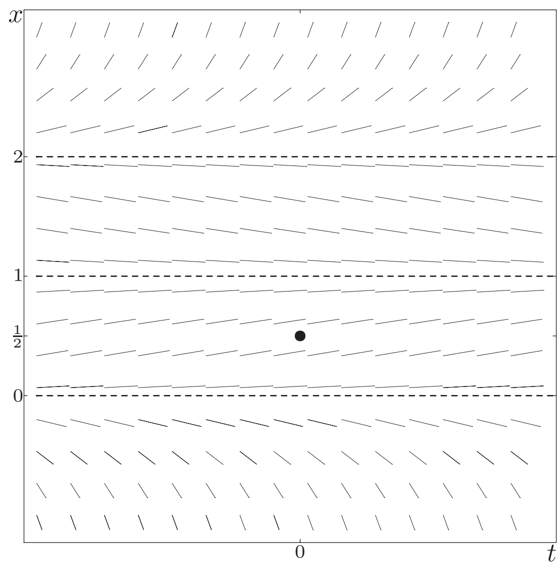
2. L'equazione differenziale

$$x'(t) = x(t)\big(x(t)-1\big)\big(x(t)-2\big)$$

è simile all'equazione logistica e rientra nella forma

$$x'(t) = f\big(x(t)\big)\,, \qquad \text{dove } f(y) := y(y-1)(y-2)\,.$$





Poiché la funzione f è di classe C^1 (è un polinomio), ogni problema di Cauchy per la nostra equazione differenziale ha una e una sola soluzione. Qui accanto c'è il grafico di f e il grafico del campo di direzioni associato all'equazione differenziale. Cerchiamo eventuali soluzioni costanti: $x(t) \equiv x_0$:

$$0 \equiv x'(t) = f\big(x(t)\big) \equiv f(x_0) = x_0(x_0-1)(x_0-2)\,.$$

L'equazione algebrica $f(x_0) = 0$ ha tre soluzioni: $x_0 = 0, 1, 2$. Pertanto l'equazione differenziale ha le tre soluzioni costanti $x(t) \equiv 0, 1, 2$. Ricordiamo ora che il problema di Cauchy che ci è stato proposto

$$x'(t) = x(t)\big(x(t)-1\big)\big(x(t)-2\big)\,, \qquad x(0) = 1/2$$

ha la condizione iniziale compresa fra le due costanti 0 e 1. Per i risultati generali sulle equazioni differenziali, la nostra soluzione $\bar{x}(t)$, oltre a essere unica, è anche definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ e si ha sempre $0 < \bar{x}(t) < 1$. Ma allora

$$\bar{x}'(t) = \underbrace{\bar{x}(t)}_{>0}\underbrace{\big(\bar{x}(t)-1\big)}_{<0}\underbrace{\big(\bar{x}(t)-2\big)}_{<0} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Deduciamo che $\bar{x}(t)$ è strettamente *crescente*. Ne segue che esistono i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} \bar{x}(t) := L_1\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \bar{x}(t) := L_2$$

e che $0 \le L_1 < 1/2 < L_2 \le 1$. Per calcolare L_1, L_2 un modo è questo: da una parte è ovvio che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\bar{x}(t)}{t} = \frac{L_1}{-\infty} = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\bar{x}(t)}{t} = \frac{L_2}{+\infty} = 0\,;$$

dall'altra il limite del rapporto delle derivate è

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{D\bar{x}(t)}{Dt} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f\big(x(t)\big)}{1} = f(L_1)\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{D\bar{x}(t)}{Dt} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f\big(x(t)\big)}{1} = f(L_2)\,.$$

Per il teorema de L'Hôpital i limiti di $\bar{x}(t)/t$ e di $\bar{x}'(t)/1$, poiché esistono entrambi, devono coincidere. Deduciamo che $f(L_1) = 0$ e $f(L_2) = 0$. Dato che f si annulla solo in $0, 1, 2$ e che $0 \le L_1 < 1/2 < L_2 \le 1$, concludiamo che $L_1 = 0$, $L_2 = 1$.
La soluzione $\bar{x}(t)$ si può calcolare per via simbolica in modo analogo a quanto fatto per l'equazione logistica. Dividiamo l'equazione per il secondo membro:

$$\frac{\bar{x}'(t)}{\bar{x}(t)(\bar{x}(t)-1)(\bar{x}(t)-2)} = 1\,,$$

e integriamo per t che varia da 0 a τ:

$$\int_0^\tau \frac{\bar{x}'(t)}{\bar{x}(t)(\bar{x}(t)-1)(\bar{x}(t)-2)}dt = \int_0^\tau 1\,dt = \tau\,.$$

Col cambio di variabile $x(t) = y$ si ha

$$\int_{\bar{x}(0)}^{\bar{x}(\tau)} \frac{1}{y(y-1)(y-2)}dy = \int_{1/2}^{\bar{x}(\tau)} \frac{1}{y(y-1)(y-2)}dy = \tau\,.$$

Decomponiamo la funzione razionale in somma di fratti semplici:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y(y-1)(y-2)} &= \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} + \frac{C}{y-2} = \frac{A(y-1)(y-2) + By(y-2) + Cy(y-1)}{y(y-1)(y-2)} = \\ &= \frac{Ay^2 - 2Ay - Ay + 2A + By^2 - 2By + Cy^2 - Cy}{y(y-1)(y-2)} = \\ &= \frac{(A+B+C)y^2 + (-3A-2B-C)y + 2A}{y(y-1)(y-2)}\,.\end{aligned}$$

Le condizioni sui coefficienti formano un sistema di primo grado che si risolve subito:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -3A-2B-C=0 \\ 2A=1 \end{cases} \iff \begin{cases} C=-1/2-B \\ 2B+C=-3/2 \\ A=1/2 \end{cases} \iff \begin{cases} A=1/2 \\ B=-1 \\ C=1/2. \end{cases}$$

Una primitiva si calcola così

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y(y-1)(y-2)}dy &= \int\Big(\frac{1}{2y} - \frac{1}{y-1} + \frac{1}{2(y-2)}\Big)dy = \frac{1}{2}\log|y| - \log|y-1| + \frac{1}{2}\log|y-2| = \\ &= \frac{1}{2}\big(\log|y| - 2\log|y-1| + \log|y-2|\big) = \frac{1}{2}\big(\log|y| - \log\big(|y-1|^2\big) + \log|y-2|\big) = \\ &= \frac{1}{2}\log\Big|\frac{y(y-2)}{(y-1)^2}\Big|\,.\end{aligned}$$

Tornando al nostro integrale definito:

$$\begin{aligned}\tau &= \int_{\bar{x}(0)}^{1/2} \frac{1}{y(y-1)(y-2)}dy = \Big[\frac{1}{2}\log\Big|\frac{y(y-2)}{(y-1)^2}\Big|\Big]_{1/2}^{\bar{x}(\tau)} = \frac{1}{2}\log\Big|\frac{\bar{x}(\tau)(\bar{x}(\tau)-2)}{(\bar{x}(\tau)-1)^2}\Big| - \frac{1}{2}\log\Big|\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-2)}{(\frac{1}{2}-1)^2}\Big| = \\ &= \frac{1}{2}\log\Big|\frac{\bar{x}(\tau)(\bar{x}(\tau)-2)}{(\bar{x}(\tau)-1)^2}\Big| - \frac{1}{2}\log 3 = \frac{1}{2}\log\Big|\frac{\bar{x}(\tau)(\bar{x}(\tau)-2)}{3(\bar{x}(\tau)-1)^2}\Big|\,.\end{aligned}$$

Per comodità scriviamo t al posto di τ. Poiché $0 < \bar{x}(t) < 1$ possiamo togliere il valore assoluto:

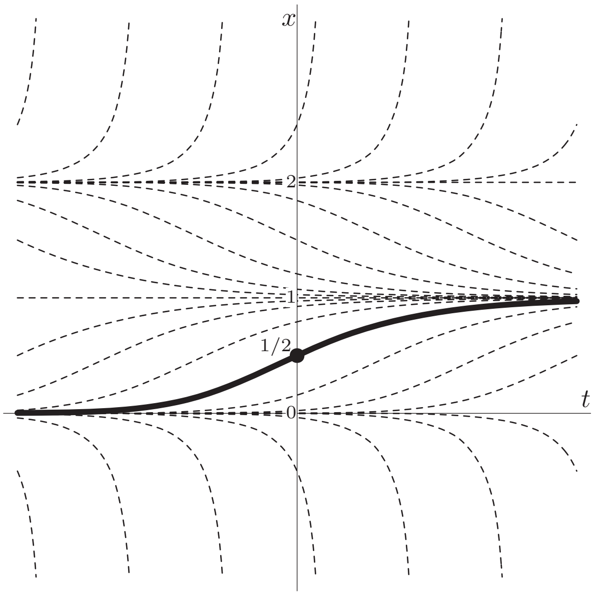
$$2t = \log\Bigg|\frac{\overbrace{\bar{x}(t)}^{>0}\overbrace{(\bar{x}(t)-2)}^{<0}}{\underbrace{3(\bar{x}(t)-1)^2}_{>0}}\Bigg| = \log\frac{\bar{x}(t)(2-\bar{x}(t))}{3(\bar{x}(t)-1)^2}\,.$$

Prendiamo l'esponenziale di ambo i membri:

$$e^{2t} = \frac{\bar{x}(t)(2-\bar{x}(t))}{3(\bar{x}(t)-1)^2}\,.$$

Questa è un'equazione algebrica in $y = \bar{x}(t)$ che si risolve:

$$3e^{2t}(y-1)^2 = y(2-y) \iff 3e^{2t}y^2 - 6e^{2t}y + 3e^{2t} - 2y + y^2 = 0 \iff$$
$$\iff (1+3e^{2t})y^2 - 2(1+3e^{2t})y + 3e^{2t} = 0 \iff$$
$$\iff \bar{x}(t) = y = \frac{1+3e^{2t} \pm \sqrt{(1+3e^{2t})^2 - 3e^{2t}(1+3e^{2t})}}{1+3e^{2t}} =$$
$$= \frac{1+3e^{2t} \pm \sqrt{1+9e^{4t}+6e^{2t}-3e^{2t}-9e^{4t}}}{1+3e^{2t}} = \frac{1+3e^{2t} \pm \sqrt{1+3e^{2t}}}{1+3e^{2t}} =$$
$$= 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1+3e^{2t}}}\,.$$



Dato che la nostra soluzione è compresa fra 0 e 1, la soluzione accettabile è quella col segno meno:

$$\bar{x}(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+3e^{2t}}}\,.$$

Usando questa formula esplicita si trova il comportamento asintotico per altra via:

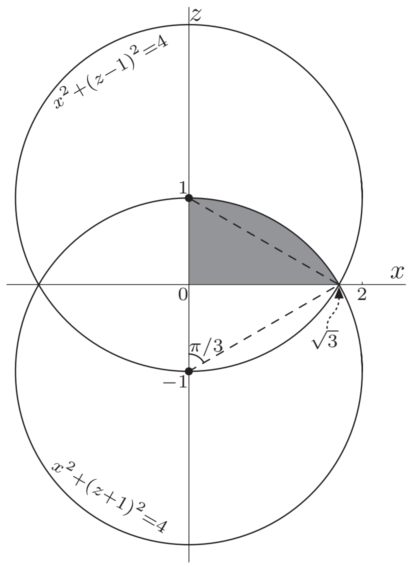
$$\lim_{t\to-\infty} \bar{x}(t) = \lim_{t\to-\infty}\Bigl(1 - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+3e^{2t}}}}_{\to 1}\Bigr) = 1-1 = 0\,,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \bar{x}(t) = \lim_{t\to+\infty}\Bigl(1 - \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1+3e^{2t}}}_{\to+\infty}}\Bigr) = 1-0 = 1\,.$$

In modo simile si possono calcolare esplicitamente tutte le soluzioni non costanti dell'equazione differenziale. La figura qui accanto mostra in tratto continuo la soluzione con $x(0) = 1/2$, e tratteggiate le altre soluzioni. Le soluzioni con $x(t) < 0$ e quelle con $x(t) > 2$ esplodono in un tempo finito.

3. Il solido

$$S := \Bigl\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 4,$$
$$x^2+y^2+(z+1)^2 \leq 4\Bigr\}$$

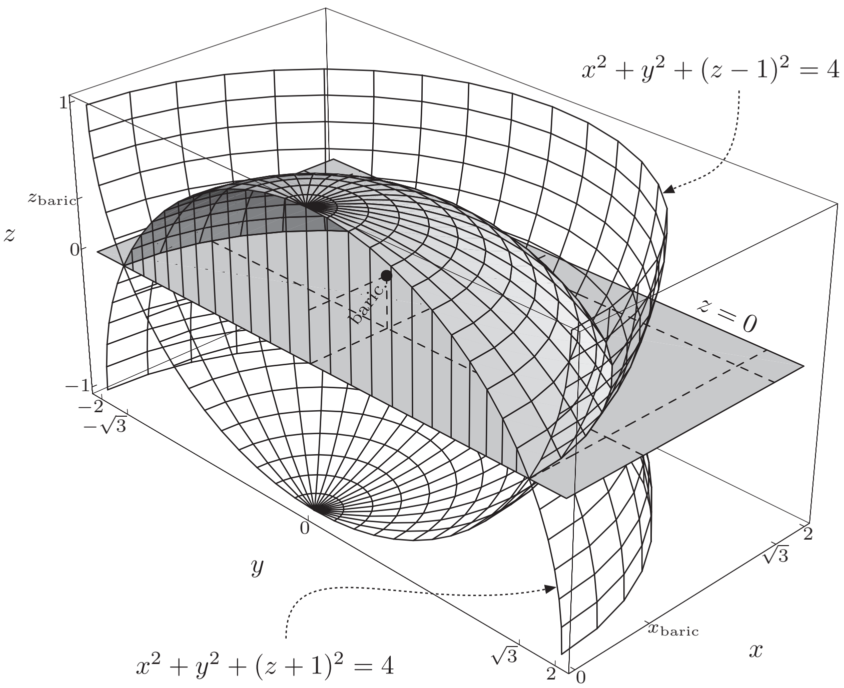


è l'intersezione fra le due sfere (piene) di raggio 2 e centri rispettivamente in $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$, e i due semispazi $x \geq 0$ e $z \geq 0$. Cerchiamo di capire com'è fatto S. L'intersezione di S con il piano xz (cioè $y=0$) è mostrata nella figura a fianco. Le coordinate delle intersezioni fra i due cerchi sono $(\pm\sqrt{3}, 0)$, come si può ricavare per via algebrica, oppure notando che i due cerchi $x^2+(z\pm1)^2 = 4$ hanno raggio 2 e la distanza fra i centri è pure 2, per cui il triangolo con vertici l'intersezione e i due centri risulta equilatero. Se intersechiamo i due dischi $x^2+(z\pm1)^2 \leq 4$ col primo quadrante $(x \geq 0, z \geq 0)$ ci rimane la zona in grigio. Il disco inferiore $x^2+(z+1)^2 \leq 4$ è superfluo: l'intersezione di S col piano xz si può descrivere anche con le disequazioni

$$0 \leq x \leq \sqrt{3}, \quad 0 \leq z \leq -1 + \sqrt{4-x^2}\,.$$

La situazione è simile per l'intersezione di S con qualsiasi altro piano passante per l'asse z: basterà mettere $r = \sqrt{x^2+y^2}$ al posto di x. Insomma, S si può scrivere in una forma che si presta bene al calcolo in coordinate polari nel piano xy:

$$S = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \geq 0, \quad x^2+y^2 \leq 3, \quad 0 \leq z \leq -1 + \sqrt{4-x^2-y^2}\Big\}.$$



Il volume di S è

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(S) &= \int_S dx\,dy\,dz = \int_{\{x^2+y^2\leq 3, x\geq 0\}} dx\,dy \int_0^{-1+\sqrt{4-x^2-y^2}} dz = \\
&= \int_{\{x^2+y^2\leq 3, x\geq 0\}} \big(-1+\sqrt{4-x^2-y^2}\big) dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \big(-1+\sqrt{4-r^2}\big) r\,dr = \\
&= \pi \int_0^{\sqrt{3}} \Big(-r - \frac{1}{2}(4-r^2)^{1/2}(-2r)\Big)\,dr = \pi\Big[-\frac{r^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(4-r^2)^{3/2}\Big]_0^{\sqrt{3}} = \\
&= \pi\Big(-\frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 0 + \frac{8}{3}\Big) = \pi\frac{-9-2+16}{6} = \frac{5}{6}\pi\,.
\end{aligned}$$

Il solido S è simmetrico rispetto al piano xz (cioè $(x,y,z) \in S \iff (x,-y,z) \in S$). Pertanto il baricentro di S si trova sul piano xz. Le coordinate x e z del baricentro sono

$$x_{\text{baric}\,S} = \frac{1}{\mathrm{vol}(S)} \int_S x\,dx\,dy\,dz, \qquad z_{\text{baric}\,S} = \frac{1}{\mathrm{vol}(S)} \int_S z\,dx\,dy\,dz\,.$$

Calcoliamo $\int_S x\,dx\,dy\,dz$:

$$\begin{aligned}
\int_S x\,dx\,dy\,dz &= \int_{\{x^2+y^2\leq 3, x\geq 0\}} dx\,dy \int_0^{-1+\sqrt{4-x^2-y^2}} x\,dz = \int_{\{x^2+y^2\leq 3, x\geq 0\}} \big(-1+\sqrt{4-x^2-y^2}\big) x\,dx\,dy = \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \big(-1+\sqrt{4-r^2}\big)(r\cos\theta) r\,dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \big(-1+\sqrt{4-r^2}\big) r^2\,dr =
\end{aligned}$$

$$= \big[\operatorname{sen}\theta\big]_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\Big(\Big[-\frac{r^3}{3}\Big]_{r=0}^{\sqrt{3}} + \int_0^{\sqrt{3}} r^2\sqrt{4-r^2}\,dr\Big) = 2\Big(-\sqrt{3} + \int_0^{\sqrt{3}} r^2\sqrt{4-r^2}\,dr\Big) =$$
$$= -2\sqrt{3} + 2\int_0^{\sqrt{3}} r^2\sqrt{4-r^2}\,dr\,.$$

Per calcolare l'ultimo integrale dell'ultima formula si può sostituire $r = 2\operatorname{sen} t$, da cui $dr = 2(\cos t)dt$, $t = 0$ per $x = 0$ e $t = \pi/3$ per $x = \sqrt{3}$:

$$\int_0^{\sqrt{3}} r^2\sqrt{4-r^2}\,dr = \int_0^{\pi/3} \big((2\operatorname{sen} t)^2\sqrt{4-(2\operatorname{sen} t)^2}\cdot 2\cos t\,dt = 16\int_0^{\pi/3} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cdot \operatorname{sen}^2 t\cos t\,dt =$$
$$= 16\int_0^{\pi/3} \cos^2 t\operatorname{sen}^2 t\,dt = 16\int_0^{\pi/3}\big(\cos t\operatorname{sen} t\big)^2\,dt = 16\int_0^{\pi/3}\Big(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\Big)^2\,dt =$$
$$= 4\int_0^{\pi/3}\operatorname{sen}^2 2t\,dt = 4\int_0^{\pi/3}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt = 2\Big[t - \frac{\operatorname{sen} 4t}{4}\Big]_0^{\pi/3} = 2\Big(\frac{\pi}{3} - \frac{\operatorname{sen}(4\pi/3)}{4}\Big) =$$
$$= \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\,.$$

Quindi la coordinata x di S è

$$x_{\mathrm{baric}\,S} = \frac{1}{\mathrm{vol}(S)}\int_S x\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{5\pi/6}\Big(-2\sqrt{3} + 2\Big(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\Big)\Big) = \frac{6}{5\pi}\Big(-2\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) =$$
$$= \frac{6}{5\pi}\cdot\frac{-12\sqrt{3} + 8\pi + 3\sqrt{3}}{6} = \frac{8\pi - 9\sqrt{3}}{5\pi} \approx 0{,}607608\,.$$

Calcoliamo $\int_S z\,dx\,dy\,dz$:

$$\int_S z\,dx\,dy\,dz = \int_{\{x^2+y^2\le 3, x\ge 0\}} dx\,dy\int_0^{-1+\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dz = \int_{\{x^2+y^2\le 3, x\ge 0\}}\Big[\frac{z^2}{2}\Big]_{z=0}^{-1+\sqrt{4-x^2-y^2}} dx\,dy =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\{x^2+y^2\le 3, x\ge 0\}}\big(-1+\sqrt{4-x^2-y^2}\big)^2 dx\,dy =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\{x^2+y^2\le 3, x\ge 0\}}\big(1+4-x^2-y^2-2\sqrt{4-x^2-y^2}\big)dx\,dy =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\{0\le r\le\sqrt{3}, -\pi/2\le\theta\le\pi/2\}}\big(5-r^2-2\sqrt{4-r^2}\big)r\,dr\,d\theta =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\big(5r-r^3-2r\sqrt{4-r^2}\big)\,dr = \frac{1}{2}\pi\Big[\frac{5r^2}{2} - \frac{r^4}{4} + \frac{2}{3}(4-r^2)^{3/2}\Big]_0^{\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{\pi}{2}\Big(\frac{15}{2} - \frac{9}{4} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}4^{3/2}\Big) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{90-27+8-8\cdot 8}{12} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{71-64}{12} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{7}{12} = \frac{7}{24}\pi\,.$$

Dunque la coordinata z di S è

$$z_{\mathrm{baric}\,S} = \frac{1}{\mathrm{vol}(S)}\int_S z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{5\pi/6}\cdot\frac{7}{24}\pi = \frac{7}{20} = 0{,}35\,.$$