Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Prova Scritta del 1° settembre 2000

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento di identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Trovare i punti di massimo e minimo globale della funzione

$$f(x,y) := \frac{2}{1+x^2+y^2} - \frac{1}{2x^2-3}$$

sull'insieme $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$.

2. Trovare per quali valori del parametro $c \in \mathbb{R}$ l'equazione differenziale

$$\big(3x(t)^2 + 2ct^2 + 2\big)x'(t) + 4tx(t) + c = 0\,,$$

è esatta, e per uno di tali valori risolvere (in forma implicita) il problema di Cauchy con $x(0) = 0$, stabilendo anche se la soluzione è unica e trovando il massimo intervallo su cui è definita.

3. Data la regione del piano xz

$$D := \big\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x \geq 0,\ z \leq x,\ x^2 + z^2 \leq 1\big\}\,,$$

e il solido V ottenuto ruotando D di un angolo giro attorno all'asse z, calcolare area di D, volume di V e coordinate dei baricentri di D e V.

Punti: 15, 10, 15.

Università degli Studi di Udine Anno Accademico 1999/2000

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Prova Scritta del 1° settembre 2000

Svolgimento

1. L'insieme $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| \le 1, \ |y| \le 1\}$ è il quadrato di vertici $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$ e $(-1,1)$. Nella formula che definisce la funzione

$$f(x,y) := \frac{2}{1+x^2+y^2} - \frac{1}{2x^2-3}$$

il primo addendo è il reciproco di un polinomio che non si annulla mai. Il denominatore del secondo addendo invece è un polinomio che si annulla sulle due rette $x = \pm\sqrt{3/2}$, che però sono al di fuori del quadrato E. Quindi f è definita su tutto E ed è di classe C^∞. Dato che E è chiuso e limitato e che f è continua su E, il teorema di Weierstraß ci garantisce che la f ha massimo e minimo globali su E. Si tratta di trovarli.
Cerchiamo i punti critici di f interni ad E. Le derivate parziali prime di f sono

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= -\frac{4x}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{4x}{(2x^2-3)^2} = -4x\frac{(2x^2-3)^2-(1+x^2+y^2)^2}{(1+x^2+y^2)^2(2x^2-3)^2} = \\
&= -4x\frac{(2x^2-3+1+x^2+y^2)(2x^2-3-1-x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2(2x^2-3)^2} = -4x\frac{(3x^2-2+y^2)(x^2-y^2-4)}{(1+x^2+y^2)^2(2x^2-3)^2}\,, \\
f_y(x,y) &= -4y\cdot\underbrace{\frac{1}{1+x^2+y^2}}_{>0}\,.
\end{aligned}$$

La derivata rispetto a y si annulla soltanto sulla retta $y=0$, dove f_x vale

$$f_x(x,0) = -4x\cdot\frac{(3x^2-2)(x^2-4)}{(2x^2-3)^2(1+x^2)^2}\,.$$

La $f_x(x,0)$ si annulla per $x=0$, $x=\pm 2$ e per $x=\pm\sqrt{2/3}$. I punti $(\pm 2, 0)$ sono fuori da E. Pertanto i punti critici di f interni ad E sono i tre seguenti:

$$(0,0), \quad (\pm\sqrt{2/3}, 0)\,.$$

Potremmo calcolare l'hessiana di f in questi punti per vedere se sono massimi o minimi locali o selle, ma non siamo obbligati se il nostro scopo è solo di trovare il massimo e minimo *globale* di f.
Troviamo i punti critici di f sulla frontiera di E. Cominciamo coi due lati verticali:

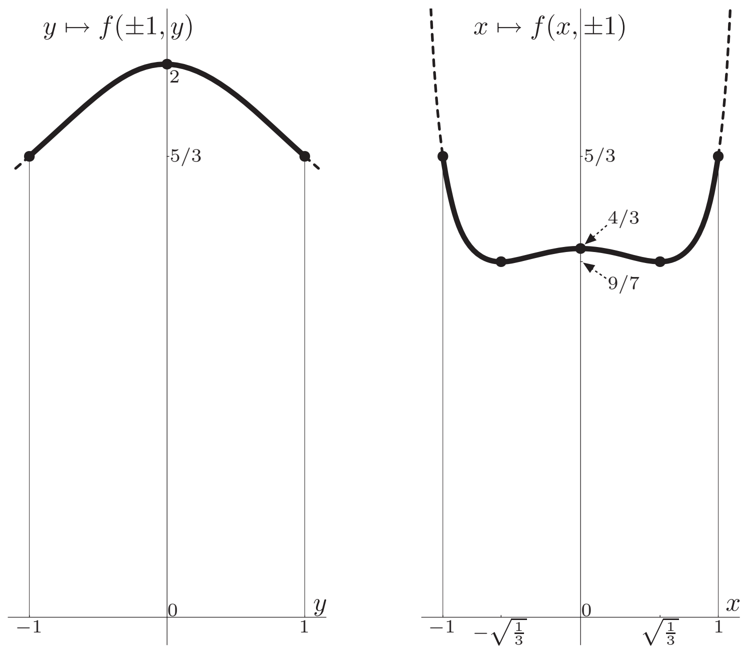
$$g_1(y) := f(\pm 1, y)\,, \qquad g_1'(y) = f_y(\pm 1, y) = -\frac{4y}{(2+y^2)^2}\,.$$

La derivata $g_1'(y)$ si annulla solo per $y=0$. Ricordando che anche gli estremi sono sempre critici, abbiamo i seguenti sei punti critici per f sui due lati verticali:

$$(\pm 1, 0), \quad (\pm 1, -1), \quad (\pm 1, 1)\,.$$

Passiamo ai lati orizzontali:

$$g_2(x) := f(x, \pm 1)\,, \qquad g_2'(x) = f_x(x, \pm 1) = -4x\cdot\frac{(3x^2-1)(x^2-5)^2}{(2x^2-3)^2(2+x^2)^2}\,.$$



La derivata $g_2'(x)$ si annulla per $x = 0$, $x = \pm 1/\sqrt{3}$, $x = \pm\sqrt{5}$. I valori $\pm\sqrt{5}$ sono fuori dal nostro dominio. Gli estremi dei due segmenti orizzontali sono i vertici del quadrato, e sono già stati contati in qualità di estremi dei segmenti orizzontali. Si aggiungono dunque i seguenti sei punti critici di f sui segmenti orizzontali:

$$(0, \pm 1), \qquad (-1/\sqrt{3}, \pm 1), \qquad (1/\sqrt{3}, \pm 1)\,.$$

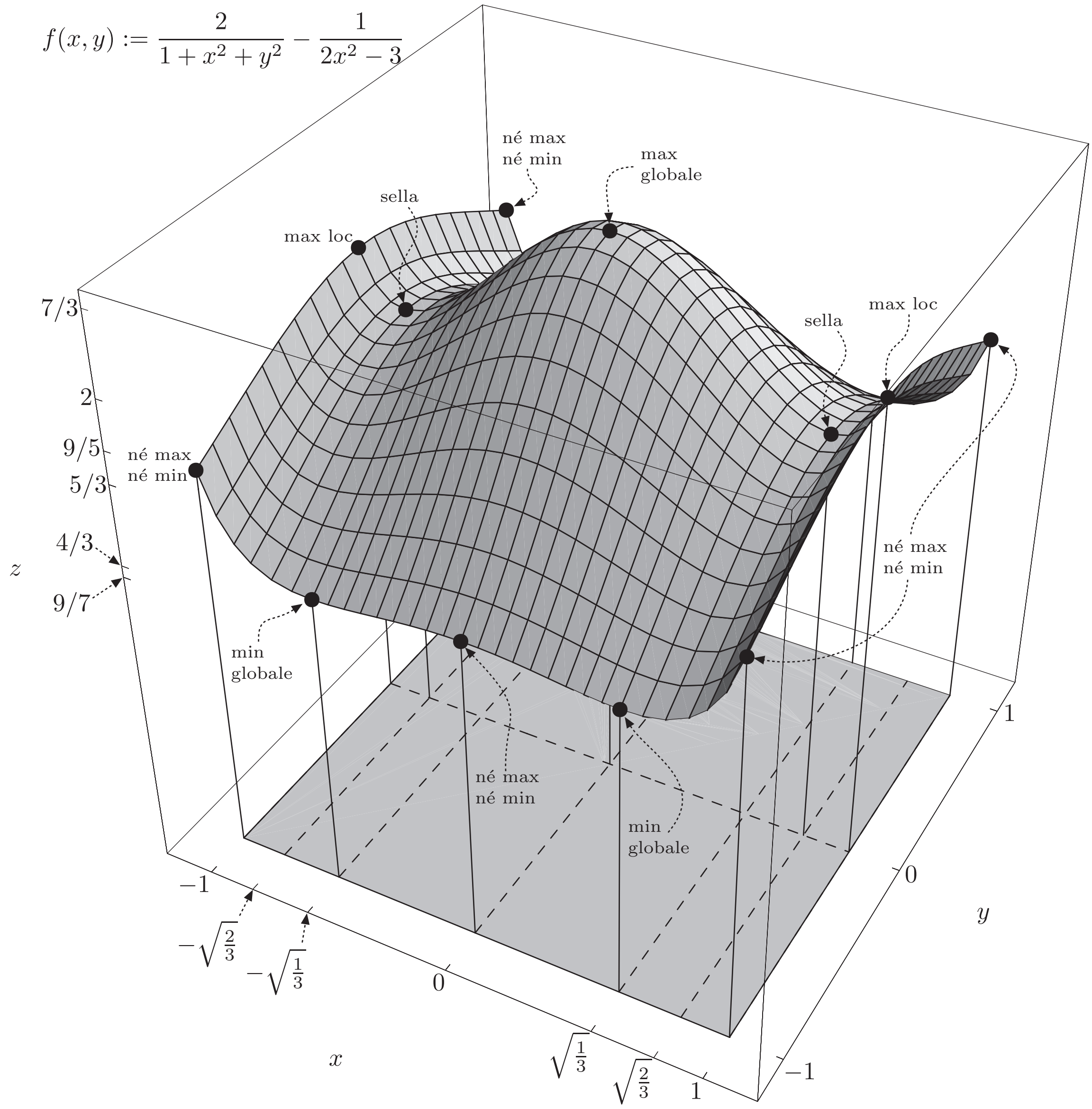
Il massimo e il minimo globale di f su E viene necessariamente assunto in uno dei 15 punti critici. Calcoliamoci sopra la f, tenendo presenti le simmetrie $f(-x, y) = f(x, -y) = f(x, y)$ per risparmiare fatica:

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= \frac{2}{1+0+0} - \frac{1}{0-3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2{,}\overline{3}\,,\\
f(\pm 1,0) &= \frac{2}{1+1+0} - \frac{1}{2-3} = 2\,,\\
f(0,\pm 1) &= \frac{2}{1+0+1} - \frac{1}{0-3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = 1{,}\overline{3}\,,\\
f(\pm\sqrt{2/3},0) &= \frac{2}{1+\frac{2}{3}+0} - \frac{1}{2\cdot\frac{2}{3}-3} = \frac{6}{5} - \frac{3}{4-9} = \frac{6}{5} + \frac{3}{5} = \frac{9}{5} = 1{,}8\,,\\
f(\pm 1,-1) = f(\pm 1,1) &= \frac{2}{1+1+1} - \frac{1}{2-3} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} = 1{,}\overline{6}\,,\\
f(-1/\sqrt{3},\pm 1) = f(1/\sqrt{3},\pm 1) &= \frac{2}{1+\frac{1}{3}+1} - \frac{1}{2\cdot\frac{1}{3}-3} = \frac{6}{7} + \frac{3}{7} = \frac{9}{7} = 1{,}\overline{285714}\,.
\end{aligned}$$

Il valore più piccolo e quello più grande raggiunti da f nei punti critici sono rispettivamente $9/7$ e $7/3$, che pertanto sono il minimo e il massimo globale di f su E. Il massimo globale è assunto nell'origine, mentre il minimo globale è assunto nei punti $(-1/\sqrt{3}, \pm 1)$, $(1/\sqrt{3}, \pm 1)$, che sono di frontiera.
Per curiosità si può calcolare la matrice hessiana nei punti critici interni:

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} -\frac{32}{9} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad f''(\pm\sqrt{2/3},0) = \begin{pmatrix} \frac{864}{125} & 0 \\ 0 & -\frac{36}{25} \end{pmatrix},$$

da cui si vede che i punti $(\pm\sqrt{2/3}, 0)$ sono di sella, mentre è confermato che l'origine è di massimo locale. Si può anche verificare che $(\pm 1, 0)$ sono punti di massimo locale, mentre $(0, \pm 1)$ e i vertici del quadrato non sono né massimi né minimi locali. In cima alla pagina seguente c'è un grafico della f su E.



2. L'equazione differenziale

$$\big(3x(t)^2 + 2ct^2 + 2\big)x'(t) + 4tx(t) + c = 0$$

è della forma $A(t,x)x' + B(t,x) = 0$, con

$$A(t,x) := 3x^2 + 2ct^2 + 2\,, \qquad B(t,x) := 4tx + c\,.$$

L'equazione si dice esatta se esiste una funzione $F(t,x)$ di classe C^2 tale che $F_x(t,x) = A(t,x)$, $F_t(t,x) = B(t,x)$. Per il teorema sulle derivate miste, perché questa F esista bisogna che per ogni t,x valga l'identità

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial B}{\partial x}(t,x)\,,$$

ossia che

$$4ct = \frac{\partial A}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial B}{\partial x}(t,x) = 4t\,, \quad \text{cioè ancora} \quad 4t(c-1) = 0\,.$$

Quest'ultima uguaglianza vale per ogni t se e solo se $c = 1$. Vediamo se per $c = 1$ esiste davvero la F: integrando rispetto a x

$$F_x(t,x) = A(t,x) = 3x^2 + 2t^2 + 2 \quad \iff \quad F(t,x) = x^3 + 2xt^2 + 2x + \varphi(t)$$

e derivando il risultato rispetto a t:

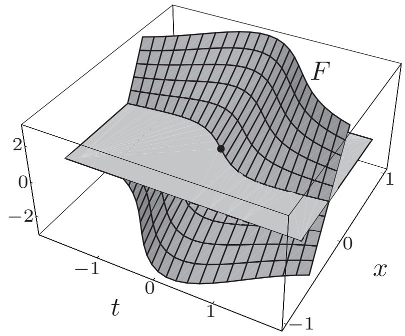
$$F_t(t,x) = 4xt + \varphi'(t) = B(t,x) = 4tx + 1\,, \quad \text{da cui} \quad \varphi'(t) = 1\,, \quad \text{ossia} \quad \varphi(t) = t + k\,.$$

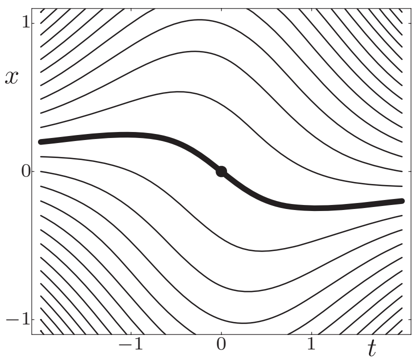
La costante di integrazione k è a nostra scelta e possiamo prenderla uguale a 0. Abbiamo trovato la nostra funzione F:

$$F(t,x) := x^3 + 2xt^2 + 2x + t\,.$$

Per sicurezza verifichiamo:

$$F_x(t,x) = 3x^2 + 2t^2 + 2 = A(t,x)\,, \qquad F_t(t,x) = 4xt + 1 = B(t,x)\,.$$





Sappiamo ora che le curve di livello di F sono le soluzioni dell'equazione differenziale di partenza. Più precisamente, una funzione derivabile $x(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale di partenza se e solo se $t \mapsto F(t, x(t))$ è costante. In particolare, $x(t)$ è soluzione con $x(0) = 0$ se e solo se

$$F\big(t, x(t)\big) \equiv F\big(0, x(0)\big) = F(0,0) = 0\,.$$

In altre parole il problema di Cauchy

$$\big(3x(t)^2 + 2t^2 + 2\big)x'(t) + 4tx(t) + 1 = 0\,, \qquad x(0) = 0$$

equivale al problema di trovare una funzione derivabile $x(t)$ che soddisfi l'equazione implicita

$$x(t)^3 + 2x(t)t^2 + 2x(t) + t = 0\,, \qquad x(0) = 0\,.$$

Qui accanto c'è un grafico della F e delle sue curve di livello. Il problema dell'esistenza e unicità della soluzione si può affrontare riconducendo l'equazione in forma normale

$$x' = -\frac{B(t,x)}{A(t,x)} = -\frac{4tx+1}{3x^2+2t^2+2}\,, \qquad x(0) = 0\,,$$

il che si può fare senza problemi dato che $3x^2+2t^2+2$ non si annulla mai. Il secondo membro che ne risulta è di classe C^∞ dappertutto. Per il teorema di esistenza e unicità locale la soluzione del problema è unica, ed è definita in un intervallo massimale di esistenza, che indichiamo con I. Per trovare I un modo è di osservare che x' è limitata:

$$|x'| = \Big|-\frac{B(t,x)}{A(t,x)}\Big| = \Big|-\frac{4tx+1}{3x^2+2t^2+2}\Big| \le \frac{4|tx|+1}{3x^2+2t^2+2} \le \frac{2(t^2+x^2)+1}{3x^2+2t^2+2} = \frac{2x^2+2t^2+1}{3x^2+2t^2+2} < 1$$

(abbiamo usato la disuguaglianza $|ab| \le (a^2+b^2)/2$). Un teorema di esistenza globale ci garantisce ora che la soluzione dell'equazione differenziale è definita dappertutto, cioè $I = \mathbb{R}$.
Altrimenti possiamo rifarci all'equazione implicita $F(t,x) = 0$, dimostrando che per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste uno e un solo $x(t)$ tale che $F(t, x(t)) = 0$. L'esistenza viene dal teorema degli zeri, in quanto per ogni t fissato la funzione $x \mapsto F(t,x)$ è continua su $\mathbb{R}$ e cambia segno:

$$\lim_{x\to-\infty} F(t,x) = \lim_{x\to-\infty} \big(x^3 + 2xt^2 + 2x + t\big) = \lim_{x\to-\infty} x^3\Big(1 + 2\frac{t^2}{x^2} + 2\frac{1}{x^2} + \frac{t}{x^3}\Big) = -\infty \cdot 1 = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(t,x) = \lim_{x\to+\infty} \big(x^3 + 2xt^2 + 2x + t\big) = \lim_{x\to+\infty} x^3\Big(1 + 2\frac{t^2}{x^2} + 2\frac{1}{x^2} + \frac{t}{x^3}\Big) = +\infty \cdot 1 = +\infty\,.$$

L'unicità si vede notando che la funzione $x \mapsto F(t,x)$ è strettamente crescente, poiché

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = 3x^2 + 2t^2 + 2 \ge 2 > 0\,,$$

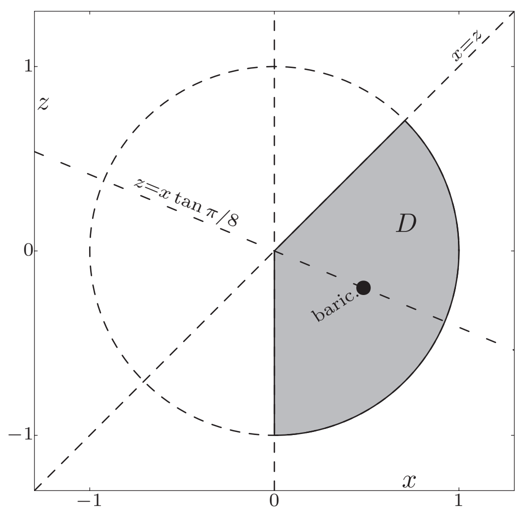
e quindi non può annullarsi per due x diversi (fissato t).

3. La regione

$$D := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ z \leq x,\ x^2 + z^2 \leq 1\}$$

è disegnata qui a fianco. È chiaro che la sua area è tre quarti dell'area del semicerchio di raggio 1, cioè

$$\operatorname{area} D = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi 1^2}{2} = \frac{3}{8}\pi\,.$$



Il baricentro $(x_{\text{barD}}, y_{\text{barD}})$ di D per simmetria deve trovarsi sulla retta per l'origine di angolo $-\pi/8$ (la media aritmetica fra $-\pi/2$ e $+\pi/4$), ma la cosa non sembra sveltire particolarmente i conti. In coordinate polari

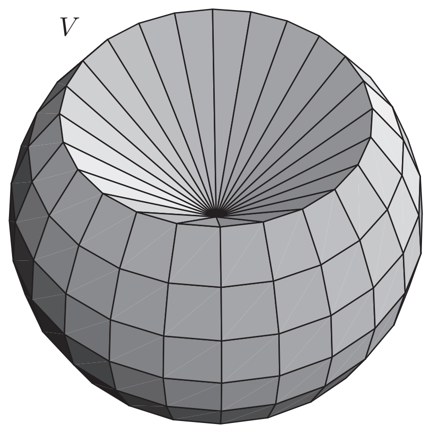
$$D_p = \left\{(r, \theta) \ : \ 0 \leq r \leq 1,\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\}.$$

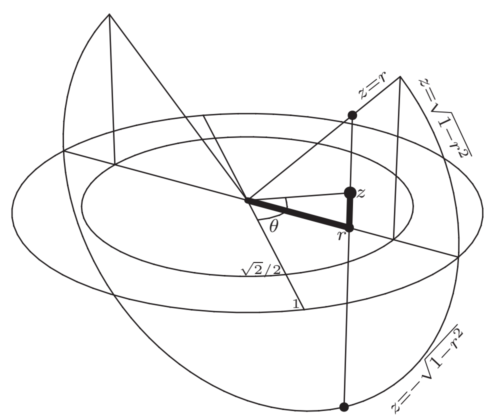
Quindi il baricentro è dato da

$$\begin{aligned}
x_{\text{barD}} &= \frac{1}{\operatorname{area} D}\int_D x\,dx\,dy = \frac{1}{\operatorname{area} D}\int_{D_p} r\cos\theta\, r\,dr\,d\theta = \frac{1}{\operatorname{area} D}\int_{-\pi/2}^{\pi/4} d\theta \int_0^1 r^2\cos\theta\,dr = \\
&= \frac{1}{\operatorname{area} D}\int_{-\pi/2}^{\pi/4}\Big[\frac{r^3\cos\theta}{3}\Big]_{r=0}^{r=1} d\theta = \frac{1}{\operatorname{area} D}\int_{-\pi/2}^{\pi/4}\frac{\cos\theta}{3}d\theta = \frac{1}{3\operatorname{area} D}\Big(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = \\
&= \frac{1}{3\operatorname{area} D}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\Big) = \frac{1}{3\cdot\frac{3}{8}\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}+2}{2} = \frac{4(\sqrt{2}+2)}{9\pi} \approx 0{,}483012\,, \\
z_{\text{barD}} &= \frac{1}{\operatorname{area} D}\int_D z\,dx\,dz = \frac{1}{\operatorname{area} D}\int_{D_p} r\operatorname{sen}\theta\, r\,dr\,d\theta = \frac{1}{\operatorname{area} D}\int_{-\pi/2}^{\pi/4} d\theta \int_0^1 r^2\operatorname{sen}\theta\,dr = \\
&= \frac{1}{\operatorname{area} D}\int_{-\pi/2}^{\pi/4}\Big[\frac{r^3\operatorname{sen}\theta}{3}\Big]_{r=0}^{r=1} d\theta = \frac{1}{\operatorname{area} D}\int_{-\pi/2}^{\pi/4}\frac{\operatorname{sen}\theta}{3}d\theta = \frac{1}{3\operatorname{area} D}\Big(-\cos\frac{\pi}{4} + \cos\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = \\
&= \frac{1}{3\operatorname{area} D}\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\Big) = -\frac{1}{3\cdot\frac{3}{8}\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{9\pi} \approx -0{,}20007\,,
\end{aligned}$$

Il volume di V si trova facilmente col teorema di Pappo:

$$\operatorname{volume} V = 2\pi x_{\text{barD}} \cdot \operatorname{area} D = 2\pi\frac{4(\sqrt{2}+2)}{9\pi}\cdot\frac{3}{8}\pi = \frac{(\sqrt{2}+2)\pi}{3} \approx 3{,}57536\,.$$





Per simmetria il baricentro di V si trova sull'asse z. Il calcolo della quota z_{barV} sarebbe facile in coordinate sferiche, che però non sono state spiegate nel corso. Prendiamo un'altra strada: si può tabliare V nella parte interna al cilindro $x^2 + y^2 = 1/2$ e in quella esterna:

$$V_1 := \left\{(x,y,z) \ : \ \sqrt{x^2+y^2} \le \frac{\sqrt{2}}{2},\ -\sqrt{1-x^2-y^2} \le z < \sqrt{x^2+y^2}\right\},$$
$$V_2 := \left\{(x,y,z) \ : \ \frac{\sqrt{2}}{2} \le \sqrt{x^2+y^2} \le 1,\ -\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2+y^2}\right\},$$

e scriviamo V_1 e V_2 con le coordinate polari nel piano xy e le cartesiane in verticale:

$$V_1' = \left\{(\theta,r,z) \ : \ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r < \frac{\sqrt{2}}{2},\ -\sqrt{1-r^2} \le z \le r\right\},$$
$$V_2' = \left\{(\theta,r,z) \ : \ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \frac{\sqrt{2}}{2} \le r \le 1,\ -\sqrt{1-r^2} \le z \le \sqrt{1-r^2}\right\}.$$

Calcoliamo l'integrale di z sui due pezzi separatamente:

$$\int_{V_1} z\,dx\,dy\,dz = \int_{V_1'} zr\,d\theta\,dr\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}/2} dr \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{r} zr dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}/2} \left[\frac{z^2 r}{2}\right]_{z=-\sqrt{1-r^2}}^{z=r} =$$
$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{2}\big(r^3 - (1-r^2)r\big)\,dr = \pi \int_0^{\sqrt{2}/2} (2r^3 - r)dr = \pi\left[\frac{r^4}{2} - \frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{2}/2} =$$
$$= \pi\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{8}.$$
$$\int_{V_2} z\,dx\,dy\,dz = \int_{V_2'} zr\,d\theta\,dr\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{2}/2}^{1} dr \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} zr dz = 2\pi \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \left[\frac{z^2 r}{2}\right]_{z=-\sqrt{1-r^2}}^{z=\sqrt{1-r^2}} = 0$$

(non c'è da stupirsi che l'ultimo integrale sia nullo, perché V_2 è simmetrico rispetto al piano xy). Mettiamo insieme i due integrali:

$$z_{\mathrm{barV}} = \frac{1}{\text{volume}\,V} \int_V z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{\text{volume}\,V}\left(\int_{V_1} z\,dx\,dy\,dz + \int_{V_2} z\,dx\,dy\,dz\right) = \frac{1}{\frac{(\sqrt{2}+2)\pi}{3}}\left(-\frac{\pi}{8} + 0\right) =$$
$$= -\frac{3}{8(\sqrt{2}+2)} = -\frac{3(2-\sqrt{2})}{16} \approx -0{,}109835.$$

Ancora una volta è smentita la credenza popolare secondo cui z_{barD} sarebbe necessariamente uguale a z_{barV}. Ci si può capacitare del fatto che il baricentro di V è più in alto (e *non* più in basso) del baricentro di D?