Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1999/2000

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Prova Scritta del 19 settembre 2000

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Il passeggero di un aereo di linea può portare con sé come bagaglio a mano un oggetto per il quale la somma di larghezza, lunghezza e spessore non superi i 115 centimetri. Qual'è il massimo volume ammesso?

2. Discutere, al variare del parametro reale a, il comportamento qualitativo del sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a-1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

3. Calcolare il volume del solido

$$V := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x+1)^2 + y^2 \leq z \leq 2x+5\right\}.$$

Consideriamo poi la superficie

$$S := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x+1)^2 + y^2 = z, \ z \leq 2x+5\right\}.$$

Se piove sopra S, quanta acqua ci si raccoglie? (La forza di gravità punta nella direzione negativa dell'asse z).

Punti: 15, 10, 15.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1999/2000

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Prova Scritta del 19 settembre 2000

Svolgimento

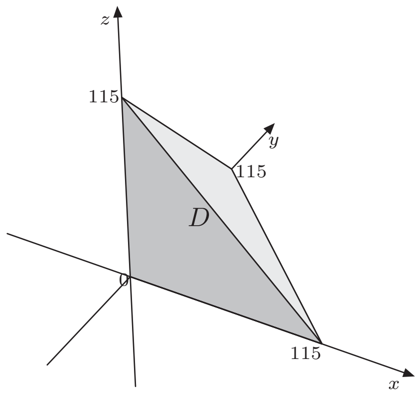
1. Restringiamo l'attenzione ai bagagli che si possono assimilare a parallelepipedi rettangoli ("scatole", per brevità). Per altre forme non sarebbe chiarissimo cosa s'intende per lunghezza, larghezza e spessore. Si potrebbe interpretare la regola dicendo così: si può portare un bagaglio che possa entrare dentro una scatola la cui somma delle dimensioni non superi 115 centimetri. In tal caso è chiaro che se un bagaglio è ammissibile, allora è ammessa anche la scatola che lo contiene, e che ha volume non inferiore. Insomma, non si perde volume, anzi, se ne guadagna, se ci si limita ai bagagli scatolari.

Siano allora x, y, z le tre dimensioni della scatola. L'insieme D delle dimensioni consentite è

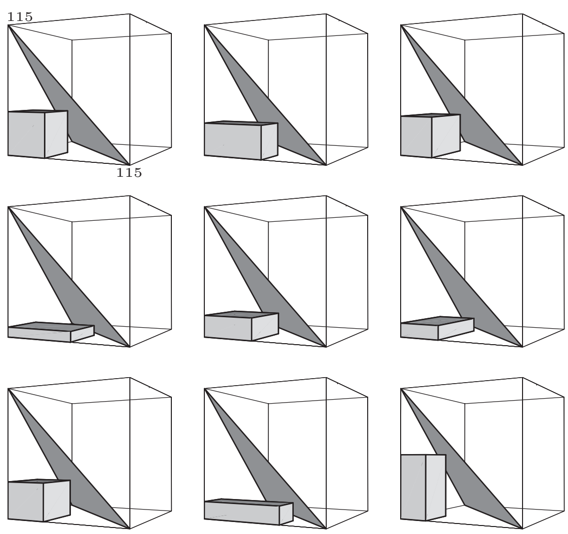
$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 115\}.$$

che per la cronaca è il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(115,0,0)$, $(0,115,0)$ e $(0,0,115)$, raffigurato qui accanto. La funzione che vogliamo massimizzare su D è

$$v(x,y,z) := xyz\,.$$



La v ha certamente massimo globale su D perché v è continua e D è chiuso e limitato. Giacché nel corso non abbiamo visto esempi di ottimizzazione in tre variabili, riduciamo il problema a due variabili notando che il massimo di v su D viene certamente raggiunto per una tripla (x_0, y_0, z_0) per la quale $x_0 + y_0 + z_0 = 115$. Infatti, quando $x_0 + y_0 + z_0 < 115$, possiamo ingrandire una delle tre dimensioni (per esempio, portare la z a $z_1 := 115 - x_0 - y_0 > z_0$) ritrovandoci con una scatola ammissibile di volume maggiore. Nelle figure qui sotto sono ritratte varie scatole per le quali la somma delle dimensione è 115. Un vertice è nell'origine, tre facce giacciono sui tre piani xy, xz e yz, e il vertice opposto sta sul piano $x + y + z = 115$.



Insomma, possiamo supporre che $z = 115 - x - y$, e il nostro problema si restringe alle due variabili x, y, che variano su

$$D' := \{(x,y) \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 115 - x - y \geq 0\} = \\ = \{(x,y) \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 115\},$$

e la nuova funzione da massimizzare è

$$f(x,y) := v(x,y,115-x-y) = xy(115-x-y)\,.$$

L'insieme D' è il triangolo pieno e chiuso di vertici $(0,0)$, $(115,0)$, $(0,115)$. La funzione f è un polinomio, che vale 0 su tutti e tre i lati del triangolo, ed è > 0 all'interno. Quindi il massimo globale di f è raggiunto all'interno, in un punto in cui si annullano le derivate parziali. Le derivate parziali sono

$$f_x(x,y) = y(115-x-y) - xy = y(115-2x-y)\,,$$
$$f_y(x,y) = x(115-x-y) - xy = x(115-x-2y)\,.$$

Risolviamo il sistema $f_x = 0$, $f_y = 0$. Poiché a noi interessano solo i punti interni a D', possiamo supporre che x, y siano > 0, e quindi il sistema si riduce direttamente a

$$\begin{cases} 115 - 2x - y = 0 \\ 115 - x - 2y \end{cases} \iff \begin{cases} y = 115 - 2x \\ 115 - x - 2(115 - 2x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 115 - 2x \\ x = 115/3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 115/3 \\ y = 115/3. \end{cases}$$

(Per curiosità, i punti critici non interni a D' sono i vertici del triangolo). L'unico punto critico di f interno a D' è $(115/3, 115/3) = (38{,}\overline{3}, 38{,}\overline{3})$, che è quindi necessariamente il punto di massimo globale, in cui la funzione vale

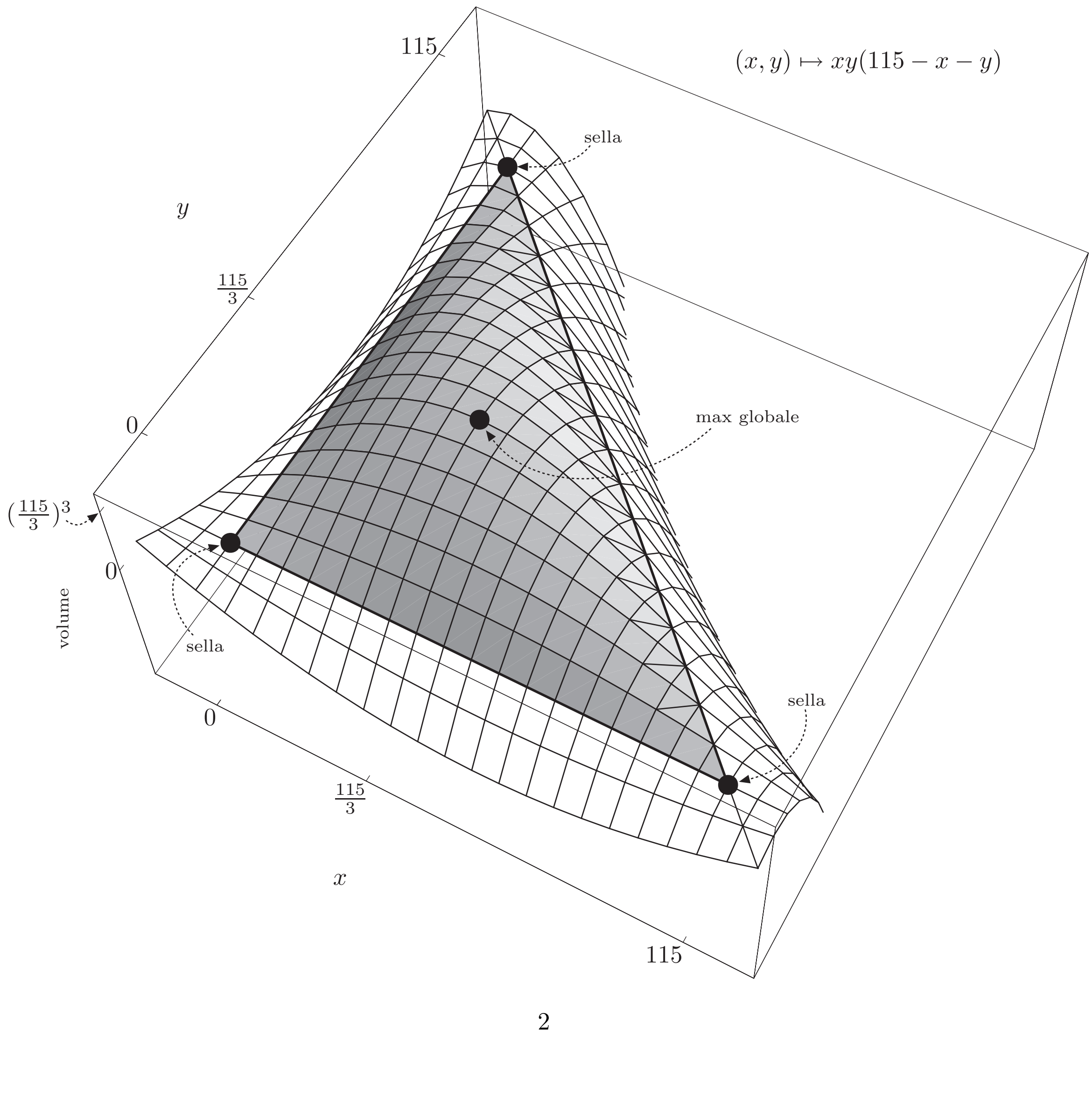
$$f\Big(\frac{115}{3}, \frac{115}{3}\Big) = \frac{115}{3} \cdot \frac{115}{3} \cdot \Big(115 - \frac{115}{3} - \frac{115}{3}\Big) = \Big(\frac{115}{3}\Big)^3 = 56328{,}\overline{703}\ \mathrm{cm}^2.$$

In termini del problema originario in tre variabili, possiamo concludere che il volume massimo trasportabile è di $(115/3)^3$ centimetri cubi (poco più di 56 litri) e lo si raggiunge quando la scatola è cubica (di lato $115/3 = 38{,}\overline{3}$ centimetri).

Non è necessario, ma se si calcola la matrice hessiana di f nei quattro punti critici si trova

$$f''(115/3, 115/3) = \frac{115}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad f''(0,0) = 115\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$f''(115, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad f''(0, 115) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo conferma che $(115/3, 115/3)$ è punto di massimo locale, mentre i tre vertici di D' sono punti di sella. Qui sotto c'è un grafico di f.



Chi sa il seguente fatto può risolvere il problema molto velocemente: *la media geometrica di n numeri ≥ 0 è sempre minore o uguale alla media aritmetica, e le due medie coincidono soltanto quando i numeri sono tutti uguali fra loro.* Nel nostro caso i tre numeri sono x, y, z, la media geometrica è $\sqrt[3]{xyz}$, quella aritmetica è $(x+y+z)/3$, che è $\leq 115/3$. Quindi $\sqrt[3]{xyz} \leq (x+y+z)/3 \leq 115/3$, e vale l'uguaglianza $\sqrt[3]{xyz} = (x+y+z)/3$ se e solo se $x = y = z$. Elevando al cubo si ha che $xyz \leq (115/3)^3$ e inoltre l'uguaglianza vale quando $x = y = z$ e $x + y + z = 115/3$, ossia quando $x = y = z = 115/3$.

2. Il comportamento qualitativo del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a-1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

si decide dagli autovalori della matrice. Il polinomio caratteristico è

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & a+1 \\ a-1 & a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)^2 - (a^2-1)\,,$$

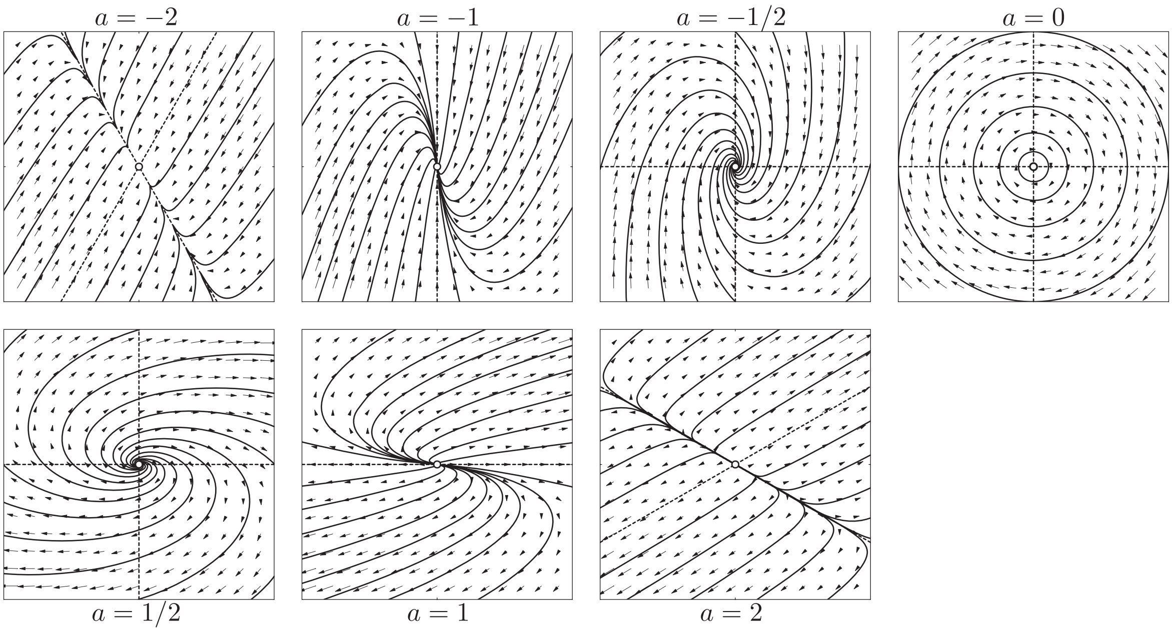
i cui zeri si possono trovare così:

$$(a-\lambda)^2 - (a^2-1) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad a-\lambda = \pm\sqrt{a^2-1} \quad\Longleftrightarrow\quad \lambda = a \pm \sqrt{a^2-1}\,.$$

Quando $a \leq -1$ o $a \geq 1$ gli autovalori sono reali. Quando $a \geq 1$ gli autovalori sono entrambi positivi, in quanto $0 \leq a^2 - 1 < a^2$ e quindi $\sqrt{a^2-1} < a$, da cui $0 < a - \sqrt{a^2-1} \leq a + \sqrt{a^2-1}$. Quando $a \leq -1$ analogamente gli autovalori sono entrambi negativi. Gli autovalori sono distinti per $a \neq \pm 1$. Per $a = \pm 1$ gli autovalori coincidono, ma la matrice non è diagonale.
Quando $-1 < a < 1$ gli autovalori sono complessi coniugati, con parte reale a.
Dalla teoria generale dei sistemi lineari nel piano abbiamo la seguente classificazione:

(1) per $a < -1$: nodo attrattivo;
(2) per $a = -1$: nodo improprio attrattivo;
(3) per $-1 < a < 0$: spirale attrattiva;
(4) per $a = 0$: centro (traiettorie periodiche);
(5) per $0 < a < 1$: spirale repulsiva;
(6) per $a = 1$: nodo improprio repulsivo;
(7) per $a > 1$: nodo repulsivo.

Seguono i diagrammi di fase di un caso rappresentativo per ciascuna classe.



3. Cerchiamo di ricondurre il solido

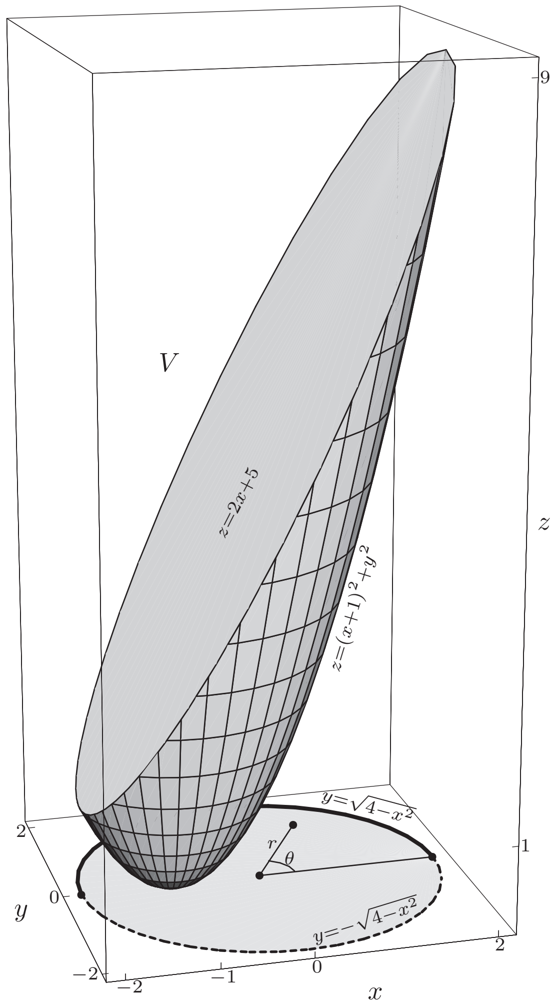
$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x+1)^2 + y^2 \le z \le 2x+5\}$$

in forma normale. La z è già pronta. Bisogna ora trovare la proiezione di V sul piano xy. Un punto $(x,y,0)$ sta nella proiezione se e solo se esiste z tale che $(x+1)^2 + y^2 \le z \le 2x+5$, cioè se e solo se $(x+1)^2+y^2 \le 2x+5$, cioè ancora

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 \le 2x + 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + y^2 \le 4\,.$$

La proiezione risulta essere il disco di centro l'origine e raggio 2. Questa si scrive facilmente in forma normale, per cui possiamo esprimere V per esempio come

$$V = \{(x,y,z) \;:\; -2 \le x \le 2\,,\; -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{3-x^2},\; (x+1)^2 + y^2 \le z \le 2x+5\}\,.$$



Ora il conto si imposta anche senza intuizione spaziale:

$$\text{volume}\,V = \int_V dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{-2}^{2} dx \int_{-4-x^2}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{(x+1)^2+y^2}^{2x+5} dz =$$

$$= \int_{-2}^{2} dx \int_{-4-x^2}^{\sqrt{4-x^2}} \big((2x+5)-$$

$$- (x^2+2x+1+y^2)\big)dy =$$

$$= \int_{-2}^{2} dx \int_{-4-x^2}^{\sqrt{4-x^2}} (4-x^2-y^2)dy =$$

$$= \int_{-2}^{2} \Big[(4-x^2)y - \frac{y^3}{3}\Big]_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= 2\int_{-2}^{2} \Big((4-x^2)\sqrt{4-x^2} - \frac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}\Big)dx = \frac{4}{3}\int_{-2}^{2} \sqrt{(4-x^2)^3}\,dx = \;(\text{sostituzione } x = 2\cos t)$$

$$= \frac{4}{3}\int_{\pi}^{0} \sqrt{(4-4\cos^2 t)^3}\cdot(-2\,\mathrm{sen}\,t)\,dt = \frac{8}{3}\int_0^{\pi} \sqrt{(4\,\mathrm{sen}^2 t)^3}\cdot \mathrm{sen}\,t\,dt = \frac{8}{3}\int_0^{\pi} 8\,\mathrm{sen}^4 t\,dt =$$

$$= \frac{64}{3}\int_0^{\pi} (1-\cos^2 t)\,\mathrm{sen}^2 t\,dt = \frac{64}{3}\int_0^{\pi}\Big(\mathrm{sen}^2 t - \frac{\mathrm{sen}^2 2t}{4}\Big)dt = \frac{64}{3}\int_0^{\pi}\Big(\frac{1-\cos 2t}{2} - \frac{1-\cos 4t}{8}\Big)dt =$$

$$= \frac{64}{3}\Big[\frac{3}{8}t - \frac{\mathrm{sen}\,2t}{4} + \frac{\mathrm{sen}\,4t}{32}\Big]_0^{\pi} = \frac{64}{3}\cdot\frac{3}{8}\pi = 8\pi\,.$$

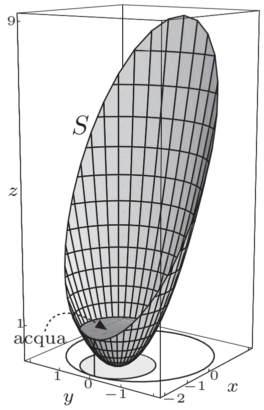
Il cambio di variabili $x = 2\cos t$ è lecito in quanto biiettivo da $t \in [0,\pi]$ a $x \in [-2,2]$, e ivi inoltre $\mathrm{sen}\,t \ge 0$, per cui la radice quadrata di $\mathrm{sen}^6 t$ è $\mathrm{sen}^3 t$.

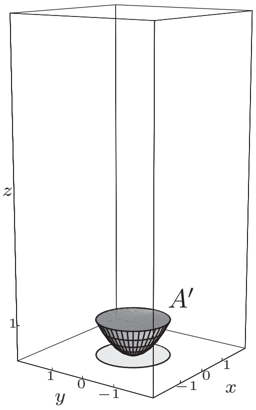
Se osserviamo che il dominio su xy è un disco di centro l'origine e che l'integrando a un certo punto veniva x^2+y^2-4, i conti sono molto più semplici usando le coordinate polari sul piano xy:

$$\text{volume}\,V = \int_V dx\,dy\,dz = \int_{\{(x,y)\,:\,x^2+y^2\le 4\}} dx\,dy \int_{(x+1)^2+y^2}^{2x+5} dz =$$

$$= \int_{\{x^2+y^2\le 4\}} \big((2x+5)-(x+1)^2-y^2\big)dx\,dy = \int_{\{x^2+y^2\le 4\}} (4-x^2-y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4-r^2)r\,dr = 2\pi\int_0^2 (4r-r^3)\,dr = 2\pi\Big[2r^2 - \frac{r^4}{4}\Big]_0^2 = 2\pi\Big(2^3 - \frac{2^4}{2^2}\Big) = 8\pi\,.$$





Per capire quant'acqua si può raccogliere sulla superficie

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x+1)^2 + y^2 = z,\ z \le 2x + 5\},$$

bisogna averne capito almeno vagamente la forma, che è nella figura a sinistra qui accanto. Si tratta di un recipiente in cui il bordo non è tutto alla stess'altezza. L'acqua comincia ad accumularsi vicino al vertice del paraboloide, che è in $(-1, 0, 0)$, e si alza fin quando il livello tocca l'orlo. Poi comincia a traboccare. Bisogna trovare il punto più basso del bordo. Visto che il bordo è contenuto nel piano $z = 2x + 5$, la z è minima quando la x è minima. Poiché la proiezione del bordo sul piano xy è il cerchio di centro l'origine e raggio 2, il punto con ascissa minima è $(-2, 0, 0)$. La quota in questo punto è $z = 2\cdot(-2)+5 = 1$.

Insomma, l'acqua occuperà il solido seguente:

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x+1)^2 + y^2 \le z \le 1\}.$$

La proiezione di A sul piano xy è il disco di centro $(-1, 0, 0)$ e raggio 1. Conviene traslare A nella direzione dell'asse x in modo che il centro del disco venga nell'origine; il traslato A' ha equazione

$$A' := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 \le z \le 1\},$$

ed ha ovviamente lo stesso volume di A. Il volume di A' si calcola facilmente prendendo nel piano xy le coordinate polari:

$$\begin{aligned}
\operatorname{volume} A' &= \int_{A'} dx\,dy\,dz = \int_{\{(x,y)\,:\,x^2+y^2\le 1\}} dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{1} dz = \int_{\{(x,y)\,:\,x^2+y^2\le 1\}} (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r^2\cos^2\theta - r^2 \operatorname{sen}^2\theta) r\,dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3) dr = \\
&= 2\pi\Big[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\Big]_0^1 = 2\pi\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$