Università degli Studi di Udine | Anno Accademico 1999/2000

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Prova Scritta del 15 febbraio 2000

Cognome e Nome:

Matricola: | Documento di identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Tempo a disposizione: 3 ore.

1. Data la funzione di due variabili reali

$$f(x,y) := y\big|x + |x-y|\big|\,,$$

a. tracciare la linea di livello 0 di f;
b. trovare il massimo e il minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$E := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \leq 0, \quad x-1 \leq y \leq 2x\big\}\,.$$

2. Risolvere esplicitamente il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y\tan t = e^t \cos^2 t \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

3. Calcolare l'area della regione di piano

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{R}{\sqrt{2}} \leq y \leq x \tan\frac{\pi}{3}, \quad x^2+y^2 \leq R^2\right\}$$

dove $R > 0$ è una costante.

Punti: 6+7, 10, 10.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Prova Scritta del 15 febbraio 2000

Svolgimento

1. a. L'insieme di livello 0 di f è per definizione l'insieme dei punti (x, y) di $\mathbb{R}^2$ in cui si annulla f, cioè tali che

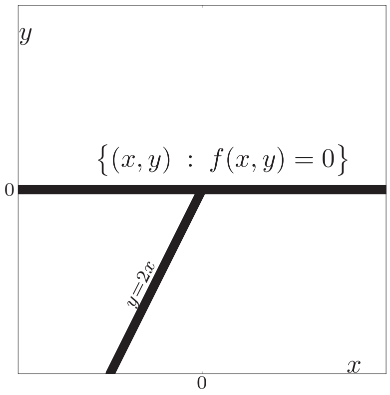
$$y\big|x + |x - y|\big| = 0\,.$$

Un prodotto si annulla se e solo se si annulla almeno uno dei fattori. Il fattore y si annulla sull'asse x. Il fattore $|x + |x - y||$ è un valore assoluto, e quindi si annulla se e solo se si annulla l'argomento:

$$\big|x + |x - y|\big| = 0 \quad\iff\quad x + |x - y| = 0\,.$$

Distinguiamo due casi a seconda che $x - y$ sia ≥ 0 o < 0:

$$x + |x - y| = 0 \quad\iff\quad \begin{cases} 0 = x + (x - y) = 2x - y & \text{se } x - y \geq 0, \\ 0 = x - (x - y) = y & \text{se } x - y < 0, \end{cases}$$



Il primo caso si sviluppa in

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x > y \end{cases} \quad\iff\quad \begin{cases} y = 2x \\ x > 2x \end{cases} \quad\iff\quad \begin{cases} y = 2x \\ x < 0 \end{cases}$$

e dà la parte della retta $y = 2x$ che sta nel terzo quadrante. Il secondo caso equivale a

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - y < 0 \end{cases} \quad\iff\quad \begin{cases} y = 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

che è un sottinsieme dell'asse x, che avevamo già. Conclusione: l'insieme di livello 0 di f è

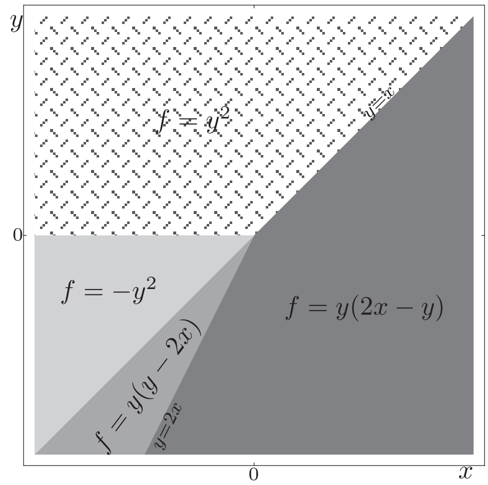
$$\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ y = 0\big\} \cup \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x < 0,\ y = 2x\big\}\,.$$

Non è richiesto dal problema, ma non è male studiare meglio la funzione. Togliamo i valori assoluti, cominciando da quello interno:

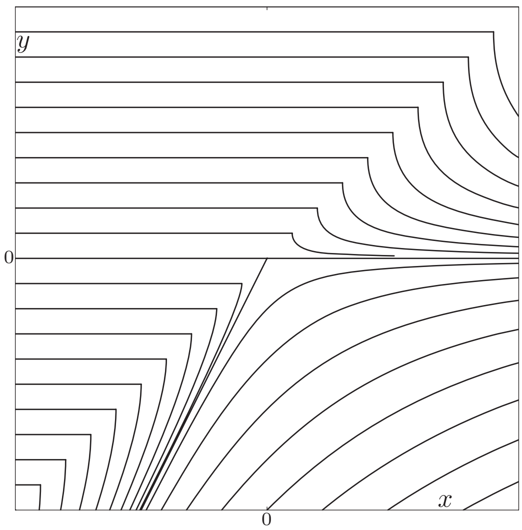
$$\begin{aligned} f(x, y) &= y\big|x + |x - y|\big| = \\ &= \begin{cases} y\big|x + (x - y)\big| = y\,|2x - y| & \text{se } x \geq y, \\ y\big|x - (x - y)\big| = y\,|y| & \text{se } x < y, \end{cases} \end{aligned}$$

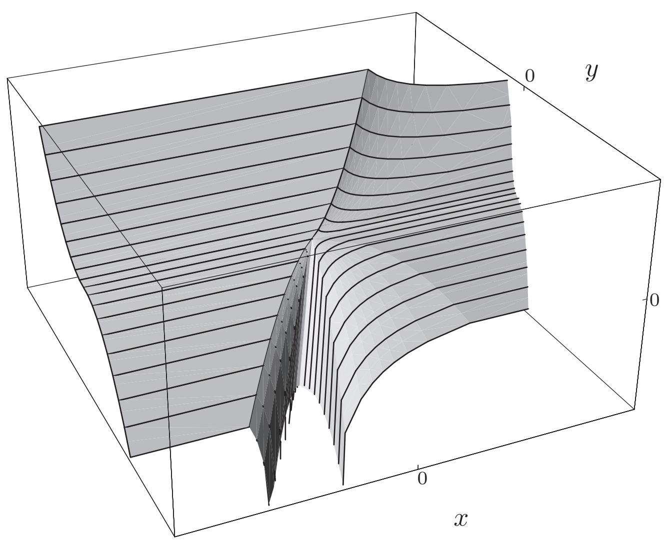
per poi passare a quello esterno:

$$f(x, y) = \begin{cases} y(2x - y) & \text{se } x \geq y \text{ e } 2x \geq y \\ -y(2x - y) & \text{se } x \geq y \text{ e } 2x < y, \\ y^2 & \text{se } x < y \text{ e } y \geq 0, \\ -y^2 & \text{se } x < y \text{ e } y < 0. \end{cases}$$



La figura seguente mostra gli insiemi di livello di f e un suo grafico in tre dimensioni.

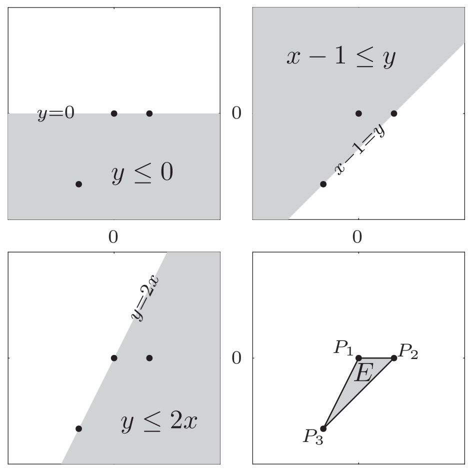




Problema. La f è differenziabile nell'origine?

b. La funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ perché composizione di polinomi (che sono funzioni continue) col valore assoluto (che è continuo). Studiamo l'insieme

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \leq 0, \quad x - 1 \leq y \leq 2x\}.$$



E è l'intersezione dei tre semipiani $y \leq 0$, $x - 1 \leq y$ e $y \leq 2x$. Le tre rette $y = 0$, $x - 1 = y$ e $y = 2x$ si intersecano a due a due nei tre punti $P_1 := (0, 0)$, $P_2 := (1, 0)$, $P_3 := (-1, -2)$. Dal modo in cui sono disposti i tre semipiani si vede che l'intersezione è il triangolo di vertici P_1, P_2, P_3, compreso l'interno e il bordo. In particolare E è un insieme chiuso e limitato. Per il teorema di Weierstrass la funzione continua f assume certamente massimo e minimo assoluti su E.
Quando $(x, y) \in E$ in particolare $y \leq 0$, per cui $f(x, y)$, che è il prodotto di y per un valore assoluto, è ≤ 0. Il triangolo E ha in comune con l'insieme di livello 0 di f i segmenti P_1P_2 e P_1P_3. Quindi il massimo assoluto di f su E è 0 e viene assunto sui segmenti P_1P_2 e P_1P_3.
Se $(x, y) \in E$ allora sommando membro a membro le disuguaglianze $y \leq 0$ e $y \leq 2x$ otteniamo $2y \leq 2x$, cioè $y \leq x$. Quindi

$$\begin{aligned} (x, y) \in E \quad &\Longrightarrow \quad \big(y \leq x \quad \text{e} \quad y \leq 2x\big) \quad \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad f(x, y) = y\big|x + |x - y|\big| = y\big|x + (x - y)\big| = y\,|2x - y| = y(2x - y)\,. \end{aligned}$$

Su E la nostra f coincide colla funzione

$$g(x, y) := y(2x - y) = 2xy - y^2\,,$$

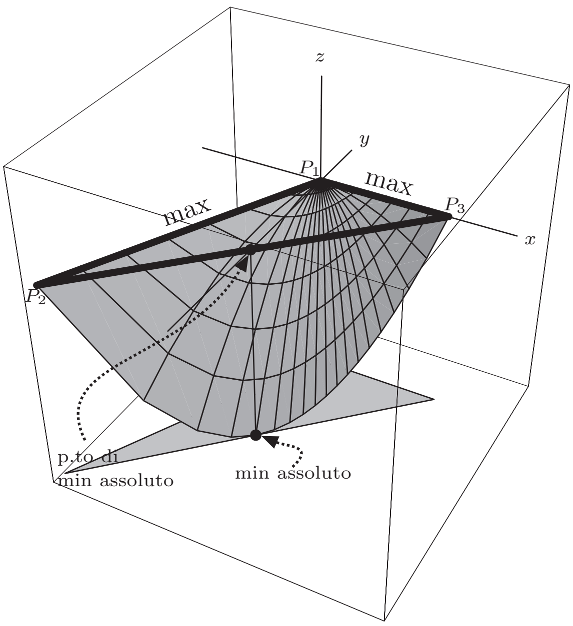
che è un polinomio. A g possiamo applicare la teoria dei massimi e minimi per le funzioni regolari, mentre f non è chiaro se sia differenziabile, a causa dei valori assoluti. Cerchiamo i punti critici di g:

$$\begin{cases} g_x = 2y = 0 \\ g_y = 2x - 2y = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

L'unico punto critico di g è P_1, che si trova sul bordi di E, e sappiamo già essere un punto di massimo assoluto per g su E. Non ci sono quindi punti di massimo o minimo locale per g interni a E. Sarebbe superfluo ai nostri scopi, comunque calcoliamo la matrice hessiana di g:

$$\begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{y,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

L'origine è un punto di sella per g, perché la matrice hessiana ha determinante -4. Quindi l'origine è non è né un massimo né un minimo locale per g *considerata su* $\mathbb{R}^2$. Attenzione: questo fatto da solo non permette di decidere se l'origine sia o no di massimo o minimo per g *sul triangolo* E. In effetti abbiamo già osservato che rispetto a E l'origine è di massimo assoluto. Cerchiamo i massimi o minimi sulla frontiera. Dei segmenti P_1P_2 e P_1P_3 sappiamo già tutto. Il segmento P_2P_3 è descritto da $x-1 = y$ e $-1 \le x \le 1$. Siamo ricondotti a studiare la funzione di una variabile



$$\begin{aligned} h(x) &:= f(x, x-1) = \\ &= g(x, x-1) = \\ &= 2x(x-1) - (x-1)^2 = \\ &= 2x^2 - 2x - x^2 - 1 + 2x = \\ &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

sull'intervallo $-1 \le x \le 1$. Si vede ad occhio che h ha minimo assoluto in $x = 0$ (corrispondente a $(0, -1)$) e massimo assoluto in $x = \pm 1$ (corrispondenti a P_2 e P_3), e nessun altro punto di estremo locale. Concludiamo che il minimo assoluto di g (e quindi di f) su E è assunto in $(0, -1)$.

2. È un problema di Cauchy relativo a un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale lineare. La tangente di t non è definita per $t = k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$; data la condizione iniziale, ci interessano solo i $t \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, $y \in \mathbb{R}$. Il fattore integrante dell'equazione è

$$\mu(t) = e^{\int_0^t \tan\tau\, d\tau} = e^{-\log|\cos t|} = \frac{1}{|\cos t|} = \frac{1}{\cos t} \qquad \text{per } t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Moltiplicando l'equazione per $\mu(t)$ risulta

$$\frac{y'}{\cos t} + \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t} y = e^t \cos t \qquad \text{cioè} \qquad \left(\frac{y}{\cos t}\right)' = e^t \cos t\,.$$

Integrando ambo i membri si ha

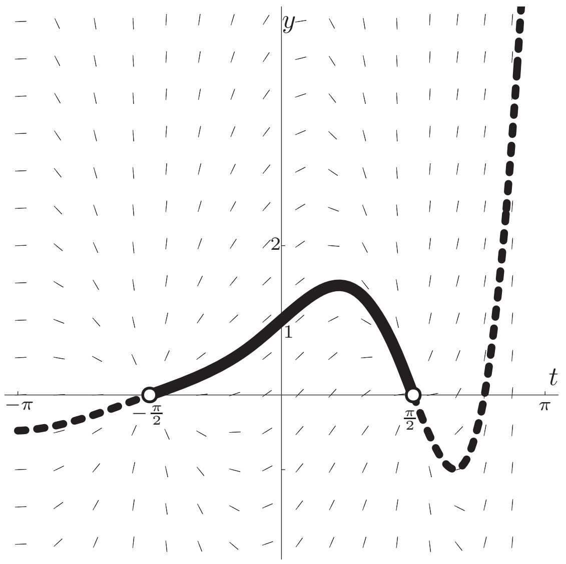
$$\frac{y(t)}{\cos t} - \frac{y(t_0)}{\cos t_0} = \int_{t_0}^t e^\tau \cos\tau\, d\tau\,.$$

Per trovare una primitiva di $\tau \mapsto e^\tau \cos\tau$ si può per esempio integrare per parti due volte, prendendo sempre e^τ come fattore finito:

$$\begin{aligned} \int e^\tau \cos\tau\, d\tau &= \int e^\tau\, d\operatorname{sen}\tau = e^\tau \operatorname{sen}\tau - \int \operatorname{sen}\tau\, de^\tau = e^\tau \operatorname{sen}\tau - \int e^\tau \operatorname{sen}\tau\, d\tau = \\ &= e^\tau \operatorname{sen}\tau - \int e^\tau\, d(-\cos\tau) = e^\tau \operatorname{sen}\tau - \left(-e^\tau\cos\tau - \int (-\cos\tau)\, de^\tau\right) = \\ &= e^\tau \operatorname{sen}\tau + e^\tau\cos\tau - \int e^\tau\cos\tau\, d\tau\,. \end{aligned}$$

In questo modo l'ultimo membro contiene di nuovo l'integrale di partenza, ma questa volta con il segno meno davanti. Portandolo al primo membro si ha

$$2\int e^\tau\cos\tau\, d\tau = e^\tau\operatorname{sen}\tau + e^\tau\cos\tau\,, \qquad \text{da cui} \qquad \int e^\tau\cos\tau\, d\tau = \frac{e^\tau}{2}(\operatorname{sen}\tau + \cos\tau)\,,$$



dove abbiamo trascurato di inserire la costante arbitraria di integrazione. Tornando all'equazione, ricordando che $t_0 = 0$, $y(t_0) = 1$, si ricava

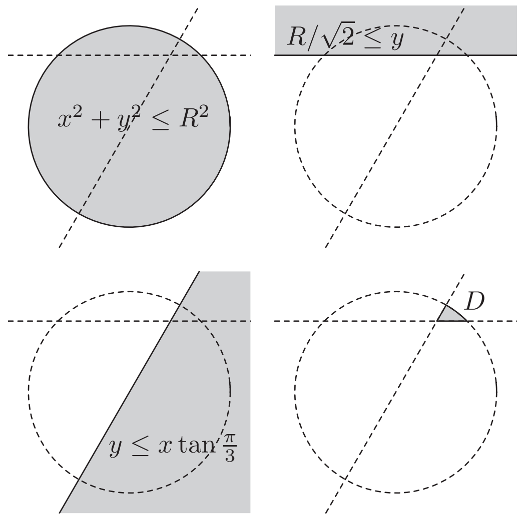
$$\begin{aligned}\frac{y(t)}{\cos t} - \frac{1}{\cos 0} &= \left[\frac{e^\tau}{2}(\operatorname{sen}\tau + \cos\tau)\right]_0^t = \\ &= \frac{e^t}{2}(\operatorname{sen} t + \cos t) - \frac{e^0}{2}(\operatorname{sen} 0 + \cos 0) = \\ &= \frac{e^t}{2}(\operatorname{sen} t + \cos t) - \frac{1}{2},\end{aligned}$$

da cui infine abbiamo la soluzione del problema

$$y(t) = \frac{\cos t}{2}\big(e^t(\cos t + \operatorname{sen} t) + 1\big).$$

Questa formula per $y(t)$ ha senso per ogni $t \in \mathbb{R}$. Ciononostante come soluzione della nostra equazione differenziale va accettata solo per $t \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, perché per $t = \pm\pi/2$ l'equazione differenziale non ha senso.

3. Troviamo dove il cerchio $x^2+y^2 = R^2$ e la retta $R/\sqrt{2} = y$ si incontrano:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ R/\sqrt{2} = y \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + (R/\sqrt{2})^2 = R^2 \\ R/\sqrt{2} = y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + R^2/2 = R^2 \\ R/\sqrt{2} = y \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = R^2/2 \\ R/\sqrt{2} = y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \pm R/\sqrt{2} \\ R/\sqrt{2} = y \end{cases}.$$

Ci sono due punti di intersezione: $(\pm R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$, che sono anche le intersezioni del cerchio con le semirette bisettrici del primo e del secondo quadrante. Troviamo dove il cerchio $x^2 + y^2 = R^2$ e la retta $y = x\tan(\pi/3) = x\sqrt{3}$ si intersecano:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ y = x\sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + (x\sqrt{3})^2 = R^2 \\ y = x\sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 3x^2 = R^2 \\ y = x\sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^2 = R^2 \\ y = x\sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm R/2 \\ y = x\sqrt{3} \end{cases}.$$

Ci sono ancora due punti di intersezione: $\pm(R/2, R\sqrt{3}/2)$. Infine troviamo dove si incontrano le due rette $R/\sqrt{2} = y$ e $y = x\tan(\pi/3) = x\sqrt{3}$:

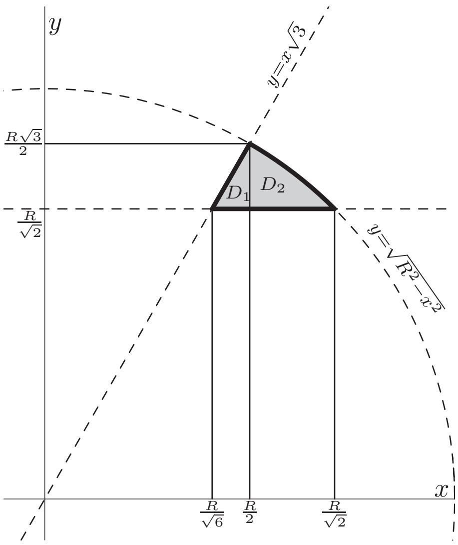
$$\begin{cases} R/\sqrt{2} = y \\ y = x\sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} R/\sqrt{2} = y \\ R/\sqrt{2} = x\sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} y = R/\sqrt{2} \\ x = R/\sqrt{6} \end{cases}.$$

L'intersezione è il punto $(R/\sqrt{6}, R/\sqrt{2})$. Dalla figura si vede che la regione D è delimitata dai segmenti che uniscono $(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{6})$ a $(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$ e a $(R/2, R\sqrt{3}/2)$, e dall'arco di cerchio che congiunge $(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$ a $(R/2, R\sqrt{3}/2)$. Ci sono diversi modi di calcolare l'area di D.

Primo modo. La retta verticale $x = 1/2$ decompone D in due regioni normali (in particolare misurabili secondo Peano-Jordan):

$$D_1 := \left\{(x,y)\ :\ \frac{R}{\sqrt{6}} \leq x \leq \frac{R}{2},\quad \frac{R}{\sqrt{2}} \leq y \leq x\sqrt{3}\right\},$$

$$D_2 := \left\{(x,y)\ :\ \frac{R}{2} \leq x \leq \frac{R}{\sqrt{2}},\quad \frac{R}{\sqrt{2}} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\right\}.$$



D_1 è un triangolo di base $R/2-R/\sqrt{6}$ e altezza $R\sqrt{3}/2-R/\sqrt{2}$, e quindi

$$\begin{aligned}\operatorname{area} D_1 &= \frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{R}{2}-\frac{R}{\sqrt{6}}\Big)\Big(\frac{R\sqrt{3}}{2}-\frac{R}{\sqrt{2}}\Big)= \\ &= \frac{R^2}{2}\,\frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{2}}= \\ &= \frac{R^2}{8\sqrt{12}}(\sqrt{6}-2)^2 = R^2\frac{10-4\sqrt{6}}{16\sqrt{3}}= \\ &= \frac{5-2\sqrt{6}}{8\sqrt{3}}R^2 = \frac{5\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{24}R^2 \approx 0{,}00729R^2\,.\end{aligned}$$

Si può anche usare l'integrazione:

$$\begin{aligned}\operatorname{area} D_1 &= \iint_{D_1} dx\,dy = \int_{R/\sqrt{6}}^{R/2} dx\int_{R/\sqrt{2}}^{x\sqrt{3}} dy = \\ &= \int_{R/\sqrt{6}}^{R/2}\Big(x\sqrt{3}-\frac{R}{\sqrt{2}}\Big)dx =\end{aligned}$$

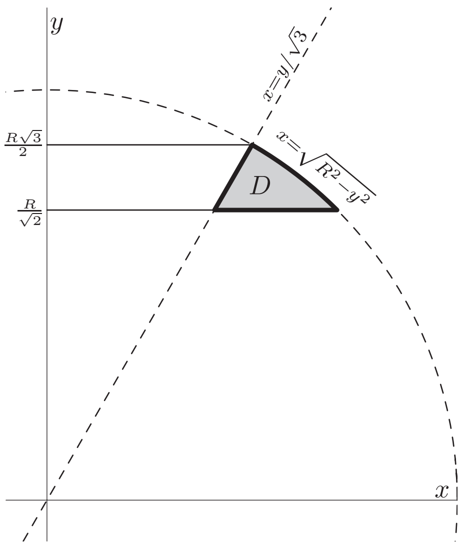
$$\begin{aligned}&= \Big[\frac{x^2\sqrt{3}}{2}-\frac{Rx}{\sqrt{2}}\Big]_{R/\sqrt{6}}^{R/2} = \frac{(R/2)^2\sqrt{3}}{2}-\frac{R^2/2}{\sqrt{2}}-\frac{(R/\sqrt{6})^2\sqrt{3}}{2}+\frac{R^2/\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = R^2\Big(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\Big)= \\ &= R^2\Big(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{\sqrt{3}}{6}\Big) = R^2\frac{3\sqrt{3}-6\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}}{24} = \frac{5\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{24}R^2\,.\end{aligned}$$

L'area di D_2 è

$$\begin{aligned}\operatorname{area} D_2 &= \iint_{D_2} dx\,dy = \int_{R/2}^{R/\sqrt{2}} dx\int_{R/\sqrt{2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = \int_{R/2}^{R/\sqrt{2}}\Big(\sqrt{R^2-x^2}-\frac{R}{\sqrt{2}}\Big)dx = \\ &= \int_{R/2}^{R/\sqrt{2}}\sqrt{R^2-x^2}dx-\int_{R/2}^{R/\sqrt{2}}\frac{R}{\sqrt{2}}dx = \int_{\pi/3}^{\pi/4}\sqrt{R^2-R^2\cos^2\theta}(-R\operatorname{sen}\theta)d\theta-\Big[\frac{Rx}{\sqrt{2}}\Big]_{R/2}^{R/\sqrt{2}} = \\ &= -R^2\int_{\pi/3}^{\pi/4}\sqrt{1-\cos^2\theta}\operatorname{sen}\theta\,d\theta-\Big(\frac{R^2/\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{R^2/2}{\sqrt{2}}\Big) = -R^2\int_{\pi/3}^{\pi/4}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta-R^2\Big(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\Big)= \\ &= -R^2\int_{\pi/3}^{\pi/4}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta-\frac{2-\sqrt{2}}{4}R^2 = -R^2\Big[\frac{\theta}{2}-\frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\Big]_{\pi/3}^{\pi/4}-\frac{2-\sqrt{2}}{4}R^2 = \\ &= -R^2\Big(\frac{\pi/4}{2}-\frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{4}-\frac{\pi/3}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2\pi/3)}{4}\Big)-\frac{2-\sqrt{2}}{4}R^2 = \\ &= -R^2\Big(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\Big)-\frac{2-\sqrt{2}}{4}R^2 = -R^2\Big(\pi\frac{3-4}{24}+\frac{\sqrt{3}-2}{8}\Big)-\frac{2-\sqrt{2}}{4}R^2 = \\ &= \frac{\pi R^2}{24}-\frac{\sqrt{3}-2}{8}R^2-\frac{2-\sqrt{2}}{4}R^2 = \frac{\pi R^2}{24}-\frac{\sqrt{3}-2+4-2\sqrt{2}}{8}R^2 = \\ &= \frac{\pi R^2}{24}-\frac{2+\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{8}R^2 = \frac{\pi+6\sqrt{2}-6-3\sqrt{3}}{24}R^2 \approx 0{,}01795R^2\end{aligned}$$

(in uno degli integrali abbiamo sostituito $x = R\cos\theta$). Quindi

$$\begin{aligned}\operatorname{area} D &= \operatorname{area} D_1+\operatorname{area} D_2 = \frac{5\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{24}R^2+\frac{\pi+6\sqrt{2}-6-3\sqrt{3}}{24}R^2 = \\ &= \frac{\pi+2\sqrt{3}-6}{24}R^2 \approx 0{,}02524R^2\,.\end{aligned}$$



Secondo modo. L'insieme D è normale rispetto all'asse x:

$$D = \left\{(x, y) \ : \ \frac{R}{\sqrt{2}} \le y \le \frac{R\sqrt{3}}{2}, \ \frac{y}{\sqrt{3}} \le x \le \sqrt{R^2 - y^2}\right\}.$$

Quindi

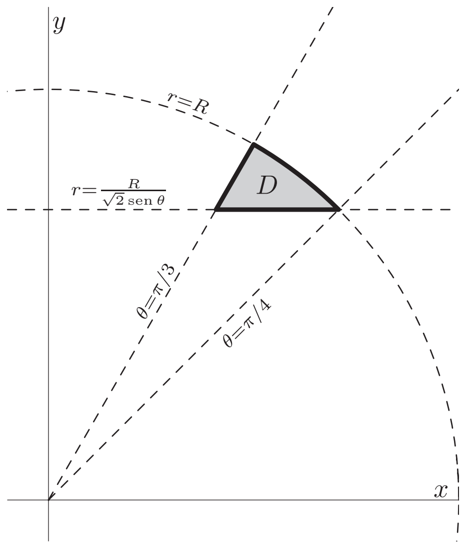
$$\begin{aligned}
\operatorname{area} D &= \iint_D dx\,dy = \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} dy \int_{y/\sqrt{3}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dx = \\
&= \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} \Big(\sqrt{R^2-y^2} - \frac{y}{\sqrt{3}}\Big) dy = \\
&= \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} \sqrt{R^2-y^2}\, dy - \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} \frac{y}{\sqrt{3}}\, dy = \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sqrt{R^2 - R^2 \operatorname{sen}^2\theta}\,(R\cos\theta) d\theta - \Big[\frac{y^2}{2\sqrt{3}}\Big]_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R^2 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2\theta\, d\theta - \Big(\frac{(R\sqrt{3}/2)^2}{2\sqrt{3}} - \frac{(R/\sqrt{2})^2}{2\sqrt{3}}\Big) = R^2 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta - R^2\Big(\frac{3}{8\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{3}}\Big) = \\
&= R^2\Big[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\Big]_{\pi/4}^{\pi/3} - \frac{R^2}{8\sqrt{3}} = R^2\Big(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\Big) - \frac{R^2\sqrt{3}}{24} = R^2 \frac{4\pi + 3\sqrt{3} - 3\pi - 6 - \sqrt{3}}{24} = \\
&= \frac{\pi + 2\sqrt{3} - 6}{24} R^2
\end{aligned}$$

(in un integrale si è sostituito $y = R \operatorname{sen}\theta$).

Terzo modo. L'insieme D ha un'espressione semplice anche in coordinate polari. Il cerchio ovviamente ha equazione $r = R$, la retta $y = x\sqrt{3}$ diventa $\theta = \pi/3$, mentre la retta $y = R/\sqrt{2}$ è $r \operatorname{sen}\theta = R/\sqrt{2}$. Quindi D è un insieme normale in coordinate polari:

$$D = \left\{(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta) \ : \ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3}, \ \frac{R}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta} \le r \le R\right\}.$$

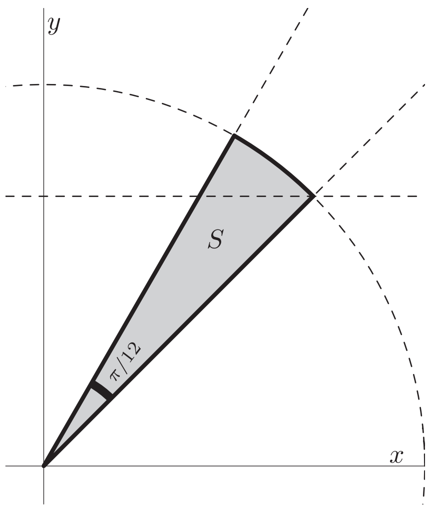


normale rispetto a θ. Usando quindi la formula di integrazione in coordinate polari, si ottiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{area} D &= \iint_D dx\,dy = \iint_{D'} r\, d\theta\, dr = \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_{R/(\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta)}^{R} r\, dr = \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \Big[\frac{r^2}{2}\Big]_{R/(\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta)}^{R} d\theta = \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \Big(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4\operatorname{sen}^2\theta}\Big) d\theta = \frac{R^2}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \Big(1 - \frac{1}{2\operatorname{sen}^2\theta}\Big) d\theta = \frac{R^2}{2}\Big[\theta + \frac{\cos\theta}{2\operatorname{sen}\theta}\Big]_{\pi/4}^{\pi/3} = \\
&= \frac{R^2}{2}\Big(\frac{\pi}{3} + \frac{1/2}{2\sqrt{3}/2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1/\sqrt{2}}{2/\sqrt{2}}\Big) = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3\pi - 6}{12} = \frac{\pi + 2\sqrt{3} - 6}{24} R^2.
\end{aligned}$$

Quarto modo. Possiamo ottenere D togliendo dallo spicchio circolare

$$S = \Big\{ (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \ : \ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3},\ 0 \le r \le R \Big\}$$

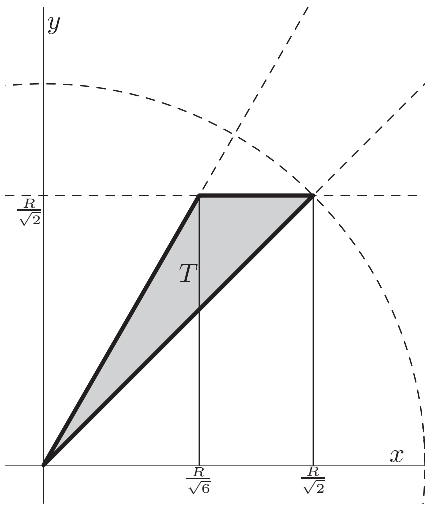


il triangolo T di vertici $(0,0)$, $(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$, $(R/\sqrt{6}, R/\sqrt{2})$. Lo spicchio ha ampiezza $\pi/3 - \pi/4 = \pi/12$, per cui ha area uguale a $1/12$ dell'area del semicerchio:

$$\operatorname{area} S = \frac{1}{12} \cdot \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi R^2}{24}\,.$$

Se del triangolo prendiamo come base il lato orizzontale, di estremi $(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$, $(R/\sqrt{6}, R/\sqrt{2})$, la sua altezza risulta $R/\sqrt{2}$, e quindi l'area è

$$\begin{aligned}
\operatorname{area} T &= \frac{1}{2}\Big(\frac{R}{\sqrt{2}} - \frac{R}{\sqrt{6}}\Big) \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} = \\
&= \frac{R^2}{2\sqrt{2}}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{6}\Big) = \\
&= \frac{R^2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6} = \\
&= \frac{3 - \sqrt{3}}{12} R^2\,.
\end{aligned}$$



Dunque

$$\begin{aligned}
\operatorname{area} D = &\ \operatorname{area} S - \operatorname{area} T = \\
&= \frac{\pi R^2}{24} - \frac{3 - \sqrt{3}}{12} R^2 = \\
&= \frac{\pi + 2\sqrt{3} - 6}{24} R^2\,.
\end{aligned}$$