Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1999/2000

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Prova Scritta dell'11 luglio 2000

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Trovare massimi e minimi locali e globali su $\mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) := \frac{1}{5+(x-2)^2+y^2} + \frac{1}{5+(x+2)^2+y^2}\,.$$

(Si può risparmiare qualche conto notando che $f(x,y) < f(x,0)$ se $y \neq 0$).

2. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$x''(t) + x'(t) - 2x(t) = e^t\,.$$

Per quali condizioni iniziali $x(0), x'(0)$ la soluzione ha limite finito per $t \to +\infty$?

3. Sia

$$D := \Big\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 1,\ (x-1)^2 + (z-1)^2 \ge 1\Big\}$$

e sia V il solido ottenuto ruotando di un angolo giro la regione D attorno all'asse z. Calcolare l'area di D, il volume di V, e baricentri di D e di V.
(Usare pure la formula $\int \sqrt{1-t^2}\,dt = (\operatorname{arcsen} t + t\sqrt{1-t^2})/2$).

Punti: 15, 10, 15.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Prova Scritta dell'11 luglio 2000

Svolgimento

1. Nella definizione di f

$$f(x,y) := \frac{1}{5+(x-2)^2+y^2} + \frac{1}{5+(x+2)^2+y^2}$$

i due denominatori sono polinomi (quindi definiti ovunque), e sono anche sempre > 0 (anzi, sempre ≥ 5) perché ottenuti aggiungendo a 5 due quadrati. Quindi $f(x,y)$ è definita per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, è di classe C^∞ ed è anche > 0 (e $\leq 2/5$) ovunque. La f ha le seguenti simmetrie:

$$f(x,y) = f(x,-y) = f(-x,y) = f(-x,-y)\,.$$

La simmetria $f(x,y) = f(x,-y)$ è ovvia. Cambiando x con $-x$ i due addendi si trasformano uno nell'altro, lasciando intatta la somma. La formula $f(x,y) = f(-x,-y)$ viene combinando le prime due simmetrie.
Il valore 0 non è mai raggiunto da f, ma ci si può avvicinare a piacere, per esempio prendendo $f(0,y)$ con $y \to +\infty$:

$$\lim_{y\to+\infty} f(0,y) = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{5+(0-2)^2+y^2} + \frac{1}{5+(0+2)^2+y^2}\right) = \lim_{y\to+\infty}\frac{2}{9+y^2} = 0\,.$$

Di sicuro quindi non c'è alcun punto di minimo globale per f.
Poiché la funzione è di classe C^∞ e il dominio in cui lo studiamo è aperto, tutti gli eventuali punti di massimo o minimo locale sono interni, e le derivate parziali prime ci si devono annullare. Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= -\frac{2(x-2)}{(5+(x-2)^2+y^2)^2} - \frac{2(x+2)}{(5+(x+2)^2+y^2)^2}\,,\\
f_y(x,y) &= -\frac{2y}{(5+(x-2)^2+y^2)^2} - \frac{2y}{(5+(x+2)^2+y^2)^2} =\\
&= -2y\underbrace{\left(\frac{1}{(5+(x-2)^2+y^2)^2} + \frac{1}{(5+(x+2)^2+y^2)^2}\right)}_{>0}\,.
\end{aligned}$$

La $f_y(x,y)$ si annulla soltanto quando $y = 0$. Sostituendo $y = 0$ nell'equazione $f_x(x,y) = 0$ si calcola con pazienza

$$\begin{aligned}
0 = f_x(x,0) &= -\frac{2(x-2)}{(5+(x-2)^2)^2} - \frac{2(x+2)}{(5+(x+2)^2)^2} = -\frac{2(x-2)}{(9+x^2-4x)^2} - \frac{2(x+2)}{(9+x^2+4x)^2} =\\
&= -\frac{2(x-2)(9+x^2+4x)^2}{(9+x^2-4x)^2(9+x^2+4x)^2} - \frac{2(x+2)(9+x^2-4x)^2}{(9+x^2-4x)^2(9+x^2+4x)^2} =\\
&= -2\left(\frac{(x-2)(81+x^4+16x^2+18x^2+72x+8x^3)}{(9+x^2-4x)^2(9+x^2+4x)^2} + \frac{(x+2)(81+x^4+16x^2+18x^2-72x-8x^3)}{(9+x^2-4x)^2(9+x^2+4x)^2}\right) =\\
&= -2\left(\frac{(x-2)(81+x^4+34x^2+72x+8x^3)}{(9+x^2-4x)^2(9+x^2+4x)^2} + \frac{(x+2)(81+x^4+34x^2-72x-8x^3)}{(9+x^2-4x)^2(9+x^2+4x)^2}\right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\bigg(\frac{81x + x^5 + 34x^3 + 72x^2 + 8x^4 - 162 - 2x^4 - 68x^2 - 144x - 16x^3}{(9 + x^2 - 4x)^2(9 + x^2 + 4x)^2} + \\
&\qquad + \frac{81x + x^5 + 34x^3 - 72x^2 - 8x^4 + 162 + 2x^4 + 68x^2 - 144x - 16x^3}{(9 + x^2 - 4x)^2(9 + x^2 + 4x)^2} = \\
&= -2\frac{2x^5 + 36x^3 - 126x}{(9 + x^2 - 4x)^2(9 + x^2 + 4x)^2} = -4x\frac{x^4 + 18x^2 - 63}{(9 + x^2 - 4x)^2(9 + x^2 + 4x)^2}\,.
\end{aligned}
$$

L'equazione $f_x(x, 0) = 0$ si spezza in $x = 0$ e in $x^4 + 18x^2 - 63 = 0$. Quest'ultima è una biquadratica. Nell'incognita ausiliaria $z = x^2$ l'equazione diventa $z^2 + 18z - 63 = 0$, che ha come discriminante

$$
\frac{\Delta}{4} = 9^2 + 63 = 81 + 63 = 144 = 12^2\,, \qquad \text{da cui} \qquad z = -9 \pm 12 = \begin{cases} 3 \\ -21. \end{cases}
$$

Tornando alla variabile x, si ha $x^2 = 3$, che ha come soluzioni $x = \pm\sqrt{3}$, e $x^2 = -21$, che non ha soluzioni (reali). Quindi l'equazione $f_x(x, 0) = 0$ ha le tre soluzioni $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{3}$. In definitiva il gradiente di f si annulla nei tre punti

$$
(0, 0), \quad (\sqrt{3}, 0), \quad (-\sqrt{3}, 0).
$$

Questi sono gli unici candidati a essere punti di minimo o massimo locale. Per la simmetria di f, $(-\sqrt{3}, 0)$ è dello stesso tipo di $(\sqrt{3}, 0)$. Per decidere che tipo di punti siano, un modo è di calcolare le derivate seconde (più avanti vedremo come questo si può evitare con astuzia). Visto che tutti i punti candidati hanno $y = 0$ calcoliamo f_{xx} direttamente con $y = 0$:

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x, 0) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(x, 0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-4x\frac{x^4 + 18x^2 - 63}{(9 + x^2 - 4x)^2(9 + x^2 + 4x)^2}\right) = \\
&= -4\frac{x^4 + 18x^2 - 63}{(9 + x^2 - 4x)^2(9 + x^2 + 4x)^2} - \\
&\qquad - 4x\frac{(4x^3 + 36x)(9 + x^2 - 4x)^2(9 + x^2 + 4x)^2 - (x^4 + 18x^2 - 63)(\cdots)}{(9 + x^2 - 4x)^4(9 + x^2 + 4x)^4}\,.
\end{aligned}
$$

Nei punti candidati i valori sono

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(0, 0) &= -4\frac{-63}{9^4} = \frac{4 \cdot 7}{9^3} > 0, \\
f_{xx}(\sqrt{3}, 0) &= -4\frac{0}{(\ldots)} - 4\sqrt{3}\frac{4 \cdot 3\sqrt{3} + 36\sqrt{3})(9 + 3 - 4\sqrt{3})^2(9 + 3 + 4\sqrt{3})^2 - 0(\cdots)}{(9 + 3 - 4\sqrt{3})^4(9 + 3 + 4\sqrt{3})^4} = \\
&= -4\sqrt{3}\frac{48\sqrt{3}}{(12 - 4\sqrt{3})^2(12 + 4\sqrt{3})^2} = -\frac{4 \cdot 48 \cdot 3}{4^4(3 - \sqrt{3})^2(3 + \sqrt{3})^2} = -\frac{3 \cdot 3}{4(9 - 3)^2} = -\frac{9}{4 \cdot 6^2} = \\
&= -\frac{1}{16} < 0\,,
\end{aligned}
$$

Per f_{xy} non possiamo porre $y = 0$ prima di derivare, però non occorre portare i conti molto avanti:

$$
f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_y(x, y) = -2y\frac{\partial}{\partial x}\bigg(\cdots\bigg)\,,
$$

da cui

$$
f_{xy}(x, 0) = 0 \cdot (\cdots) = 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\,.
$$

Infine

$$
f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_y(x, y) = -2\left(\frac{1}{(5 + (x - 2)^2 + y^2)^2} + \frac{1}{(5 + (x + 2)^2 + y^2)^2}\right) - 2y\bigg(\cdots\bigg)\,,
$$

per cui sull'asse x possiamo scrivere

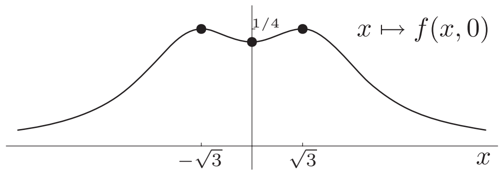
$$f_{yy}(x,0) = -2\left(\frac{1}{(5+(x-2)^2+0^2)^2} + \frac{1}{(5+(x+2)^2+0^2)^2}\right) < 0\,.$$

La matrice hessiana nei tre punti candidati è

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{28}{729} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{81} \end{pmatrix}\,, \quad f''(\pm\sqrt{3},0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}\,.$$

(I valori 28/729, −4/81, −1/12 non sono indispensabili per concludere: quello che conta è il segno). Conclusione: $(0,0)$ è un punto di sella, mentre $(\pm\sqrt{3},0)$ sono punti di massimo locale.
I punti $(\pm\sqrt{3},0)$ potrebbero anche essere di massimo globale.
Per vedere se è così osserviamo che

$$f(x,y) < f(x,0) \qquad \text{se } y \neq 0\,.$$



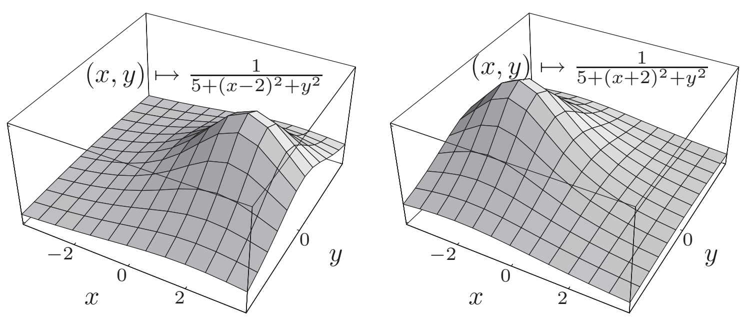
Quindi lungo l'asse x non ci sono punti di minimo locale. Inoltre (x_0,y_0) è di massimo globale se e solo se $y_0 = 0$ e x_0 è di massimo globale per la funzione di una variabile $x \mapsto f(x,0)$. Questa ha per derivata

$$f_x(x,0) = -4x\frac{x^4+18x^2-63}{\big(5+(x-2)^2\big)^2\big(5+(x+2)^2\big)^2} = \frac{-4x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\overbrace{(x^2+21)}^{>0}}{\underbrace{\big(5+(x-2)^2\big)^2\big(5+(x+2)^2\big)^2}_{>0}}\,,$$

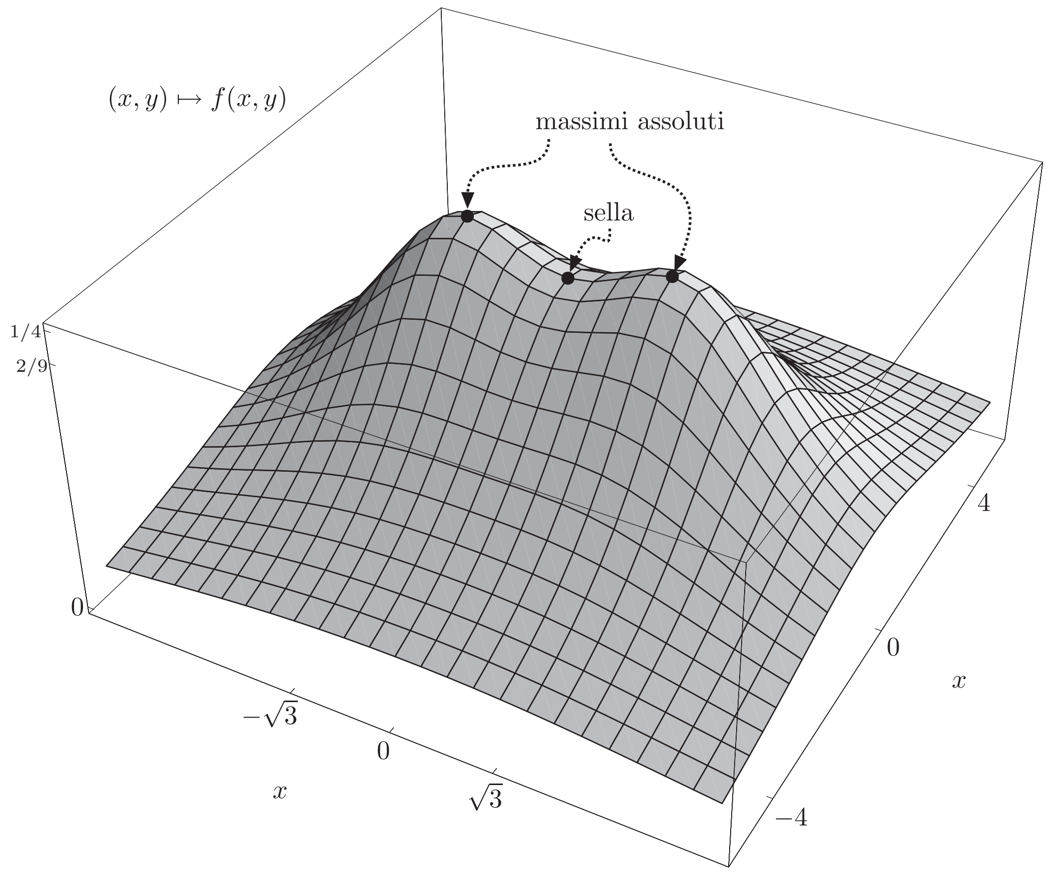
che è positiva per $x < -\sqrt{3}$ e per $0 < x < \sqrt{3}$, e negativa altrove. Quindi in effetti $(\pm\sqrt{3},0)$ sono punti di massimo globale, e

$$\max f = f(\pm\sqrt{3},0) = \frac{1}{5+(\sqrt{3}-2)^2} + \frac{1}{5+(\sqrt{3}+2)^2} =$$
$$= \frac{1}{4(3-\sqrt{3})} + \frac{1}{4(3+\sqrt{3})} = \frac{3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}}{3(9-3)} = \frac{9}{18} = \frac{1}{4}\,.$$

La sella si trova a quota $f(0,0) = 2/9$.
Altro modo, senza usare le derivate seconde! La funzione di una variabile $x \mapsto f(x,0)$, come abbiamo visto, ha massimi globali in $\pm\sqrt{3}$ e minimo (locale ma non globale) in 0. Quindi $(\pm\sqrt{3},0)$ sono punti di massimo globale, grazie alla disuguaglianza $f(x,0) \geq f(x,y)$. Invece $(0,0)$ non è né di massimo né di minimo, perché è di minimo stretto per f ristretta all'asse x ma di massimo stretto per f ristretta all'asse y. (Nelle vicinanze dell'origine ci sono sia punti in cui f vale meno, sia punti in cui vale di più: quindi non c'è né massimo né minimo).



La f è la somma di due funzioni che hanno grafici "a campana", come si vede qui accanto. I massimi delle due campane sono nei punti $(\pm 2,0)$. I massimi dei due addendi generano due massimi per la somma, ma non negli stessi punti. Il grafico di f è nella pagina seguente.



2. L'equazione differenziale

$$x''(t) + x'(t) - 2x(t) = e^t$$

è lineare, a coefficienti costanti, non omogenea. La prima cosa da fare è risolvere l'equazione omogenea associata:

$$x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 0\,.$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, il cui discriminante è $\Delta = 1^2 + 4 \cdot 2 = 9 = 3^2$, e le cui soluzioni sono

$$\lambda = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2. \end{cases}$$

La soluzione generale dell'equazione omogenea $x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 0$ è quindi $x(t) = ae^t + be^{-2t}$. Per trovare una soluzione particolare dell'equazione originale conosciamo due metodi. Il **primo metodo** sfrutta il fatto che il secondo membro è di un tipo particolare: $p(t)e^{\lambda t}$ con p polinomio (di grado 0) e $\lambda = 1$, che si dà il caso sia anche una soluzione dell'equazione caratteristica, con molteplicità $m = 1$. Sappiamo allora che una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è della forma $\bar{x}(t) = t^m q(t) e^{\lambda t}$, con $q(t)$ un polinomio dello stesso grado di p:

$$\bar{x}(t) = tce^t\,.$$

Calcoliamo le derivate:

$$\bar{x}'(t) = ce^t + cte^t = c(t+1)e^t\,, \qquad \bar{x}''(t) = ce^t + c(1+t)e^t = c(t+2)e^t\,,$$

sostituiamo nell'equazione non omogenea:

$$c(t+2)e^t + c(t+1)e^t - 3cte^t = e^t\,,$$

cioè, semplificando per $e^t \neq 0$:

$$3c = 1\,, \qquad \text{da cui} \quad c = \frac{1}{3}\,.$$

La soluzione generale dell'equazione non omogenea è dunque

$$x(t) = \frac{1}{3}te^t + ae^t + be^{-2t} \qquad \text{con } a, b \text{ costanti arbitrarie.}$$

Un **secondo metodo** è quello di Lagrange, detto "variazione delle costanti arbitrarie": si cerca una soluzione della forma $x(t) = a(t)e^t + b(t)e^{-2t}$. Questo metodo sfrutta molto meno le proprietà speciali di questa equazione, ma fortunatamente viene di complicazione comparabile. Derivando

$$x'(t) = a(t)e^t - 2b(t)e^{-2t} + \underbrace{a'(t)e^t + b'(t)e^{-2t}}_{\equiv 0}\,, \qquad x''(t) = a(t)e^t + 4b(t)e^{-2t} + a'(t)e^t - 2b'(t)e^{-2t}\,,$$

e sostituendo nell'equazione:

$$\begin{aligned} e^t &= x''(t) + x'(t) - 2x(t) = \\ &= \big(a(t)e^t + 4b(t)e^{-2t} + a'(t)e^t - 2b'(t)e^{-2t}\big) + \big(a(t)e^t - 2b(t)e^{-2t}\big) - 2\big(a(t)e^t + b(t)e^{-2t}\big) = \\ &= a'(t)e^t - 2b'(t)e^{-2t}\,. \end{aligned}$$

Si imposta il sistema:

$$\begin{cases} a'(t)e^t + b'(t)e^{-2t} = 0 \\ a'(t)e^t - 2b'(t)e^{-2t} = e^t\,. \end{cases}$$

Si può arrivare al sistema precedente anche direttamente costruendo la matrice wronskiana di e^t, e^{-2t}:

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} \\ e^t & -2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Il sistema in a', b' si risolve facilmente: per esempio sottraendo membro a membro la seconda equazione dalla prima si ottiene

$$3b'(t)e^{-2t} = -e^t\,, \quad \text{cioè} \quad b'(t) = -\frac{1}{3}e^{3t}\,, \quad \text{la cui soluzione generale è} \quad b(t) = -e^{3t} + k_2\,.$$

Sostituendo $b'(t) = -e^{3t}/3$ nella prima equazione si ha

$$a'(t)e^t = -b'(t)e^{-2t} = \frac{1}{3}e^{3t}e^{-2t} = e^t\,, \quad \text{cioè} \quad a'(t) = \frac{1}{3}\,, \quad \text{la cui soluzione è} \quad a(t) = \frac{t}{3} + k_1\,.$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione di partenza è

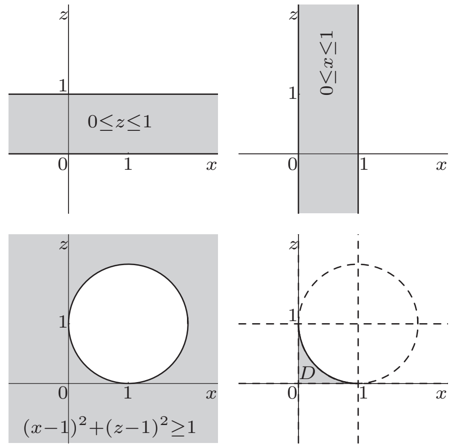
$$\begin{aligned} x(t) = a(t)e^t + b(t)e^{-2t} &= \Big(\frac{t}{3} + k_1\Big)e^t + (e^{3t} + k_2)e^{-2t} = \\ &= \frac{1}{3}te^t + k_1e^t + e^t + k_2e^{-2t} = \frac{1}{3}te^t + (k_1+1)e^t + k_2e^{-2t}\,, \end{aligned}$$

che coincide con quella già trovata, se si identificano le costanti $a = k_1 + 1$ e $b = k_2$.
Vediamo se esistono costanti a, b per le quali $x(t) = -te^t/3 + ae^t + be^{-2t}$ ha limite finito per $t \to +\infty$. Raccogliamo e^t e vediamo cosa succede per $t \to +\infty$:

$$x(t) = \underbrace{e^t}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\Big(\frac{1}{3}t + a + \overbrace{be^{-3t}}^{\to 0}\Big)}_{\to +\infty}.$$

Dunque $x(t) \to +\infty$ qualunque siano le costanti a, b. Non esistono condizioni iniziali per le quali la soluzione ha limite finito per $t \to +\infty$.
Osserviamo che se la domanda fosse stata *"ci sono soluzioni per le quali $x(t), x'(t), x''(t)$ hanno tutte limite finito per $t \to +\infty$?"* si poteva rispondere guardando l'equazione $x''(t) + x'(t) - 2x(t) = e^t$ senza risolverla: se $x(t), x'(t), x''(t)$ hanno limite finito allora il primo membro dell'equazione ha pure limite finito, mentre il secondo membro e^t ha chiaramente limite infinito, assurdo.

3. La regione D è formata dai punti del quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ che sono fuori dal cerchio di raggio 1 e centro in $(1,1)$. L'area di D è quindi uguale all'area del quadrato meno l'area di un quarto del cerchio:

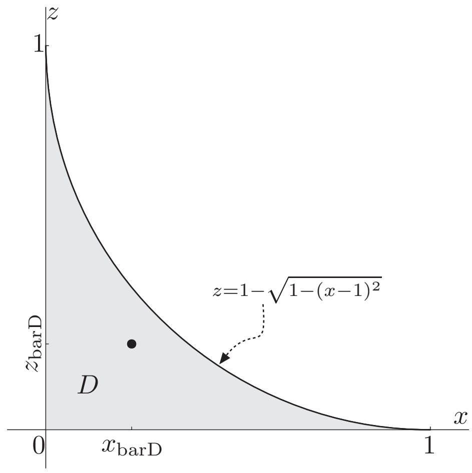


$$\operatorname{area} D = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4}\,.$$

Per simmetria il baricentro deve essere sulla diagonale $y = x$, per cui basta calcolarne per esempio l'ascissa x_{barD}. L'equazione del cerchio di centro $(1,1)$ e raggio 1 si riscrive come

$$\begin{aligned}(z-1)^2 = 1-(x-1)^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad z-1 = \pm\sqrt{1-(x-1)^2}\\ &\Longleftrightarrow \quad z = 1 \pm \sqrt{1-(x-1)^2}\,.\end{aligned}$$

Il segno "$-$" corrisponde alla metà inferiore del cerchio, che è quella che ci interessa. Riscriviamo D in forma normale, più adatta per l'integrazione:



$$D = \left\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 \ :\ 0\le x\le 1,\ 0\le z\le 1-\sqrt{1-(x-1)^2}\right\}.$$

L'ascissa del baricentro è

$$\begin{aligned}x_{\mathrm{barD}} &= \frac{1}{\operatorname{area} D}\int_D x\,dx\,dz =\\ &= \frac{4}{4-\pi}\int_0^1 dx\int_0^{1-\sqrt{1-(x-1)^2}} x\,dz =\\ &= \frac{4}{4-\pi}\int_0^1 x\Big(1-\sqrt{1-(x-1)^2}\Big)dx =\\ &= \frac{4}{4-\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{4}{4-\pi}\int_0^1 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx =\\ &= \frac{2}{4-\pi} - \frac{4}{4-\pi}\int_0^1 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx\,.\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte una primitiva di $x \mapsto x\sqrt{1-(x-1)^2}$. Conviene cambiare variabile $x-1=t$:

$$\int x\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx = \int (t+1)\sqrt{1-t^2}\,dt = \int t\sqrt{1-t^2}\,dt + \int \sqrt{1-t^2}\,dt\,.$$

Il primo integrale all'ultimo membro si calcola con la sostituzione $u = t^2$ (da cui $du = 2t\,dt$

$$\int t\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int (1-u)^{1/2}du = -\frac{1}{3}(1-u)^{3/2} = -\frac{1}{3}(1-t^2)^{3/2} = -\frac{1}{3}\big(1-(x-1)^2\big)^{3/2}\,.$$

(Ignoriamo le costanti d'integrazione). Nell'altro integrale sostituiamo $t = \operatorname{sen}\theta$, da cui $dt = \cos\theta\,d\theta$:

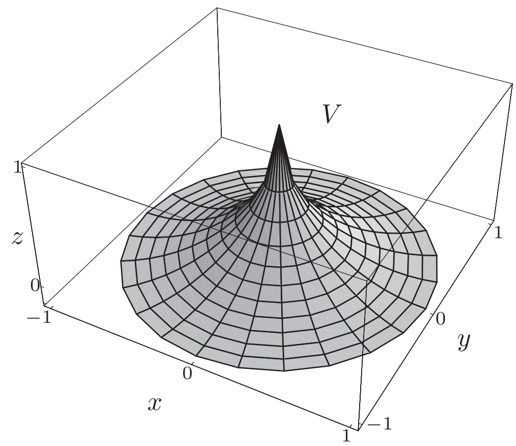
$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-t^2}\,dt &= \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta = \int \cos^2\theta\,d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta =\\ &= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\,\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} t + \frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2} =\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(x-1) + \frac{(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}}{2}\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_0^1 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{3}\big(1-(x-1)^2\big)^{3/2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(x-1) + \frac{(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}}{2}\Big]_0^1 =$$
$$= \Big(-\frac{1}{3}\big(1-(1-1)^2\big)^{3/2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(1-1) + \frac{(1-1)\sqrt{1-(1-1)^2}}{2}\Big) -$$
$$- \Big(-\frac{1}{3}\big(1-(0-1)^2\big)^{3/2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(0-1) + \frac{(0-1)\sqrt{1-(0-1)^2}}{2}\Big) =$$
$$= \Big(-\frac{1}{3}+0+0\Big) - \Big(0+\frac{1}{2}\cdot\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)-0\Big) = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{3} = \frac{3\pi-4}{12}\,.$$

Le coordinate del baricentro di D sono

$$x_{\mathrm{barD}} = y_{\mathrm{barD}} = \frac{2}{4-\pi} - \frac{4}{4-\pi}\cdot\frac{3\pi-4}{12} = \frac{6-(3\pi-4)}{12-3\pi} = \frac{10-3\pi}{12-3\pi} \approx 0{,}223368\,.$$



Il volume di V si può ricavare col teorema di Pappo:

$$\operatorname{volume} V = 2\pi x_{\mathrm{barD}}\cdot\operatorname{area} D = 2\pi\frac{10-3\pi}{3(4-\pi)}\cdot\frac{4-\pi}{4} =$$
$$= \frac{\pi(10-3\pi)}{6} \approx 0{,}301186\,.$$

Per simmetria il baricentro di V si trova sull'asse z. La sua coordinata z è

$$z_{\mathrm{barV}} = \frac{1}{\operatorname{volume} V}\int_V z\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \frac{6}{\pi(10-3\pi)}\int_V z\,dx\,dy\,dz\,.$$

Conviene passare alle coordinate polari nel piano xy:

$$V' = \Big\{(\theta,r,z)\ :\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 1,\ 0\le z\le 1-\sqrt{1-(r-1)^2}\Big\}\,.$$

Quindi

$$\int_V z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 dr\int_0^{1-\sqrt{1-(r-1)^2}} zr\,dz = 2\pi\int_0^1 dr\Big[\frac{z^2 r}{2}\Big]_{z=0}^{z=1-\sqrt{1-(r-1)^2}} =$$
$$= 2\pi\int_0^1 \frac{r}{2}\big(1-\sqrt{1-(r-1)^2}\big)^2 dr = \pi\int_0^1 r\big(1+1-(r-1)^2-2\sqrt{1-(r-1)^2}\big)dr =$$
$$= \pi\int_0^1\big(2r-r(r-1)^2-2r\sqrt{1-(r-1)^2}\big)dr = \pi\int_0^1\big(r-r^3+2r^2-2r\sqrt{1-(r-1)^2}\big)dr =$$
$$= \pi\Big[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}+\frac{2r^3}{3}\Big]_0^1 - 2\pi\int_0^1 r\sqrt{1-(r-1)^2}\,dr =$$
$$= \pi\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\Big) - 2\pi\int_0^1 r\sqrt{1-(r-1)^2}\,dr =$$
$$= \pi\frac{6-3+8}{12} - 2\pi\int_0^1 r\sqrt{1-(r-1)^2}\,dr = \frac{11}{12}\pi - 2\pi\int_0^1 r\sqrt{1-(r-1)^2}\,dr\,.$$

L'ultimo integrale era già stato calcolato (nella variabile x invece di r), e vale $(3\pi-4)/12$. Dunque

$$z_{\mathrm{barV}} = \frac{6}{\pi(10-3\pi)}\int_V z\,dx\,dy\,dz = \frac{6}{\pi(10-3\pi)}\Big(\frac{11}{12}\pi - 2\pi\frac{3\pi-4}{12}\Big) =$$
$$= \frac{6}{10-3\pi}\cdot\frac{11-6\pi+8}{12} = \frac{19-6\pi}{20-6\pi} \approx 0{,}13077\,.$$