Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Prova Scritta del 27 novembre 2000

Cognome e Nome:

Matricola: Documento d'identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Si trovino massimo e minimo globali (se esistono) della funzione

$$f(x,y) := \frac{1}{1+(x+1)^2+2y^2} - \frac{1}{1+(x-1)^2+2y^2}$$

sull'insieme $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| \le 2, |y| \le 1\}$.
(Può semplificare i conti il fatto, da verificare, che sul bordo di D vale la disuguaglianza $1+(x\pm 1)^2+2y^2 \ge 2$).

2. Si trovino i punti d'equilibrio dell'equazione differenziale newtoniana

$$x'' = -4x^3 + 2x\,,$$

dicendo se possibile se sono stabili. Dimostrare che $a^4 - a^2 \ge (a^4-1)/2$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, e se ne deduca che tutte le soluzioni $x(t)$ dell'equazione differenziale sono limitate.

3. Sia $E := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \ge 0, (x-1/2)^2 + z^2 \le 1\}$ e sia S il solido ottenuto ruotando E di un angolo giro attorno all'asse z. Calcolare l'area di E, il volume di S, il baricentro di E e quello di S (non necessariamente in questo ordine).
(Usare pure la formula $\int \sqrt{1-t^2}\,dt = (\operatorname{arcsen} t + t\sqrt{1-t^2})/2$).

Punti: 15, 12, 15.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Prova Scritta del 27 novembre 2000

Svolgimento

1. La funzione

$$f(x,y) := \frac{1}{1+(x+1)^2+2y^2} - \frac{1}{1+(x-1)^2+2y^2} = \frac{1+(x-1)^2+2y^2-1-(x+1)^2-2y^2}{\big(1+(x+1)^2+2y^2\big)\big(1+(x-1)^2+2y^2\big)} =$$
$$= \frac{-4x}{(2+x^2+2y^2+2x)(2+x^2+2y^2-2x)} = \frac{-4x}{(2+x^2+2y^2)^2-(2x)^2} =$$
$$= \frac{-4x}{4+x^4+4y^4+4x^2+8y^2+4x^2y^2-4x^2} = \frac{-4x}{x^4+4y^4+4x^2y^2+8y^2+4}$$

è definita e di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}^2$ perché i denominatori sono polinomi sempre > 0. Simmetrie facili della f:

$$f(x,-y) = f(x,y)\,, \qquad f(-x,y) = -f(x,y) \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}\,.$$

L'insieme $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| \le 2, |y| \le 1\}$ è il rettangolo di vertici $(2,\pm1), (-2,\pm1)$, compreso il bordo. Per il teorema di Weierstraß la f ha minimo e massimo globale su D. Per trovare gli eventuali punti di estremo locale interni a D calcoliamo le derivate parziali prime:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -4\frac{x^4+4y^4+4x^2y^2+8y^2+4-x(4x^3+8xy^2)}{(x^4+4y^4+4x^2y^2+8y^2+4)^2} =$$
$$= -4\frac{x^4+4y^4+4x^2y^2+8y^2+4-4x^4-8x^2y^2}{(x^4+4y^4+4x^2y^2+8y^2+4)^2} = -4\frac{-3x^4+4y^4-4x^2y^2+8y^2+4}{(x^4+4y^4+4x^2y^2+8y^2+4)^2}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x\frac{8y^3+16x^2y+16y}{(x^4+4y^4+4x^2y^2+8y^2+4)^2} = \frac{32xy\overbrace{(x^2+2y^2+2)}^{>0}}{\underbrace{(x^4+4y^4+4x^2y^2+8y^2+4)}_{>0}{}^2}\,.$$

La derivata rispetto a y si annulla solo per $x = 0$ e per $y = 0$. Sull'asse y la derivata rispetto a x non si annulla mai:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -4\frac{4y^4+8y^2+4}{(4y^4+8y^2+4)^2} = -4\frac{1}{4y^4+8y^2+4} = -\frac{1}{(y^2+1)^2} < 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}\,,$$

Dunque non ci sono punti stazionari sull'asse y. Vediamo sull'asse x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = -4\frac{-3x^4+4}{(x^4+4)^2} = 4\frac{3x^4-4}{(x^4+4)^2}\,.$$

Troviamo dove si annulla $f_x(x,0)$:

$$3x^4 - 4 = 0 \iff x^4 = \frac{4}{3} \iff x = \pm\sqrt[4]{\frac{4}{3}} \approx \pm 1{,}07457\,.$$

Poniamo

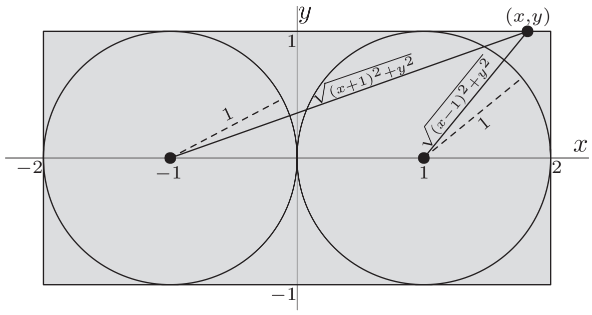
$$x_0 := \sqrt[4]{\frac{4}{3}}\,.$$

I punti stazionari della f interni a D sono $(\pm x_0, 0)$, e la f su di essi vale

$$f(x_0,0) = f\big(\sqrt[4]{4/3},0\big) = -\frac{4\sqrt[4]{4/3}}{(4/3)+4} = -\frac{12\sqrt[4]{4/3}}{16} = -\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{4}{3}} \approx -0{,}805927\,,$$

$$f(-x_0,0) = f\big(-\sqrt[4]{4/3},0\big) = -f\big(\sqrt[4]{4/3},0\big) = \frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{4}{3}} \approx 0{,}805927\,.$$

Rimane da studiare la f sul bordo di D. Col ragionamento che segue possiamo sistemare il bordo senza calcolare derivate.



Il bordo di D è tutto fuori, o al più tangente, rispetto al cerchio di centro $(-1,0)$ e raggio 1, come si vede dalla figura qui sopra. In altre parole, i punti di ∂D distano da $(-1,0)$ almeno 1:

$$\begin{aligned}(x,y)\in\partial D \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{(x+1)^2+y^2}\geq 1 \quad \Rightarrow \quad 1+(x+1)^2+2y^2\geq 1+1=2 \quad \Rightarrow\\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{1+(x+1)^2+2y^2}\leq\frac{1}{2} \quad \Rightarrow\\ &\Rightarrow \quad f(x,y)=\frac{1}{1+(x+1)^2+2y^2}-\underbrace{\frac{1}{1+(x-1)^2+2y^2}}_{>0}<\frac{1}{2}<f(-x_0,0)\,.\end{aligned}$$

Su ∂D la funzione vale quindi strettamente meno che nel punto $(-\sqrt[4]{4/3},0)$. Di conseguenza il punto di massimo globale di f su D non può appartenere a ∂D. Similmente il bordo di D è tutto fuori, o al più tangente, anche rispetto al cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1. Pertanto possiamo scrivere

$$\begin{aligned}(x,y)\in\partial D \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{(x-1)^2+y^2}\geq 1 \quad \Rightarrow \quad 1+(x-1)^2+2y^2\geq 1+1=2 \quad \Rightarrow\\ &\Rightarrow \quad -\frac{1}{1+(x-1)^2+2y^2}\geq-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow\\ &\Rightarrow \quad f(x,y)=\underbrace{\frac{1}{1+(x+1)^2+2y^2}}_{>0}-\frac{1}{1+(x-1)^2+2y^2}>-\frac{1}{2}>f(x_0,0)\,.\end{aligned}$$

Nei punti sul bordo di D la funzione vale strettamente di più che nel punto $(x_0,0)$. Pertanto nemmeno il punto di minimo globale di f su D può essere sul bordo. Scartato il bordo, rimangono soltanto i due punti $(\pm x_0,0)$ come candidati ad essere i punti (che esistono di sicuro) di massimo e minimo globale. Conclusione: $(x_0,0)$ è il punto di minimo globale e $(-x_0,0)$ è il punto di massimo globale di f su D.
Il resto dello svolgimento di questo esercizio non è necessario per rispondere ai quesiti posti nel testo. Se non si sfrutta il trucco della distanza dai punti $(\pm1,0)$, si può sempre studiare esplicitamente la funzione sul bordo di D. Cominciamo dal segmento S_1 che congiunge $(-2,1)$ con $(2,1)$:

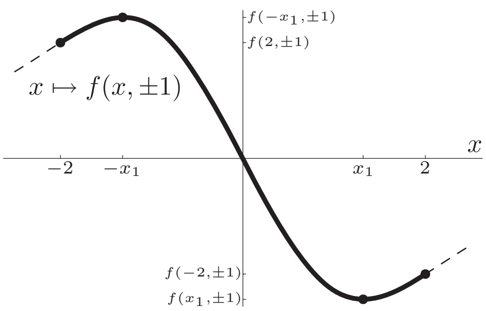
$$\begin{aligned}g_1(x):=f(x,1)&=-\frac{4x}{x^4+4+4x^2+8+4}=-\frac{4x}{x^4+4x^2+16}\,.\\ g_1'(x)=f_x(x,1)&=-4\frac{-3x^4+4-4x^2+8+4}{(x^4+4+4x^2+8+4)^2}=4\frac{3x^4+4x^2-16}{(x^4+4x^2+16)^2}\,.\end{aligned}$$

Troviamo gli zeri della derivata prima di g_1:

$$g_1'(x)=0 \iff x^2=\frac{-2\pm\sqrt{4+16\cdot3}}{3}=\frac{-2\pm2\sqrt{13}}{3} \iff x=\pm\underbrace{\sqrt{\frac{-2+2\sqrt{13}}{3}}}_{=:x_1}\approx\pm1{,}31797\,.$$

Poiché

$$3x^4+4x^2-16=3(x-x_1)(x+x_1)\underbrace{\left(x^2-\frac{-2-2\sqrt{13}}{3}\right)}_{>0},$$



la g_1 è crescente su $[-2,-x_1]$ e su $[x_1,2]$, ed è decrescente su $[-x_1,x_1]$. I valori di f in $(\pm2,1)$ e $(\pm x_1,1)$ sono

$$f(\pm2,1) = \mp\frac{1}{6} \approx \mp 0{,}166667\,,$$
$$f(\pm x_1,1) = \mp\frac{\sqrt{26\sqrt{13}-70}}{24} \approx \mp 0{,}203034\,.$$

La restrizione di f al segmento S_1 ha pertanto minimo globale in $(x_1,1)$ e massimo globale in $(-x_1,1)$. I valori di f in $(\pm x_0,0)$ però battono i valori su S_1. Per la simmetria $f(x,-y)=f(x,y)$, lo stesso si può dire dei valori di f sul segmento che congiunge $(-2,-1)$ con $(2,-1)$.

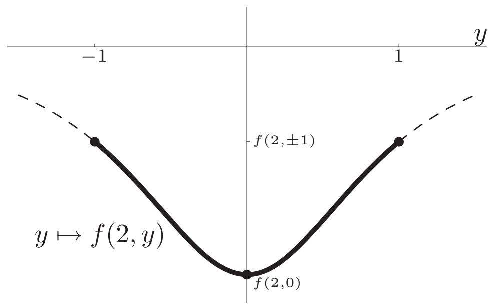
Studiamo la f sul segmento S_2 che congiunge $(2,-1)$ con $(2,1)$:

$$g_2(y) := f(2,y) = \frac{-4\cdot 2}{2^4+4y^4+4\cdot 2^2y^2+8y^2+4} = -\frac{8}{20+4y^4+24y^2} = -\frac{2}{y^4+6y^2+5}\,,$$
$$g_2'(y) = f_y(2,y) = \frac{32\cdot 2y(2^2+2y^2+2)}{(2^4+4y^4+4\cdot 2^2y^2+8y^2+4)^2} = \frac{128y(y^2+3)}{(20+4y^4+24y^2)^2} = \frac{8y(y^2+3)}{(y^4+6y^2+5)^2}\,.$$

Il segno di $g_2'(y)$ coincide col segno di y. Quindi g_2 su $[-1,1]$ ha minimo globale in 0 e massimo globale in ±1. I valori di f corrispondenti sono $f(2,\pm1)=f(2,1)=-1/6$, già calcolato, e

$$f(2,0) = \frac{-4\cdot 2}{2^4+4} = -\frac{8}{20} = -\frac{2}{5} = -0{,}4\,.$$

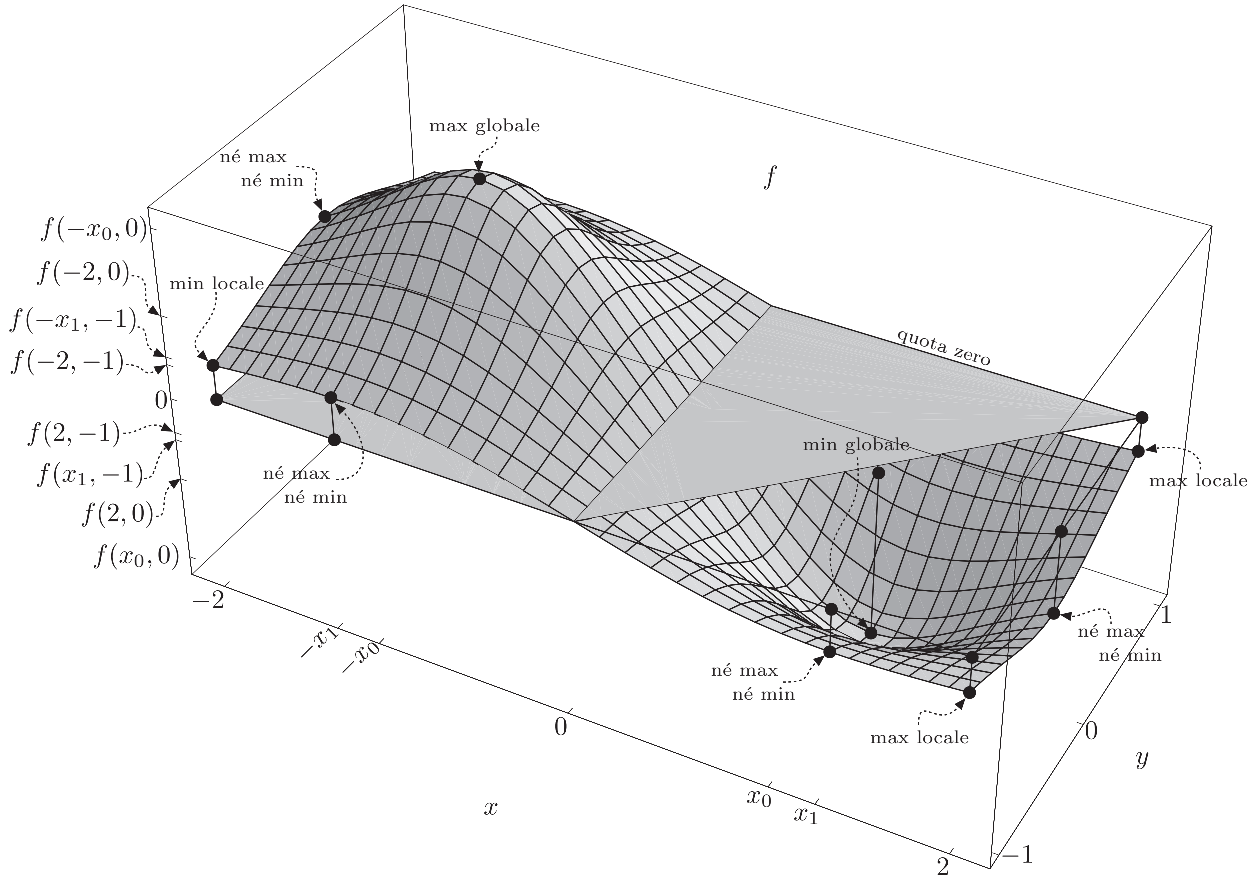
Tali valori di f sono strettamente compresi fra i valori di f nei due punti stazionari $(\pm\sqrt[4]{4/3},0)$. Quindi su C_2 non viene raggiunto né il minimo né il massimo globale di f su D. Analogamente si procede per il segmento fra $(-2,-1)$ e $(-2,1)$, sfruttando la simmetria $f(-x,y)=-f(x,y)$.



Nessuno dei punti di frontiera $(\pm x_0,-1)$, $(\pm x_0,1)$ è punto di massimo o minimo locale per f considerata su D, perché nella direzione orizzontale sono punti di massimo mentre nella direzione verticale sono di minimo, o viceversa. Si può verificare che i vertici $(-2,\pm1)$ sono punti di minimo locale, mentre i vertici $(2,\pm1)$ sono di massimo locale, sempre per f su D.

Per curiosità calcoliamo le derivate seconde di f nei due punti stazionari:

$$f_{xx}(x,0) = \frac{\partial}{\partial x}\big(f_x(x,0)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(4\frac{3x^4-4}{(x^4+4)^2}\Big) = 4\frac{12x^3(x^4+4)^2-(3x^4-4)\cdot 2(x^4+4)\cdot 4x^3}{(x^4+4)^4} =$$
$$= 16x^3\frac{3(x^4+4)-2(3x^4-4)}{(x^4+4)^3} = 16x^3\frac{3x^4+12-6x^4+8}{(x^4+4)^3} = -\frac{16x^3(3x^4-20)}{(x^4+4)^3}\,,$$
$$f_{xx}\big(-\sqrt[4]{4/3},0\big) = -\frac{16(4/3)^{3/4}\big(3(4/3)-20\big)}{\big((4/3)+4\big)^3} = \frac{16^2(4/3)^{3/4}}{(16/3)^3} = \frac{3^3(4/3)^{3/4}}{16} =$$
$$= 3^{9/4}4^{-5/4} = \frac{9}{4}\sqrt[4]{\frac{3}{4}} \approx 2{,}09386\,,$$
$$f_{xx}\big(\sqrt[4]{4/3},0\big) = -f_{xx}\big(-\sqrt[4]{4/3},0\big) = -\frac{9}{4}\sqrt[4]{\frac{3}{4}} \approx -2{,}09386\,,$$
$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\big(f_y(x,y)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{32xy(x^2+2y^2+2)}{(x^4+4y^4+4x^2y^2+8y^2+4)^2}\Big) =$$
$$= y\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{32x(x^2+2y^2+2)}{(x^4+4y^4+4x^2y^2+8y^2+4)^2}\Big)\,,$$



$$
\begin{aligned}
f_{xy}(x,0) &= 0\cdot(\cdots) = 0\,,\\
f_{xy}\big(\pm\sqrt[4]{4/3},0\big) &= 0\,,\\
f_{yy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{32xy(x^2+2y^2+2)}{(x^4+4y^4+4x^2y^2+8y^2+4)^2}\Big) =\\
&= \frac{1}{(x^4+4y^4+4x^2y^2+8y^2+4)^4}\Big(\big(32x(x^2+2y^2+2)+32xy\cdot 4y\big)\times\\
&\qquad \times(x^4+4y^4+4x^2y^2+8y^2+4)^2-\\
&\qquad - 32xy(x^2+2y^2+2)\cdot 2(x^4+4y^4+4x^2y^2+8y^2+4)(16y^3+8x^2y+16y)\Big)\,,\\
f_{yy}(x,0) &= \frac{32x(x^2+2)(x^4+4)^2}{(x^4+4)^4} = \frac{32x(x^2+2)}{(x^4+4)^2}\,,\\
f_{yy}\big(-\sqrt[4]{4/3},0\big) &= -32\frac{\sqrt{4/3}+2}{\big((4/3)+4\big)^2}\sqrt[4]{\frac{4}{3}} = -32\frac{9}{16^2}\frac{2\sqrt{3}+6}{3}\sqrt[4]{\frac{4}{3}} = -\frac{3(\sqrt{3}+3)}{4}\sqrt[4]{\frac{4}{3}} \approx -3{,}81369\,,\\
f_{yy}\big(\sqrt[4]{4/3},0\big) &= -f_{yy}\big(-\sqrt[4]{4/3},0\big) = \frac{3(\sqrt{3}+3)}{4}\sqrt[4]{\frac{4}{3}} \approx 3{,}81369\,.
\end{aligned}
$$

Riassumendo, la matrice hessiana nei punti stazionari è:

$$
f''\big(\pm\sqrt[4]{4/3},0\big) = \pm\begin{pmatrix} \frac{9}{4}\sqrt[4]{\frac{3}{4}} & 0\\ 0 & \frac{3(\sqrt{3}+3)}{4}\sqrt[4]{\frac{4}{3}} \end{pmatrix} \approx \pm\begin{pmatrix} 2{,}09386 & 0\\ 0 & 3{,}81369\end{pmatrix}.
$$

Questo conferma, anche se non c'era bisogno ai nostri scopi, che $(-\sqrt[4]{4/3},0)$ è un punto di massimo locale, mentre $(\sqrt[4]{4/3},0)$ è di minimo locale.

2. L'equazione differenziale $x'' = -4x^3 + 2x$ è della forma

$$x''(t) = f\big(x(t)\big), \qquad \text{con } f(x) := -4x^3 + 2x\,,$$

ed è quindi di tipo newtoniano. Ponendo $y(t) := x'(t)$ si può riscrivere l'equazione del secondo ordine come un sistema del primo ordine:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = f(x(t)) \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono quelli in cui si annullano i secondi membri, cioè in cui $y = 0$ e $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \iff -4x^3 + 2x = 0 \iff x(2x^2 - 1) = 0 \iff \Big(x = 0 \text{ oppure } x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\,.$$

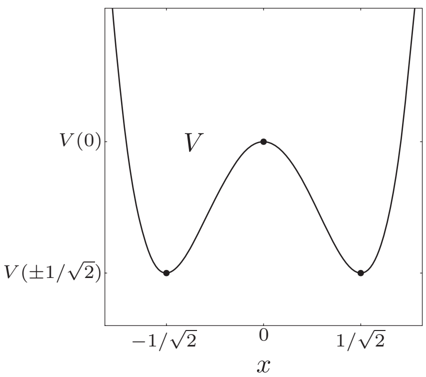
L'energia potenziale è (a meno di costanti additive arbitrarie)

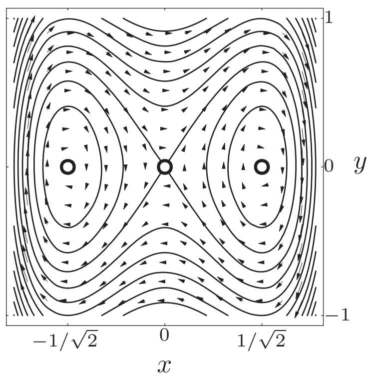
$$V(x) := -\int_0^x f(s)\,ds = -\int_0^x (-4s^3 + 2s)dy = -\big[-s^4 + s^2\big]_0^x = x^4 - x^2\,.$$

Studiamo brevemente la V: la derivata è

$$V'(x) = -f(x) = 4x^3 - 2x = 4x\Big(x^2 - \frac{1}{2}\Big) = -4x\Big(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\Big(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\,.$$

La V è decrescente su $]-\infty, -1/\sqrt{2}]$ e su $[0, 1/\sqrt{2}]$, e crescente $[-1/\sqrt{2}, 0]$ e su $[1/\sqrt{2}, +\infty[$. I punti di equilibrio $\pm 1/\sqrt{2}$ sono di minimo per V, e quindi sono stabili, mentre lo 0 è instabile, perché punto di massimo. A sinistra qui sotto c'è un grafico dell'energia potenziale, e a destra il campo associato al sistema del primo ordine, con alcune traiettorie del sistema.





Dimostrare che $a^4 - a^2 \geq (a^4 - 1)/2$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ è facile:

$$(a^4 - a^2) - \frac{a^4 - 1}{2} = \frac{2a^4 - 2a^2 - a^4 + 1}{2} = \frac{a^4 - 2a^2 + 1}{2} = \frac{(a^2 - 1)^2}{2} \geq 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}\,.$$

Sappiamo che l'energia totale

$$E\big(x, y\big) := \frac{1}{2}y^2 + V(x) = \frac{1}{2}y^2 + x^4 - x^2$$

(mostrata nel grafico in cima alla pagina seguente con evidenziate le linee di livello) è costante lungo le soluzioni. Si può scrivere

$$E\big(x(t_0), x'(t_0)\big) = E\big(x(t), x'(t)\big) = \frac{1}{2}x'(t)^2 + x(t)^4 - x(t)^2 \geq \frac{1}{2}x'(t)^2 + \frac{x(t)^4 - 1}{2} \geq \frac{x(t)^4 - 1}{2}\,,$$

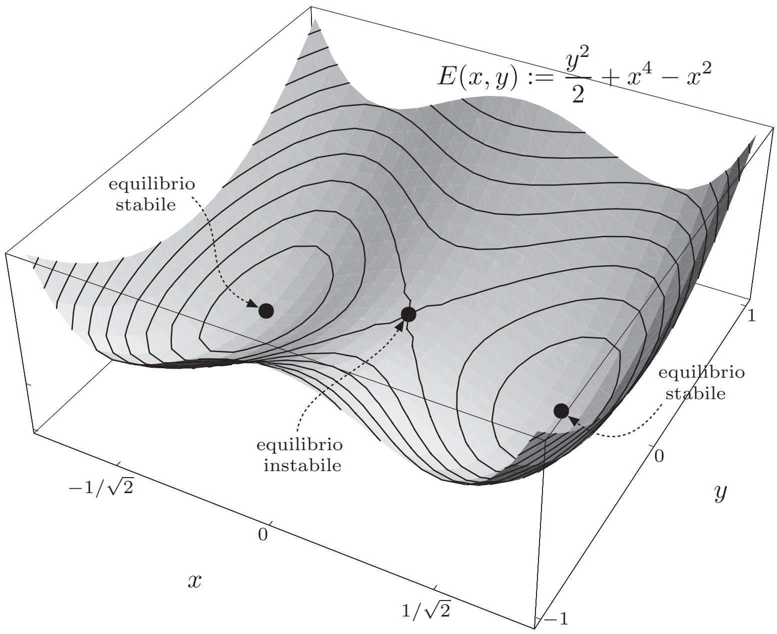
da cui

$$x(t)^4 \leq E\big(x(t_0), x'(t_0)\big) + \frac{1}{2}\,,$$

e successivamente

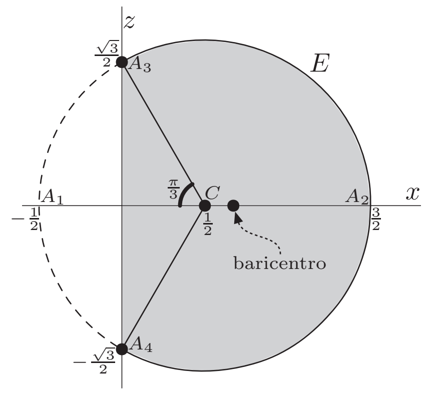
$$\big|x(t)\big| \leq \sqrt[4]{E\big(x(t_0), x'(t_0)\big) + \frac{1}{2}} \qquad \forall t\,.$$

Poiché il secondo membro è finito e non dipende da t, la soluzione $x(t)$ è limitata.



3. L'insieme

$$E := \Big\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 + z^2 \leq 1\Big\} =$$
$$= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq \frac{3}{2},$$
$$-\sqrt{1 - \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2} \leq z \leq \sqrt{1 - \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2}\Big\}$$



è la parte del cerchio di centro $C := (1/2, 0)$ e raggio 1 che sta a destra dell'asse verticale. Il cerchio interseca gli assi in $A_1 := (-1/2, 0)$, $A_2 := (3/2, 0)$, $A_3 = (0, \sqrt{3}/2)$, $A_4 := (0, -\sqrt{3}/2)$. L'angolo A_1CA_3 è di 60 gradi, cioè $\pi/3$. Possiamo calcolare l'area di D dalla geometria elementare come somma dell'area del settore circolare di estremi A_3 e A_4 e comprendente A_2 (quindi di ampiezza 2/3 di angolo giro), più l'area del triangolo CA_3A_4:

$$\operatorname{area}(E) = \frac{2}{3}\pi \cdot 1^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot 2\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{12} \approx 2{,}52741\,.$$

Possiamo arrivare allo stesso risultato con un integrale:

$$\operatorname{area}(E) = \int_E 1\,dx\,dz = \int_0^{3/2} dx \int_{-\sqrt{1-(x-\frac{1}{2})^2}}^{\sqrt{1-(x-\frac{1}{2})^2}} 1\,dz = \int_0^{3/2} 2\sqrt{1 - \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2}\,dx\,.$$

Facciamo il cambio di variabile $t = x - 1/2$, $dt = dx$:

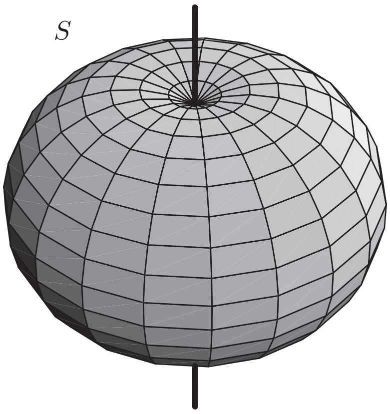
$$\operatorname{area}(E) = \int_{-1/2}^{1} 2\sqrt{1 - t^2}\,dt = 2\Big[\frac{\operatorname{arcsen} t + t\sqrt{1 - t^2}}{2}\Big]_{-1/2}^{1} =$$
$$= \operatorname{arcsen} 1 + \sqrt{1 - 1} - \operatorname{arcsen}\Big(-\frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} =$$
$$= \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{12}\,.$$

È chiaro per simmetria che baricentro di E è sull'asse x. Calcoliamo

$$\int_E x\,dx\,dz = \int_0^{3/2} dx \int_{-\sqrt{1-(x-\frac{1}{2})^2}}^{\sqrt{1-(x-\frac{1}{2})^2}} x\,dz = \int_0^{3/2} 2x\sqrt{1-\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2}\,dx\,.$$

Di nuovo cambiamo variabile $t = x - 1/2$, $dt = dx$:

$$\begin{aligned}\int_E x\,dx\,dz = \int_{-1/2}^{1} 2\Big(t+\frac{1}{2}\Big)\sqrt{1-t^2}\,dt = \int_{-1/2}^{1} 2t\sqrt{1-t^2}\,dt + \int_{-1/2}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt = \\ = \Big[-\frac{(1-t^2)^{3/2}}{3/2}\Big]_{-1/2}^{1} + \frac{1}{2}\,\mathrm{area}(E) = \frac{2}{3}\Big(1-\frac{1}{4}\Big)^{3/2} + \frac{8\pi+3\sqrt{3}}{24} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{8\pi+3\sqrt{3}}{24} = \\ = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{8\pi+3\sqrt{3}}{24} = \frac{8\pi+9\sqrt{3}}{24}\,.\end{aligned}$$



Quindi l'ascissa del baricentro di E è

$$\begin{aligned}x_{\mathrm{barE}} = \frac{1}{\mathrm{area}(E)}\int_E x\,dx\,dz = \frac{(8\pi+9\sqrt{3})/24}{(8\pi+3\sqrt{3})/12} = \\ = \frac{8\pi+9\sqrt{3}}{16\pi+6\sqrt{3}} \approx 0{,}671327\,.\end{aligned}$$

Il volume del solido S si può trovare col teorema di Pappo:

$$\begin{aligned}\mathrm{volume}(S) = 2\pi x_{\mathrm{barE}}\cdot\mathrm{area}(E) = 2\pi\frac{8\pi+9\sqrt{3}}{16\pi+6\sqrt{3}}\cdot\frac{8\pi+3\sqrt{3}}{12} = \\ = \frac{\pi(8\pi+9\sqrt{3})}{12} \approx 10{,}6608\,.\end{aligned}$$

È chiaro per simmetria che il baricentro di S è l'origine.