Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1999/2000

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Prova Scritta del 29 maggio 2000

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Trovare massimo e minimo globale, se esistono, della funzione $f(x,y) := x^2 + 4y^2$ sull'insieme

$$E := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |6y| \le x+2, \quad x \le 1\big\}.$$

2. Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = xy(y+1), \\ y' = y^2 + y\,, \end{cases}$$

trovare i punti di equilibrio e l'equazione differenziale delle orbite, tracciare un diagramma di fase qualitativo indicante il verso di percorrenza delle traiettorie, dire quali sono i dati iniziali per i quali la traiettoria è limitata, e trovare una formula risolutiva esplicita.

3. Consideriamo la regione del piano xz definita da

$$D := \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \ge 0, \quad 0 \le z \le 1, \quad \frac{1}{4} \le x^2 + z^2 \le 1\right\},$$

e sia V il solido ottenuto ruotando di 360 gradi la regione D attorno all'asse z. Trovare area e baricentro di D e volume e baricentro di V.

Punti: 10, 10, 10

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1999/2000

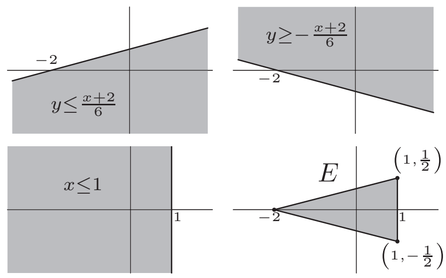
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Prova Scritta del 29 maggio 2000

Svolgimento

1. La funzione $f(x,y) := x^2 + 4y^2$, essendo un polinomio, è di classe C^∞. Inoltre si vede che è sempre ≥ 0 e si annulla solo nell'origine. Studiamo l'insieme D: sfruttando il fatto che la disuguaglianza $|a| \leq b$ equivale a $-b \leq a \leq b$, si può scrivere



$$(x,y) \in E \quad \iff \quad \begin{cases} -(x+2) \leq 6y \leq x+2 \\ x \leq 1 \end{cases} \quad \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases} -(x+2)/6 \leq y \leq (x+2)/6 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Disegnando i tre semipiani $y \geq -(x+2)/6$, $y \leq (x+2)/6$, $x \leq 1$, risulta che E è il triangolo di vertici $(-2,0)$, $(1,1/2)$, $(1,-1/2)$, compreso l'interno e il bordo. Essendo E chiuso e limitato ed f continua, siamo garantiti che massimo e minimo globale di f su E esistono. Inoltre sia f che E sono simmetrici per scambio di y con $-y$, per cui è sufficiente studiare il problema nel primo e secondo quadrante. Il minimo globale è chiaramente nell'origine, dove f sia annulla, e che appartiene a E. Se di questo non ci fossimo accorti, seguiamo la prassi di gradiente ed hessiana:

$$(f_x, f_y) = (2x, 8y), \qquad \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Il gradiente si annulla solo nell'origine, e la matrice hessiana è definita positiva ovunque (perché determinante ed elementi diagonali sono > 0). Questo ci dice che l'origine è un punto di minimo *locale*, e che non ci sono altri punti di estremo locale interni. Passiamo alla frontiera. Studiamo la f lungo il segmento fra $(-2,0)$ e $(1,1/2)$, cioè sulla retta $y = (2+x)/2$ per $x \in [-2,1]$:

$$g_1(x) := f\Big(x, \frac{2+x}{2}\Big) = x^2 + \Big(\frac{2+x}{2}\Big)^2 = x^2 + \frac{4+4x+x^2}{4} = \frac{5x^2+4x+4}{4}.$$

La derivata prima di g_1 è

$$g_1'(x) = \frac{10x+4}{4} = \frac{5x+2}{2},$$

che è negativa per $x < -2/5$ e positiva per $x > -2/5$. Il punto $x = -2/5$ sta nell'intervallo $[-2,1]$, e quindi è punto di minimo globale di g_1 su $[-2,1]$, mentre il massimo va cercato agli estremi: poiché

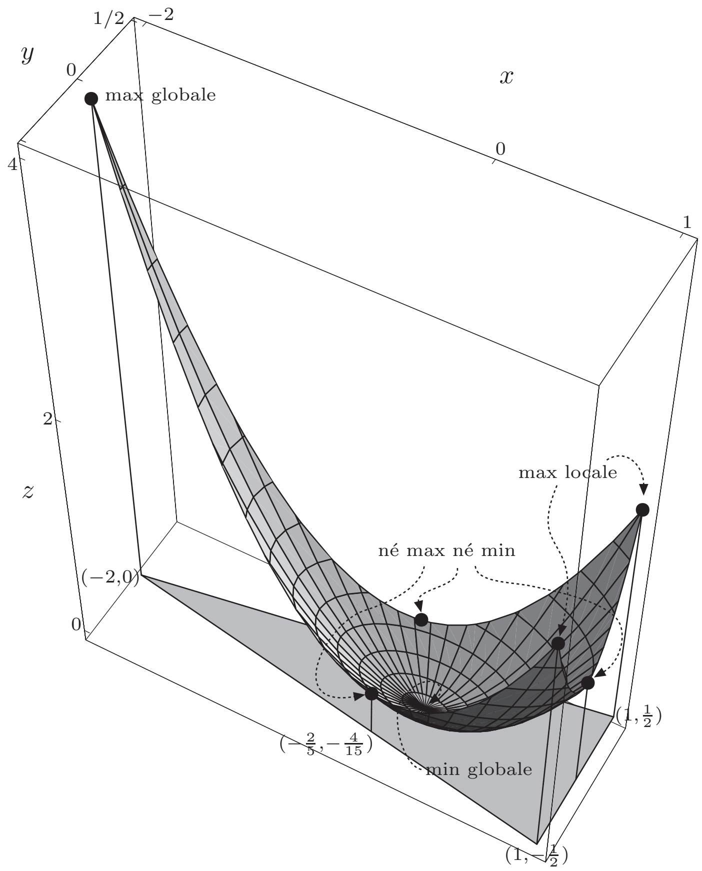
$$g_1(-2) = f(-2,0) = \frac{5(-2)^2 + 4(-2) + 4}{4} = 5 - 2 + 1 = 6, \qquad g_1(1) = f\Big(1, \frac{1}{2}\Big) = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2} < 6,$$

il massimo globale di g_1 su $[-2,1]$ è assunto in -2.
Studiamo la f sul segmento fra $(0,-1/2)$ e $(0,1/2)$ (per simmetria basterebbe la parte nel primo quadrante), cioè sulla retta $x = 1$ per $y \in [-1/2, 1/2]$:

$$g_2(y) := f(1,y) = 1^2 + 4y^2 = 1 + 4y^2.$$

La g_2 è così semplice che non c'è bisogno di derivata per dire che g_2 ha minimo globale su $[-1/2,1/2]$ per $y = 0$ e massimo globale negli estremi (entrambi), e

$$g_2(0) = f(1,0) = 1 + 4 \cdot 0^2 = 1, \qquad g_2(1/2) = f\Big(1, \frac{1}{2}\Big) = 1 + 4(1/2)^2 = 1 + 1 = 2.$$



Soli candidati rimasti a essere di massimo globale per f su E sono quindi i vertici del triangolo. Nel vertice $(-2,0)$ la f vale 6, mentre negli altri due vertici vale solo 2. Dunque il massimo globale di f su E è 6 e viene assunto nell'unico punto $(-2,0)$. Possiamo chiederci per curiosità che ne è dei punti $(-2/5, \pm 4/15)$ e $(1,0)$, che erano minimi per la f sui lati del triangolo. Di sicuro non sono punti di minimo globale per la f su E, ma potrebbero essere punti di minimo *locale*? La risposta è no: per la f su E quei punti non sono né di minimo né di massimo. Questo lo si può vedere per esempio studiando la f lungo il raggio che congiunge l'origine ai vari punti. Sul segmento fra l'origine e $(1,0)$ la funzione vale $f(x,0) = x^2$, che in $x = 1$ ha un massimo stretto. Quindi nelle vicinanze di $(1,0)$ ci sono sia punti in cui la f vale di più (sul lato del triangolo), sia punti in cui vale di meno (sul raggio per l'origine), e di conseguenza il punto $(1,0)$ non è né massimo né minimo locale per f su E. Il ragionamento è simile per $(-2/5, \pm 4/15)$. Ricordiamoci che l'essere punto di massimo o minimo locale dipende non solo da f ma anche dall'insieme su cui viene considerata.

Un modo diverso per affrontare il problema del massimo di f su E è di notare che $f(x,y) = x^2 + 4y^2 = x^2 + (2y)^2$, formula che suggerisce il cambio di variabile $2y = u$. Nelle variabili (x,u) la funzione e l'insieme da studiare diventano

$$\tilde{f}(x,u) := f(x, u/2) = x^2 + u^2 ,$$

$$\tilde{E} := \big\{(x,u) \ : \ (x, u/2) \in E\big\} = \big\{(x,u) \ : \ |6(u/2)| \le x + 2, \quad x \le 1\big\} = \Big\{(x,u) \ : \ |u| \le \frac{x+2}{3}, \quad x \le 1\Big\} .$$

La $\tilde{f}$ è il quadrato della distanza dall'origine, mentre $\tilde{E}$ è il triangolo di vertici $(-2,0)$ e $(0,\pm 1)$. È chiaro che il punto di E più vicino all'origine è l'origine stessa, mentre il punto più distante è $(x,u) = (-2,0)$.

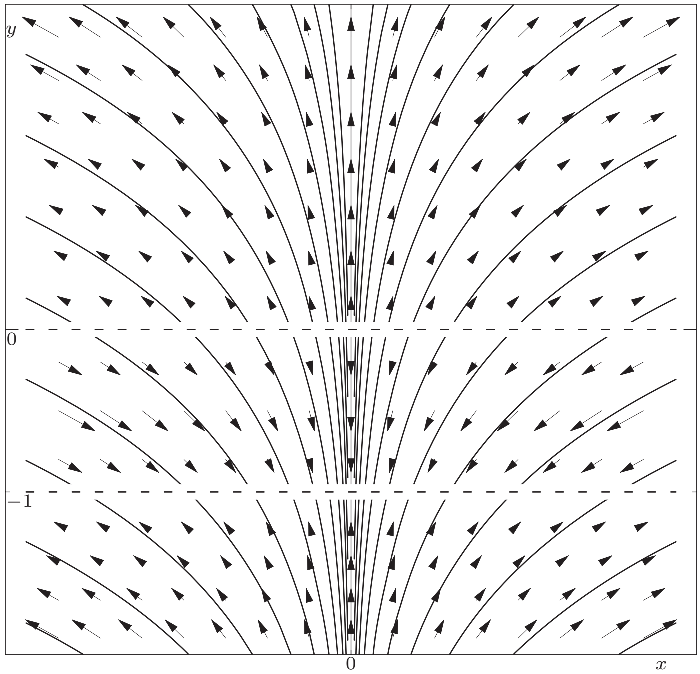
2. I punti di equilibrio del sistema $x' = xy(y+1)$, $y' = y^2 + y$ sono i punti (x,y) in cui si annullano insieme i secondi membri:

$$\begin{cases} xy(y+1) = 0 \\ y^2 + y = 0 \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} xy(y+1) = 0 \\ y(y+1) = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione implica la prima, per cui il sistema equivale alla sola seconda equazione, che ha come soluzioni le rette orizzontali $y = 0$ (l'asse x) e $y = -1$. L'equazione differenziale delle orbite è

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{y^2 + y}{xy(y+1)} = \frac{y(y+1)}{xy(y+1)} = \frac{1}{x} ,$$

equazione chiede di trovare le funzioni $y(x)$ la cui derivata è $1/x$. Sappiamo bene che queste funzioni sono $y(x) = \ln|x| + c$ (a dire il vero la costante c può essere presa distinta per $x > 0$ e per $x < 0$). Dunque le soluzioni non verticali dell'equazione differenziale originale sono tutte contenute in un qualche traslato in verticale del grafico del logaritmo. Il verso di percorrenza si trova più facilmente guardando y', che ha solo due fattori, piuttosto che x', che ne ha tre: nei semipiani $y < -1$ e $y > 0$ il verso di percorrenza è verso l'alto, mentre nella striscia $-1 < y < 0$ è verso il basso. Nel semipiano $y > 0$ le traiettorie sfuggono all'infinito al crescere del tempo, mentre nel semipiano $y < -1$ vengono dall'infinito nel passato. Invece le traiettorie che hanno un punto in comune con la striscia $-1 \le y \le 0$ ci rimangono per tutto il tempo, perché non possono scavalcare le zone di equilibrio (ricordiamoci che il sistema è di un tipo che ha unicità delle soluzioni per ogni possibile dato iniziale), e inoltre sono limitate pure in orizzontale perché devono rimanere o nell'asse y o nel tratto di grafico di logaritmo tagliato dalla striscia. Quindi i dati iniziali per i quali la soluzione è limitata sono quelli nella striscia $-1 \le y \le 0$, e solo quelli. Per risolvere esplicitamente il sistema osserviamo che la seconda equazione $y' = y^2 + y$ non coinvolge la x ed è a variabili separabili (molto simile all'equazione logistica). Separiamo le variabili:



$$
\begin{aligned}
&y' = y^2 + y \quad \iff \\
&\iff \frac{y'}{y^2+y} = 1 \quad \iff \\
&\iff \frac{y'}{y(y+1)} = 1 \quad \iff \quad \Big(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\Big) y' = 1 \quad \iff \quad D\Big(\ln\big|y(t)\big| - \ln\big|1+y(t)\big|\Big) = 1 \quad \iff \\
&\iff \int_0^t D\Big(\ln\big|y(s)\big| - \ln\big|1+y(s)\big|\Big)\, ds = \int_0^t 1\, ds \quad \iff \\
&\iff \Big[\ln\Big|\frac{y(s)}{1+y(s)}\Big|\Big]_{s=0}^{s=t} = t \quad \iff \quad \ln\Big|\frac{y(t)}{1+y(t)}\Big| - \ln\Big|\frac{y_0}{1+y_0}\Big| = t \quad \iff \\
&\iff \ln\Big|\frac{y(t)(1+y_0)}{y_0(1+y(t))}\Big| = t \quad \iff \quad \Big|\frac{y(t)(1+y_0)}{y_0(1+y(t))}\Big| = e^t\,.
\end{aligned}
$$

Sapendo che $y(t)$ non può scavalcare i punti di equilibrio, siamo sicuri che $y(t)$ ha lo stesso segno di y_0 e che $1 + y(t)$ ha lo stesso segno di $1 + y_0$. Quindi il valore assoluto al primo membro dell'ultima equazione si può togliere:

$$\frac{y(t)(1+y_0)}{y_0(1+y(t))} = e^t\,,$$

e da qui si ricava infine $y(t)$ esplicitamente:

$$
\begin{aligned}
y(t)(1+y_0) = y_0\big(1+y(t)\big)e^t \quad &\iff \quad (1 + y_0 - y_0e^t)y(t) = y_0e^t \quad \iff \\
&\iff \quad y(t) = \frac{y_0e^t}{1+y_0-y_0e^t} = \frac{y_0}{(1+y_0)e^{-t} - y_0}\,.
\end{aligned}
$$

L'ultima formula dà il risultato corretto anche nei casi di equilibrio $y_0 = 0$ e $y_0 = -1$. Rimane da trovare $x(t)$. Le soluzioni che partono sull'asse y ci rimangono, perché si vede che $x(t) \equiv 0$ è soluzione di $x' = xy(y + 1)$. Le soluzioni che non partono dall'asse x non possono oltrepassarlo per l'unicità. Troviamo la $x(t)$ fuori dall'asse x ricordandoci che vale $y(t) = \ln|x(t)| + c$, da cui $|x(t)| = e^{y(t)-c}$. La costante c si ricava ponendo $t = 0$: $y_0 = \ln|x_0| + c$, da cui $c = y_0 - \ln|x_0|$. Da qui si ottiene

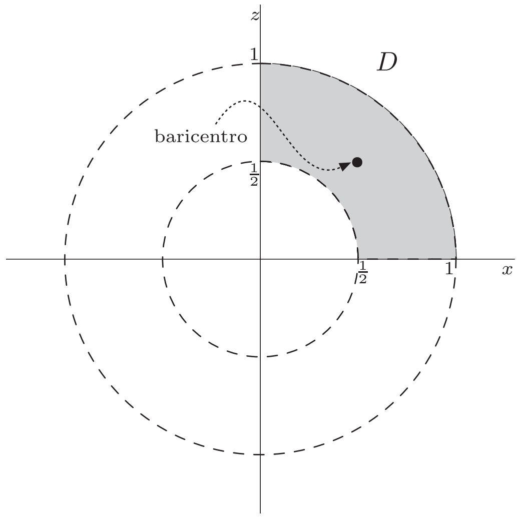
$$|x(t)| = \exp\Big(y(t) - y_0 + \ln|x_0|\Big) = |x_0| \exp\big(y(t) - y_0\big)\,.$$

Ricordando che $x(t)$ non può cambiare segno si può togliere il valore assoluto ad ambo i membri e si ha finalmente

$$\begin{cases} y(t) = \dfrac{y_0}{(1+y_0)e^{-t} - y_0} \\ x(t) = x_0 \exp\Big(\dfrac{y_0}{(1+y_0)e^{-t} - y_0} - y_0\Big) . \end{cases}$$

Queste formule valgono anche sulle rette $y = 0$, $y = -1$ e sull'asse y. Si verifica che quando $-1 \le y_0 \le 0$ sono definite per ogni $t \in \mathbb{R}$ e sono limitate. Per $y_0 > 0$ sono definite sulla semiretta $t > \bar{t} := \ln(y_0/(1+y_0))$ (notare che $\bar{t} < 0$) e divergono per $t \to \bar{t}^-$. Per $y_0 < -1$ sono definite soltanto sulla semiretta $t < \bar{t}$ (in questo caso $\bar{t} > 0$), e divergono quando $t \to \bar{t}^-$.

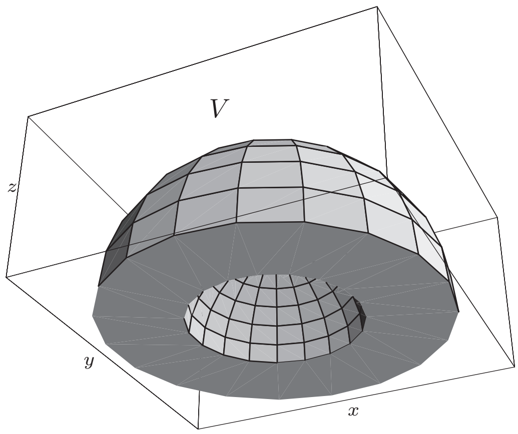
3. La disequazione $1/4 \le x^2 + z^2 \le 1$ corrisponde alla corona circolare di raggio esterno 1 e raggio interno $1/2$, con centro nell'origine, e bordo compreso. La disuguaglianza $x \ge 0$ dà il semipiano formato dal primo e quarto quadrante, e $0 \le z \le 1$ è la striscia compresa fra l'asse x e la retta $z = 1$. In definitiva l'insieme D è la porzione della corona circolare che sta nel primo quadrante, compreso il bordo. Di questa regione si sa dire molto ricorrendo alla sola geometria elementare. Dato che il cerchio di raggio r ha area πr^2, la corona circolare ha area $\pi 1^2 - \pi(1/2)^2 = 3\pi/4$. Per simmetria l'area di D sarà un quarto dell'area della corona circolare:



$$\operatorname{area} D = \frac{3}{16}\pi .$$

Analogamente il volume del solido di rotazione sarà metà del volume della palla snocciolata di raggio esterno 1 e raggio interno $1/2$. Poiché il volume della palla di raggio r è $4\pi r^3/3$, avremo che

$$\begin{aligned} \operatorname{volume} V &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi 1^3 - \frac{4}{3}\pi\Big(\frac{1}{2}\Big)^3\right) = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\Big(1 - \frac{1}{8}\Big) = \frac{4}{6}\pi\cdot\frac{7}{8} = \frac{7}{12}\pi . \end{aligned}$$



Il baricentro di D si trova sulla bisettrice del primo quadrante, per la simmetria di D. Indichiamo con $x_{\text{barD}} = z_{\text{barD}}$ la sua ascissa, che è anche la sua coordinata z. Dal teorema di Pappo sappiamo che il volume di V è uguale all'area di D moltiplicata per la lunghezza dell'arco percorso dal baricentro. Ricaviamo in questo modo x_{barD}:

$$\operatorname{volume} V = 2\pi x_{\text{barD}} \cdot \operatorname{area} D ,$$

cioè

$$\frac{7}{12}\pi = 2\pi x_{\text{barD}}\cdot\frac{3}{16}\pi , \qquad \text{ossia ancora} \quad x_{\text{barD}} = z_{\text{barD}} = \frac{7}{12}\pi\cdot\frac{16}{2\pi\cdot 3\pi} = \frac{14}{9\pi} \approx 0{,}495 .$$

Il baricentro di D è dunque vicinissimo al punto $(1/2, 1/2)$, ma non coincide. Verifichiamo comunque il risultato calcolando x_{barD} con un integrale. Conviene usare le coordinate polari:

$$x_{\text{barD}} = \frac{1}{\operatorname{area} D}\int_D x\,dx\,dy = \frac{1}{3\pi/16}\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{1/2}^1 (r\cos\theta) r\,dr =$$

$$= \frac{16}{3\pi}\int_0^{\pi/2} d\theta \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_{r=1/2}^{r=1} \cos\theta = \frac{16}{3\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}\Big(1-\frac{1}{8}\Big)\cos\theta\, d\theta =$$
$$= \frac{16}{9\pi}\cdot\frac{7}{8}\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = \frac{14}{9\pi}\big[\operatorname{sen}\theta\big]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{14}{9\pi}(1-0) = \frac{14}{9\pi}\,.$$

Per quanto riguarda il baricentro $(x_{\mathrm{barV}}, y_{\mathrm{barV}}, z_{\mathrm{barV}})$ del solido V, si vede per simmetria che le coordinate x e y sono nulle, mentre per la quota z_{barV} non vedo altro modo che di calcolare un integrale, che conviene fare in coordinate polari ($x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$; le coordinate sferiche semplificherebbero i conti, ma non sono state illustrate a lezione). Il solido V si decompone nell'unione dei due insiemi disgiunti in forma normale rispetto all'asse z:

$$V_1 := \Big\{(x,y,z)\ :\ 0 \le \sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{2},\quad \sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\Big\},$$
$$V_2 := \Big\{(x,y,z)\ :\ \frac{1}{2} \le \sqrt{x^2+y^2} \le 1,\quad 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\Big\},$$

che in coordinate polari corrispondono a

$$\tilde V_1 = \Big\{(r,\theta,z)\ :\ 0 \le r < \frac{1}{2},\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad \sqrt{\frac{1}{4}-r^2} \le z \le \sqrt{1-r^2}\Big\},$$
$$\tilde V_2 = \Big\{(r,\theta,z)\ :\ \frac{1}{2} \le r \le 1,\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad 0 \le z \le \sqrt{1-r^2}\Big\}$$

Calcoliamo gli integrali sui due insiemi separatamente:

$$\int_{V_1} z\,dx\,dy\,dz = \int_{\tilde V_1} zr\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^{1/2} dr\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{1/4-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} zr\,dz = \int_0^{1/2} dr\int_0^{2\pi} d\theta\, r\Big[\frac{z^2}{2}\Big]_{z=\sqrt{1/4-r^2}}^{z=\sqrt{1-r^2}} =$$
$$= \int_0^{1/2} dr\ 2\pi r\cdot\frac{1}{2}\Big(1-r^2-\frac{1}{4}+r^2\Big) = \pi\int_0^{1/2}\frac{3}{4}r\,dr =$$
$$= \frac{3}{4}\pi\Big[\frac{r^2}{2}\Big]_{r=0}^{r=1/2} = \frac{3}{4}\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{32}\pi\,.$$

Il risultato è positivo, come doveva essere. Su V_2 l'integrale è

$$\int_{V_2} z\,dx\,dy\,dz = \int_{\tilde V_2} zr\,dr\,d\theta\,dz = \int_{1/2}^{1} dr\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{1-r^2}} zr\,dz = \int_{1/2}^{1} dr\int_0^{2\pi} d\theta\, r\Big[\frac{z^2}{2}\Big]_{z=0}^{z=\sqrt{1-r^2}} =$$
$$= \int_{1/2}^{1} dr\ 2\pi r\cdot\frac{1}{2}\big(1-r^2-0\big) = \pi\int_{1/2}^{1}(r-r^3)\,dr =$$
$$= \pi\Big[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\Big]_{r=1/2}^{r=1} = \pi\cdot\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}\Big) = \frac{2^5-2^4-2^3+1}{2^6}\pi =$$
$$= \frac{32-16-8+1}{2^6}\pi = \frac{9}{2^6}\pi = \frac{9}{64}\pi\,.$$

Di nuovo positivo. In conclusione la coordinata z del baricentro di V è

$$z_{\mathrm{barV}} = \frac{1}{\operatorname{volume} V}\int_V z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{7\pi/12}\Big(\int_{V_1} z\,dx\,dy\,dz + \int_{V_2} z\,dx\,dy\,dz\Big) =$$
$$= \frac{12}{7\pi}\Big(\frac{3}{32}\pi+\frac{9}{64}\pi\Big) = \frac{12}{7}\cdot\frac{6+9}{64} = \frac{45}{112} \approx 0{,}402\,.$$

Notare come il baricentro di V non appartiene a V, essendo nel nòcciolo mancante. Il baricentro di V è più basso del baricentro di D. La cosa non dovrebbe sorprendere, se si intuisce che V è più sbilanciato verso il basso di quanta lo sia D.