Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1999/2000

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Prova Scritta del 13 giugno 2000

Cognome e Nome:

Matricola:

Documento di identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Dire in quali punti di $\mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^4}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } x = y = 0, \end{cases}$$

è continua, e trovarne il massimo e il minimo assoluto sull'insieme

$$Q := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| \leq \frac{1}{2}, \quad |y| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

(Suggerimento: per la continuità dimostrare che $|f(x,y)| \leq |x| \dots$).

2. Sapendo che una soluzione dell'equazione differenziale

$$ty''(t)\operatorname{sen}^2 t - y'(t)\bigl(2t\cos t + \operatorname{sen} t\bigr)\operatorname{sen} t + \bigl(2t\cos^2 t + \operatorname{sen} t \cos t + t \operatorname{sen}^2 t\bigr)y(t) = 0\,,$$

è $y_1(t) = \operatorname{sen} t$, trovarne un'altra che sia linearmente indipendente dalla prima.

3. Stabilire se la funzione

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^4}{(x^2+y^2)^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } x = y = 0, \end{cases}$$

è integrabile sulle regioni $D_1 := \{(x,y) \ : \ x^2+y^2 \leq 1\}$, $D_2 := \{(x,y) \ : \ 1/4 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$, $D_3 := \{(x,y) \ : \ 1/4 \leq x^2+y^2 \leq 1, \ x \geq 0\}$, e dove sì calcolarne gli integrali.
(Per il comportamento nell'origine andare per esempio lungo $y = x$).

Punti: 15, 10, 10

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Prova Scritta del 13 giugno 2000

Svolgimento

1. Nella formula

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^4}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } x = y = 0, \end{cases}$$

il denominatore x^2+y^4 è ≥ 0 perché somma di potenze pari, e si annulla soltanto quando entrambi gli addendi sono nulli, cioè nell'origine. Fuori dall'origine $f(x,y)$ è il rapporto di due polinomi con denominatore non nullo. Quindi f è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Per decidere la continuità o meno nell'origine, notiamo che $x^2 + y^4 \geq y^4 \geq 0$, per cui

$$\bigl|f(x,y)\bigr| \leq |x| \frac{y^4}{x^2+y^4} \leq |x| \cdot 1 = |x|\,,$$

cioè

$$-|x| \leq f(x,y) \leq |x| \qquad \text{per ogni } (x,y) \neq (0,0)\,.$$

Poiché $\pm|x|$ tende a 0 per $(x,y) \to (0,0)$, per il teorema del confronto abbiamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)\,.$$

Pertanto la f è continua anche nell'origine.
L'insieme

$$Q := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; |x| \leq \frac{1}{2}, \quad |y| \leq \frac{1}{2}\right\}$$

è il quadrato di vertici $(1/2, 1/2)$, $(1/2, -1/2)$, $(-1/2, -1/2)$ e $(-1/2, 1/2)$, compreso il bordo. Quindi Q è chiuso e limitato. La f, che è continua ovunque, assume massimo e minimo globale su Q per il teorema di Weierstraß. I punti di massimo e minimo sono da cercarsi nelle tre categorie: (1) punti interni a Q in cui f non ha derivate parziali prime, (2) punti interni a Q in cui le derivate parziali prime esistono e sono nulle, (3) punti della frontiera.
Poiché la f è di classe C^∞ fuori dall'origine, l'unico punto in cui potrebbero non esserci le derivate parziali prime è l'origine. Ora in realtà la f è identicamente nulla sui due assi, e quindi le derivate prime nell'origine esistono e sono nulle. Comunque nel primo e quarto quadrante (esclusi gli assi) la funzione è > 0, mentre nel secondo e terzo quadrante (sempre esclusi gli assi) è < 0. Pertanto *l'origine non è punto di minimo né di massimo locale.*
Calcoliamo le derivate parziali prime fuori dall'origine:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y^4 \frac{1 \cdot (x^2+y^4) - x \cdot 2x}{(x^2+y^4)^2} = \frac{y^4(y^4-x^2)}{(x^2+y^4)^2} = \frac{y^4(y^2-x)(y^2+x)}{(x^2+y^4)^2}\,, \\ f_y(x,y) &= x \frac{4y^3 \cdot (x^2+y^4) - y^4 \cdot 4y^3}{(x^2+y^4)^2} = \frac{4x^3y^3}{(x^2+y^4)^2} \end{aligned} \qquad \text{per } (x,y) \neq (0,0).$$

La f_y si annulla solo sui due assi. Per $x = 0$ e $y \neq 0$ la derivata f_x non è mai nulla:

$$f_x(0,y) = \frac{y^4(y^2-0)(y^2+0)}{(0^2+y^4)^2} = \frac{y^8}{y^8} \equiv 1 \neq 0 \qquad \text{per } y \neq 0\,.$$

Sull'asse x si annulla anche f_x. Dunque candidati del tipo 2 sono tutti i punti dell'asse x (esclusa al più l'origine, che è già stata trattata). Sull'asse x la funzione è nulla. Questo già esclude questi punti dall'essere di massimo o minimo *globale* su Q, perché fuori dagli assi la f ha sia valori > 0 che valori < 0. Comunque considerando il segno di f nei quattro quadranti vediamo che *il punto* $(x, 0)$ *è punto di minimo locale se* $x > 0$ *e di massimo locale se* $x < 0$. A questa conclusione non si può arrivare calcolando la matrice hessiana, che è nulla sull'asse x. Infatti

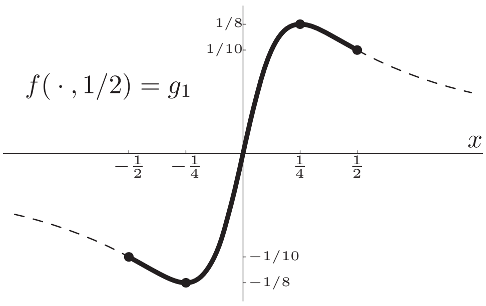
$$f_{xx}(x,y) = \frac{2xy^4(x^2-3y^4)}{(x^2+y^4)^3}\,, \quad f_{xy}(x,y) = \frac{4x^2y^3(3y^4-x^2)}{(x^2+y^4)^3}\,, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{4x^3y^2(3x^2-5y^4)}{(x^2+y^4)^3}\,.$$

I punti di minimo e massimo globale per f su Q sono pertanto sulla frontiera di Q. Viste le simmetrie

$$f(x,-y) = f(x,y)\,, \qquad f(-x,y) = -f(x,y) \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}\,,$$

possiamo limitarci a studiare la f sui due lati del quadrato che si incontrano in $(1/2, 1/2)$ (basterebbero le parti nel primo quadrante, ma non è un gran risparmio). Cominciamo col lato da $(-1/2, 1/2)$ a $(1/2, 1/2)$:

$$g_1(x) := f(x, 1/2) = \frac{x(1/2)^4}{x^2+(1/2)^4} = \frac{x}{16x^2+1}\,, \qquad \text{da studiare per } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$



La funzione g_1 è di una variabile e di classe C^∞ dappertutto. La derivata è

$$g_1'(x) = \frac{1\cdot(16x^2+1) - x\cdot 32x}{(16x^2+1)^2} = \frac{1-16x^2}{(16x^2+1)^2} = $$
$$= \frac{(1-4x)(1+4x)}{(16x^2+1)^2}\,.$$

(Si poteva anche riciclare la formula di f_x). Il segno di g_1' si comporta così:

$$g_1'(x) = 0 \iff x = \pm\frac{1}{4}\,,$$

$$g_1'(x) > 0 \iff -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}\,, \qquad g_1'(x) < 0 \iff \left(x < -\frac{1}{4} \text{ oppure } x > \frac{1}{4}\right).$$

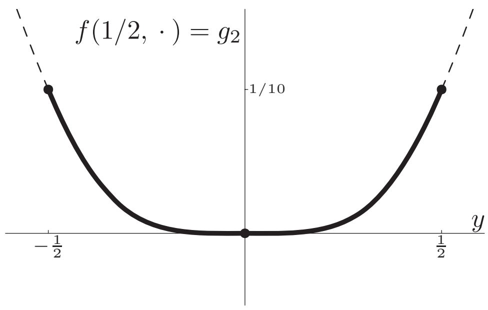
I valori di g_1 nei punti critici e negli estremi dell'intervallo sono:

$$g_1(-1/4) = \frac{-1/4}{1+1} = -\frac{1}{8}\,, \qquad g_1(1/4) = \frac{1/4}{1+1} = \frac{1}{8}\,,$$
$$g_1(-1/2) = \frac{-1/2}{4+1} = -\frac{1}{10}\,, \qquad g_1(1/2) = \frac{1/2}{4+1} = \frac{1}{10}\,.$$

La funzione g_1 su $[-1/2, 1/2]$ ha minimo globale in $-1/4$ e massimo globale in $1/4$, con valori rispettivamente $-1/8$ e $1/8$. Quindi la f sul segmento di estremi $(-1/2, 1/2)$ e $(1/2, 1/2)$ ha minimo in $(-1/4, 1/2)$, con valore $-1/8$, e massimo in $(1/4, 1/2)$ con valore $1/8$. Per la simmetria $f(x,-y) = f(x,y)$, sul segmento di estremi $(-1/2, -1/2)$ e $(1/2, -1/2)$ la f ha minimo in $(-1/4, -1/2)$, con valore $-1/8$, e massimo in $(1/4, -1/2)$ con valore $1/8$.

Studiamo la f sul segmento fra $(1/2, -1/2)$ e $(1/2, 1/2)$:

$$g_2(y) := f(1/2, y) = \frac{(1/2)y^4}{(1/2)^2+y^4} = \frac{2y^4}{1+4y^4}\,,$$
$$\text{da studiare per } y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$



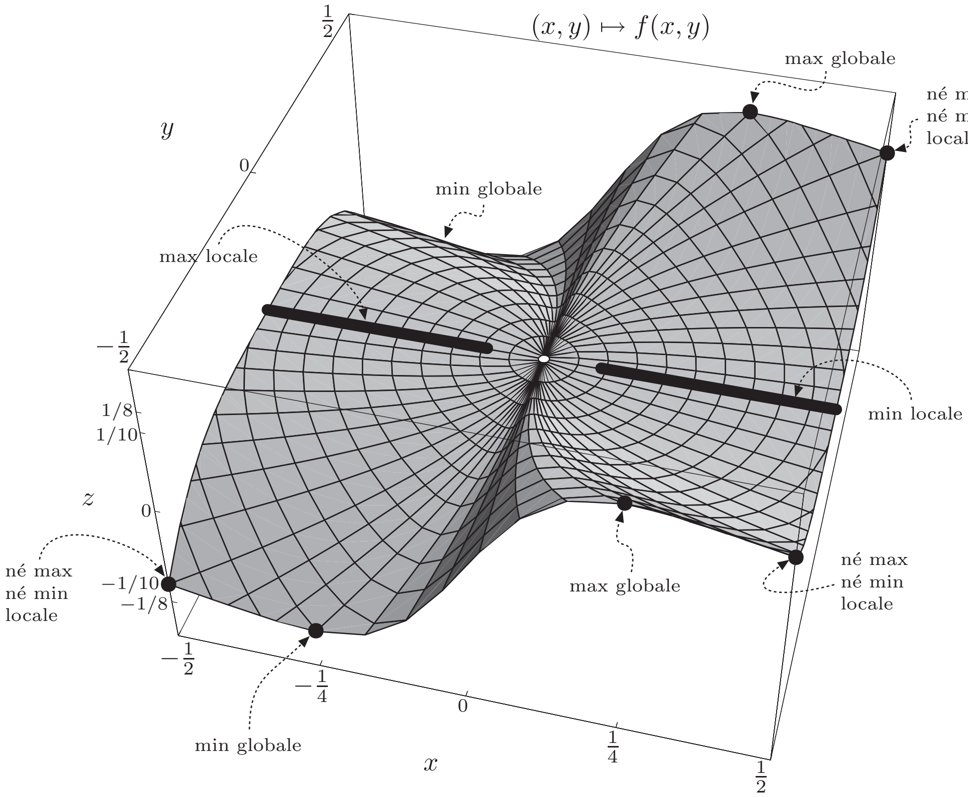
Anche qui la g_2 è di classe C^∞ dappertutto. La derivata è

$$g'(y) = \frac{8y^3\cdot(1+4y^4) - 2y^4\cdot 16y^3}{(1+4y^4)^2} = \frac{8y^3}{(1+4y^4)^2}\,.$$

La derivata $g_2'(y)$ si annulla solo per $y = 0$, è positiva per $y > 0$ e negativa per $y < 0$. I valori nel punto critico e agli estremi sono:

$$g_2(0) = 0\,, \qquad g_2(\pm 1/2) = \frac{2(1/2)^4}{1 + 4(1/2)^4} = \frac{2}{2^4 + 4} = \frac{2}{4(4+1)} = \frac{1}{10}$$

La g_2 su $[-1/2, 1/2]$ ha minimo in 0 e massimo agli estremi $\pm 1/2$. Quindi la f sul segmento di estremi $(1/2, -1/2)$ e $(1/2, 1/2)$ ha minimo in $(-1/2, 0)$, con valore 0, e massimo in $(1/2, \pm 1/2)$ con valore $1/8$. Per la simmetria $f(-x, y) = -f(x, y)$, sul segmento di estremi $(-1/2, -1/2)$ e $(-1/2, 1/2)$ la f ha minimo in $(-1/2, \pm 1/2)$, con valore $-1/10$, e massimo in $(1/4, 0)$ con valore 0.
Ricapitolando, il *massimo globale di f sul quadrato Q è* $1/8$ *e viene assunto nei due punti* $(1/4, \pm 1/2)$*, mentre il è* $-1/8$ *e viene assunto in* $(-1/4, \pm 1/2)$. Il problema non lo chiedeva, ma non costa molto notare che i quattro vertici del quadrato non sono né minimi né massimi *locali* per f su Q, perché sono minimi in una direzione e massimi in un altra. Qui sotto c'è un grafico di f su Q.



Per curiosità dimostriamo che la f è differenziabile nell'origine, cioè che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0\,,$$

dove

$$\omega(h, k) := f(h - 0, k - 0) - f(0, 0) - f_x(0, 0)h - kf_y(0, 0)k = f(h, k) - 0 - 0h - 0k = f(h, k)\,,$$

dove abbiamo usato il fatto già osservato che le derivate parziali di f nell'origine sono nulle. Usando la disuguaglianza $|ab| \le (a^2 + b^2)/2$, vera per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, applicata con $a = x$, $b = y^2$, vediamo che

$$\big|f(x, y)\big| = \Big|\frac{xy^4}{x^2 + y^4}\Big| = \frac{y^2}{x^2 + y^4} \cdot \big|xy^2\big| \le \frac{y^2}{x^2 + y^4} \cdot \frac{x^2 + y^4}{2} = \frac{1}{2} y^2 \qquad \forall (x, y) \ne (0, 0)\,.$$

La disuguaglianza $|f(x,y)| \leq y^2/2$ è vera ovviamente anche nell'origine, dove i due membri sono nulli. Quindi

$$\left|\frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \left|\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq \frac{k^2}{2\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{|k|}{2} \cdot \frac{\sqrt{k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{|k|}{2}\,.$$

Per il teorema del confronto concludiamo che davvero

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\,.$$

Problema. La f è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$?

2. Sarebbe prudente verificare che $y_1(t) := \operatorname{sen} t$ è davvero soluzione di

$$ty''(t)\operatorname{sen}^2 t - y'(t)\big(2t\cos t + \operatorname{sen} t\big)\operatorname{sen} t + \big(2t\cos^2 t + \operatorname{sen} t\cos t + t\operatorname{sen}^2 t\big)y(t) = 0\,,$$

ma soprassediamo. L'equazione è lineare omogenea, a coefficienti non costanti. Non è in forma normale, perché il coefficiente di $y''(t)$ non è 1, però se si vuole ci si riporta alla forma normale dividendo per $t\operatorname{sen}^2 t$ per i t per i quali non si annulla. I teoremi noti sulle equazioni in forma normale varranno solo dove $t\operatorname{sen}^2 t \neq 0$. Si può trovare un'altra soluzione $y_2(t)$ cercandola della forma $y_2(t) := a(t)y_1(t) = a(t)\operatorname{sen} t$. Derivando:

$$\begin{aligned}
y_2'(t) &= a'(t)\operatorname{sen} t + a(t)\cos t\,,\\
y_2''(t) &= a''(t)\operatorname{sen} t + a'(t)\cos t + a'(t)\cos t - a(t)\operatorname{sen} t = a''(t)\operatorname{sen} t + 2a'(t)\cos t - a(t)\operatorname{sen} t\,,
\end{aligned}$$

e sostituendo nell'equazione:

$$\begin{aligned}
0 &= t\Big(a''(t)\operatorname{sen} t + 2a'(t)\cos t - a(t)\operatorname{sen} t\Big)\operatorname{sen}^2 t - \Big(a'(t)\operatorname{sen} t + a(t)\cos t\Big)\big(2t\cos t + \operatorname{sen} t\big)\operatorname{sen} t +\\
&\quad + \big(2t\cos^2 t + \operatorname{sen} t\,\cos t + t\operatorname{sen}^2 t\big)a(t)\operatorname{sen} t =\\
&= ta''(t)\operatorname{sen}^3 t + 2ta'(t)\operatorname{sen}^2 t\cos t - ta(t)\operatorname{sen}^3 t -\\
&\quad - 2ta'(t)\operatorname{sen}^2 t\cos t - a'(t)\operatorname{sen}^3 t - 2ta(t)\operatorname{sen} t\cos^2 t - a(t)\operatorname{sen}^2 t\cos t +\\
&\quad + 2ta(t)\operatorname{sen} t\cos^2 t + a(t)\operatorname{sen}^2 t\cos t + ta(t)\operatorname{sen}^3 t =\\
&= ta''(t)\operatorname{sen}^3 t - a'(t)\operatorname{sen}^3 t =\\
&= \big(ta''(t) - a'(t)\big)\operatorname{sen}^3 t\,.
\end{aligned}$$

Eccetto che per i soliti t per i quali il seno si annulla, possiamo dividere per $\operatorname{sen}^3 t$ e ottenere l'equazione per $a(t)$

$$ta''(t) - a'(t) = 0\,.$$

Ponendo $b(t) := a'(t)$ e dividendo per t si ha l'equazione lineare omogenea del primo ordine

$$b'(t) - \frac{1}{t}b(t) = 0\,,$$

il cui fattore integrante è

$$\mu(t) = \exp\int\Big(-\frac{1}{t}\Big)dt = e^{-\ln t} = e^{\ln(1/t)} = \frac{1}{t}\,.$$

Moltiplichiamo l'equazione per il fattore integrante:

$$\frac{1}{t}b'(t) - \frac{1}{t^2}b(t) = D\Big(\frac{1}{t}b(t)\Big) = 0\,,$$

da cui, integrando

$$\frac{1}{t}b(t) = c\,, \qquad \text{cioè} \qquad b(t) = ct\,.$$

Tornando all'incognita $a(t)$ abbiamo $a'(t) = ct$, cioè

$$a(t) = \frac{c}{2}t^2 + c_1\,.$$

Poiché a noi interessa una soluzione non banale, possiamo prendere $c = 2$, $c_1 = 0$:

$$a(t) = t^2\,, \qquad \text{cioè} \qquad y_2(t) = t^2 \operatorname{sen} t\,.$$

La nuova soluzione y_2 è linearmente indipendente dalla y_1. Infatti il wronskiano è

$$\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & t^2 \operatorname{sen} t \\ \cos t & 2t\operatorname{sen} t + t^2\cos t \end{pmatrix} = 2t\operatorname{sen}^2 t + t^2 \operatorname{sen} t\cos t - t^2 \operatorname{sen} t \cos t = 2t \operatorname{sen}^2 t\,,$$

che è non nullo dove il seno non si annulla. Se y_1 e y_2 fossero linearmente dipendenti, cioè se una fosse uguale a una costante moltiplicata per l'altra, allora il wronskiano sarebbe identicamente nullo.

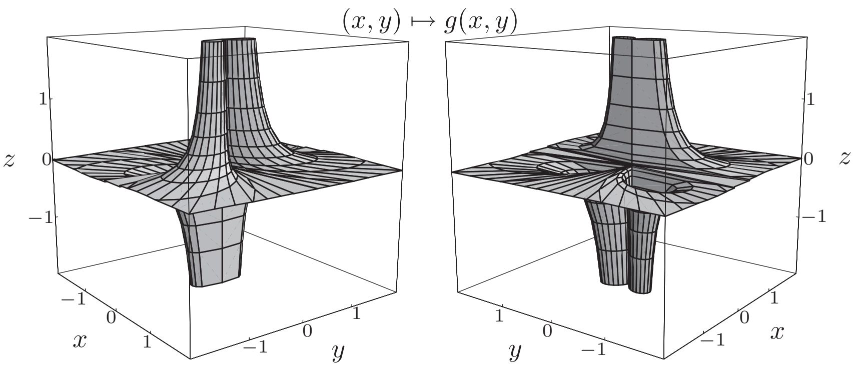
3. La funzione

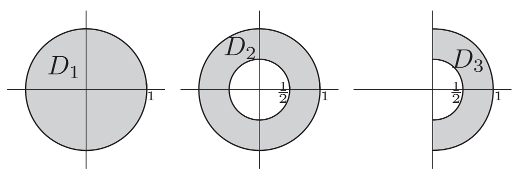
$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^4}{(x^2+y^2)^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } x = y = 0 \end{cases}$$

non è limitata in alcun intorno dell'origine: per esempio sulla diagonale $y = x \neq 0$ si ha

$$g(x,x) = \frac{x^5}{(x^2+x^2)^4} = \frac{1}{16x^3}\,,$$

che tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$. Poiché l'insieme $D_1 := \{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leq 1\}$ è un disco che contiene l'origine come punto interno, viene meno la condizione preliminare per l'integrabilità secondo Riemann, e cioè che la funzione sia limitata sull'insieme. La f non è nemmeno continua nell'origine, naturalmente, ma la non continuità in sé e per sé non implica la non integrabilità.





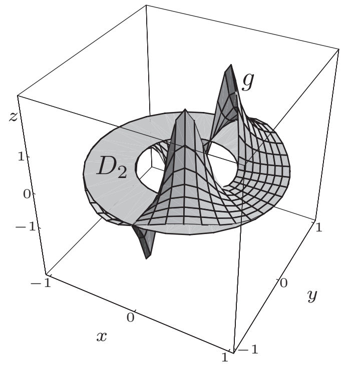
Fuori dall'origine la funzione g è continua (anzi, di classe C^∞). I due insiemi $D_2 := \{(x,y)\ :\ 1/4 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$ e $D_3 := \{(x,y)\ :\ 1/4 \leq x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$ sono chiusi e limitati e non contengono l'origine. Quindi la g è integrabile su di essi.

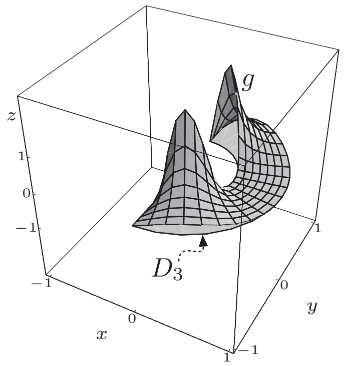
L'insieme D_2 è una corona circolare di centro l'origine, e in particolare è simmetrico rispetto all'asse y. Poiché $f(-x,y) = -f(x,y)$, possiamo dire per simmetria che

$$\int_{D_2} g(x,y)\,dx\,dy = 0\,.$$

L'integrale di g su D_3 non è così immediato. Vista la forma di D_3 conviene usare le coordinate polari:

$$D_3' = \left\{(r,\theta) \ : \ \frac{1}{2} \le r \le 1,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$





Quindi

$$\begin{aligned}
\int_{D_3} g(x,y)\,dx\,dy &= \int_{D_3'} g(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) r\,dr\,d\theta = \\
&= \int_{1/2}^{1} dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(r\cos\theta)(r\,\mathrm{sen}\,\theta)^4}{(r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta)^4} r\,d\theta = \\
&= \int_{1/2}^{1} dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^6\,\mathrm{sen}^4\,\theta\cos\theta}{r^8}\,d\theta = \\
&= \int_{1/2}^{1} dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{sen}^4\,\theta\cos\theta}{r^2}\,d\theta = \\
&= \int_{1/2}^{1} \left[\frac{\mathrm{sen}^5\,\theta}{5r^2}\right]_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} dr = \\
&= \int_{1/2}^{1} \left(\frac{1}{5r^2} + \frac{1}{5r^2}\right) dr = \frac{2}{5}\int_{1/2}^{1} r^{-2}\,dr = \\
&= \frac{2}{5}\left[-r^{-1}\right]_{1/2}^{1} = \frac{2}{5}(-1+2) = \frac{2}{5}\,.
\end{aligned}$$

Un modo per accorgerci che qualcosa non va nell'integrabilità di g su D_1 è di procedere avventatamente al calcolo dell'integrale come segue:

$$\begin{aligned}
\int_{D_1} g(x,y)\,dx\,dy &= \int_{D_1'} g(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) r\,dr\,d\theta = \int_0^1 dr \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(r\cos\theta)(r\,\mathrm{sen}\,\theta)^4}{(r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta)^4} r\,d\theta = \\
&= \int_0^1 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^6\,\mathrm{sen}^4\,\theta\cos\theta}{r^8}\,d\theta = \left(\int_0^1 \frac{1}{r^2}\,dr\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{sen}^4\,\theta\cos\theta\,d\theta\right) = \\
&= \left[-\frac{1}{r}\right]_{r=0^+}^{r=1} \cdot \left[\frac{\mathrm{sen}^5\,\theta}{5}\right]_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} = (+\infty)\cdot 0 = ????
\end{aligned}$$

Un altro stile di calcolo ci lascerebbe cullare nell'illusione che l'integrale sia nullo:

$$\int_{D_1} g(x,y)\,dx\,dy = \cdots = \int_0^1 dr \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^6\,\mathrm{sen}^4\,\theta\cos\theta}{r^8}\,d\theta = \int_0^1 dr \left[\frac{\mathrm{sen}^5\,\theta}{5r^2}\right]_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} = \int_0^1 0 dr = 0\,.$$

Anche ragionando per simmetria, come fatto con D_2, si è portati a pensare che l'integrale sia zero. L'errore in tutti i casi sta a monte, e cioè nel dare per scontato che l'integrale esista. Al fatto che la g non è limitata, e che quindi non è integrabile in senso stretto, si aggiunge poi un problema geometrico: fra il disco D_1 e il grafico di f c'è infinito volume positivo (nel semispazio $x > 0$) e infinito negativo (nel semispazio $x < 0$). Che senso ha la somma algebrica di un un volume infinito positivo e di uno infinito negativo? Un problema simile a quello di dare un senso per esempio a $\int_{-1}^{1} 1/x\,dx$.