Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1999/2000

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Prova Scritta del 24 gennaio 2000

Cognome e Nome:

Matricola: — Documento di identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo.

1. Consideriamo la funzione di due variabili reali

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y+2}.$$

a. Determinare il dominio D di f e mostrare che f non ha massimo assoluto nè minimo assoluto su D;

b. trovare il massimo e il minimo assoluti di f ristretta all'insieme

$$D_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \le 1\right\}.$$

2. Risolvere esplicitamente il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\cos^2 t}{y(t)} \\ y(\pi) = \sqrt{\pi}, \end{cases}$$

specificando il massimo intervallo su cui è definita la soluzione.

3. Studiare il ritratto di fase del sistema autonomo

$$\begin{cases} x' = xy \\ y' = -xy^2. \end{cases}$$

4. Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione di 2π attorno all'asse z del dominio del piano xz

$$D = \left\{(x,z) \;\middle|\; z \in [-\pi/2, \pi/2], \quad 0 \le x \le \cos z\right\}.$$

Punti: 4+8, 7, 7, 6.

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Prova Scritta del 24 gennaio 2000

Svolgimento

1. a. Numeratore e denominatore esistono sempre, perché polinomi. Il denominatore si annulla sulla retta $y = -2$. Dunque il dominio è il piano esclusa tale retta:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; y \neq -2\} \, .$$

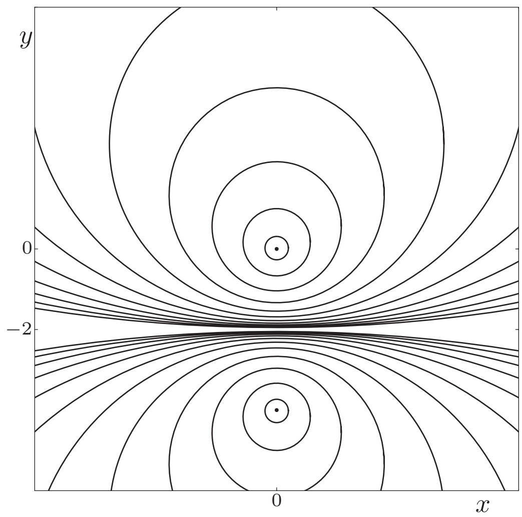
La funzione f non ha massimo assoluto né minimo assoluto su D poiché è illimitata sia superiormente che inferiormente. Infatti, avvicinandoci per esempio al punto $(0, -2)$ lungo l'asse x dai due lati otteniamo limiti infiniti di segno opposto:

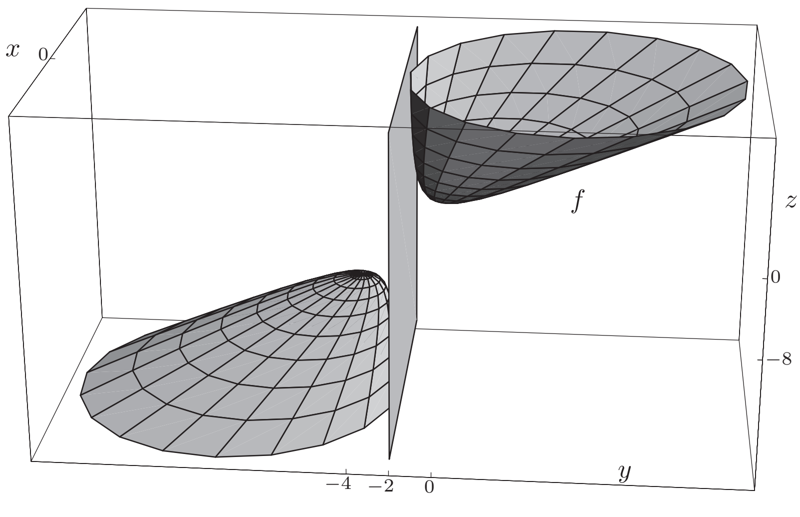
$$\lim_{y\to-2^-} f(0, y) = \lim_{y\to-2^-} \frac{0 + y^2}{y + 2} = -\infty \, , \qquad \lim_{y\to-2^+} f(0, y) = \lim_{y\to-2^+} \frac{0 + y^2}{y + 2} = +\infty \, .$$

Non è richiesto dal testo del problema, ma non è difficile farsi un'idea dell'andamento della f. La curva di livello r è il cerchio di centro $(0, r/2)$ e raggio $\sqrt{2r + r^2/4}$ (quando non è vuota):

$$\begin{aligned} f(x, y) = r &\iff \frac{x^2 + y^2}{2 + y} = r \iff \\ &\iff x^2 + y^2 - ry = 2r \iff \\ &\iff x^2 + \left(y - \frac{r}{2}\right)^2 = 2r + \frac{r^2}{4} \, . \end{aligned}$$

La f assume tutti i valori r per i quali $2r + r^2/4 \geq 0$, cioè $r \leq -8$ e $r \geq 0$. La f è ≥ 0 su tutto il semipiano $y > -2$, mentre il valore 0 viene assunto solo nell'origine, che quindi è un punto di minimo locale. Analogamente $f(x, y) \leq -8$ per $y < -2$, mentre $f(0, -4) = -8$, per cui $(0, -4)$ è un punto di massimo locale.





b. Il cerchio chiuso $D_0 := \{(x,y) \ : \ x^2+y^2 \le 1\}$ è contenuto in D, perché le ordinate dei punti di D_0 sono comprese fra -1 e 1. Essendo la f continua (rapporto di polinomi) dove esiste, ed essendo D_0 chiuso e limitato, il teorema di Weierstraß ci garantisce che f ha massimo e minimo globali su D_0. La f è anche C^∞ su D. Cominciamo col cercare eventuali punti critici di f all'interno di D_0. Le derivate prime di f sono

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{2x}{y+2} \\ f_y = \dfrac{2y(y+2)-x^2-y^2}{(y+2)^2} = \dfrac{y(y+4)-x^2}{(y+2)^2}\,. \end{cases}$$

La f ha esattamente due punti critici: $(0,0)$ e $(0,-4)$, dei quali solo il primo appartiene a D_0. La matrice hessiana di f è

$$D^2 f = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{y+2} & -\dfrac{2x}{(y+2)^2} \\ -\dfrac{2x}{(y+2)^2} & \dfrac{(2y+4)(y+2)-2(y^2+4y-x^2)}{(y+2)^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{y+2} & -\dfrac{2x}{(y+2)^2} \\ -\dfrac{2x}{(y+2)^2} & \dfrac{2(x^2+4)}{(2+y)^3} \end{pmatrix}.$$

Nel punto critico che ci interessa la matrice hessiana diventa

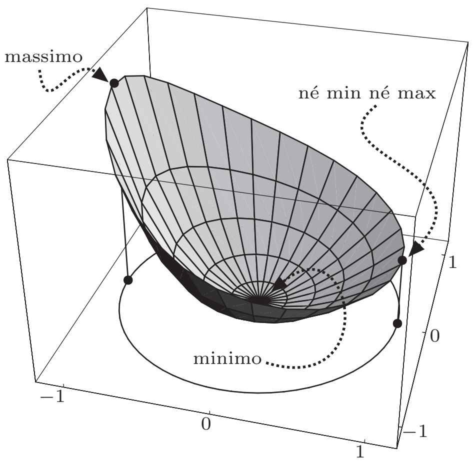
$$D^2 f\,(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

di cui sia il determinante che i termini diagonali sono > 0. Dunque $(0,0)$ è un punto di minimo locale per f, con valore $f(0,0)=0$. Se osservavamo che la $f(x,y)$ è > 0 su tutto il semipiano $y > -2$ esclusa l'origine, potevamo dedurre che $(0,0)$ era minimo locale anche senza calcolare l'hessiana.
Resta da esaminare il comportamento di f sulla frontiera ∂D_0 di D_0. Poiché la frontiera ∂D_0 è data dai punti della circonferenza di centro l'origine e raggio 1, si ha

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y+2} = \frac{1}{y+2} \qquad \forall (x,y) \in \partial D_0\,.$$

Sulla frontiera di D_0 dunque la f dipende solo dalla y, la quale varia fra -1 e 1. Si tratta quindi di studiare la funzione $y \mapsto 1/(y+2)$ fra -1 e 1. La funzione è decrescente per $y > -2$, per cui il minimo è assunto in 1 e il massimo in -1:

$$\max_{\partial D_0} f = \max -1 \le y \le 1 \frac{1}{y+2} = \frac{1}{-1+2} = f(0,-1) = 1\,,$$
$$\min_{\partial D_0} f = \min -1 \le y \le 1 \frac{1}{y+2} = \frac{1}{1+2} = f(0,1) = \frac{1}{3}\,.$$



Un altro modo di arrivare al risultato è di parametrizzare la frontiera in coordinate polari:

$$f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \frac{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{2+\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{2+\operatorname{sen}\theta}\,.$$

Questa funzione di θ è massima quando il $\operatorname{sen}\theta$ è minimo, cioè per $\theta = -\pi/2 + 2k\pi$, ed è minima quando il $\operatorname{sen}\theta$ è massimo, cioè per $\theta = \pi/2 + 2k\pi$. I punti di massimo e minimo globale su D_0 sono da cercare quindi fra i soli tre candidati $(0,0)$, $(0,1)$ e $(0,-1)$. I valori di f sono rispettivamente 0, 1/3 e 1. Deduciamo che il primo dei tre punti è di minimo globale e l'ultimo è di massimo globale su D_0. In quanto a $(0,1)$, questo non solo non è di massimo o minimo globale (ovvio), ma neanche locale: infatti restringendoci alla frontiera ∂D_0 il punto risulta minimo locale, mentre restringendoci al segmento $\{(0,y) \ : \ 0 \le y \le 1\}$ risulta massimo locale.

2. L'equazione differenziale è a variabili separabili; data la condizione iniziale, si considera il membro destro dell'equazione definito sull'insieme $(t,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$. Possiamo applicare la tecnica usuale per la risoluzione delle equazioni a variabili separabili: si porta al primo membro tutto quanto dipende solo da $y(t)$:

$$y(t)y'(t) = \cos^2 t\,,$$

e poi si integra per t da t_0 a t:

$$\int_{t_0}^{t} y(\tau)y'(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} \cos^2\tau\,d\tau\,,$$

cioè

$$\left[\frac{y(\tau)^2}{2}\right]_{\tau=t_0}^{\tau=t} = \left[\frac{\tau + \operatorname{sen}\tau\cos\tau}{2}\right]_{\tau=t_0}^{\tau=t}\,,$$

e ancora

$$\frac{y(t)^2}{2} - \frac{y(t_0)^2}{2} = \frac{t + \operatorname{sen}t\cos t - t_0 - \operatorname{sen}t_0\cos t_0}{2}$$

e

$$y(t)^2 = t - t_0 + \operatorname{sen}t\cos t - \operatorname{sen}t_0\cos t_0 + y(t_0)^2\,.$$

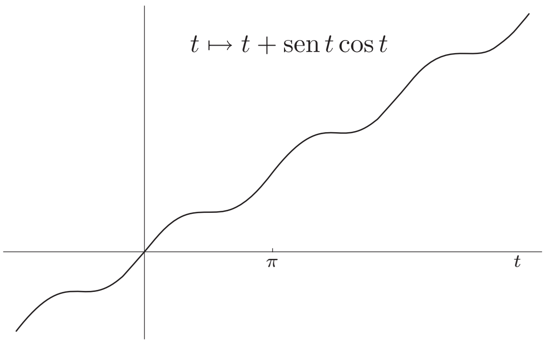
Usando la condizione iniziale $t_0 = \pi$, $y(t_0) = \sqrt{\pi}$ si ottiene

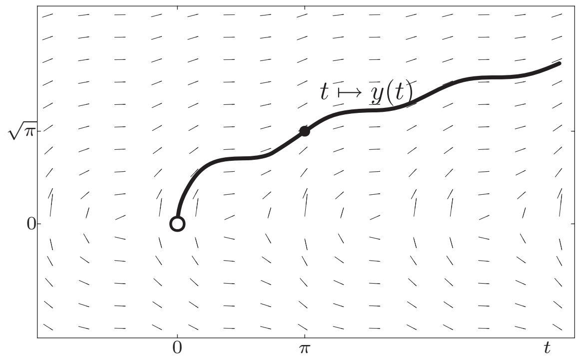
$$y(t)^2 = t + \operatorname{sen}t\cos t\,.$$

Vorremmo estrarre la radice quadrata. La disequazione $t + \operatorname{sen}t\cos t \geq 0$ non è di tipo algebrico, ma per fortuna la funzione $g(t) := t + \operatorname{sen}t\cos t$ ha per derivata $g'(t) = 1 + \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 2\cos^2 t$, che si vede essere sempre ≥ 0. Anzi, poiché $g'(t)$ si annulla solo in punti isolati, la g è strettamente crescente. Poiché $g(0) = 0$, abbiamo che $g(t) > 0$ per $t > 0$, mentre $g(t) < 0$ per $t < 0$. Quindi per $t > 0$ possiamo estrarre la radice quadrata, ricordandoci che a noi interessano valori di $y(t)$ maggiori di zero:

$$y(t) = \sqrt{t + \operatorname{sen}t\cos t} \qquad \text{per } t > 0\,.$$

Per $t \to 0^+$ la soluzione ha tangente verticale.





3. I secondi membri del sistema

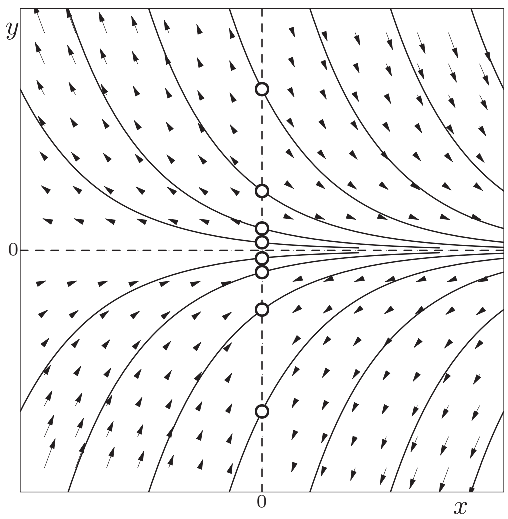
$$\begin{cases} x' = xy \\ y' = -xy^2 \end{cases}$$

sono polinomi, e quindi sono definiti su tutto il piano xy. I punti di equilibrio del sistema sono le soluzioni del sistema algebrico

$$\begin{cases} xy = 0 \\ -xy^2 = 0 \end{cases}$$

cioè tutti e soli i punti degli assi x e y. L'equazione differenziale delle orbite

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-xy^2}{xy} = -y$$



è un'equazione a variabili separabili; integrandola si ottiene

$$\int \frac{dy}{y} = \int -dx \quad \text{da cui} \quad \log|y| = -x + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Un integrale primo del nostro sistema è quindi $x + \log|y|$, oppure, passando all'esponenziale, ye^x. Le orbite del sistema giacciono sulle curve di livello degli integrali primi, cioè sui grafici delle funzioni

$$y = Ce^{-x} \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$

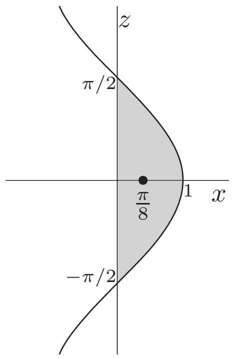
Il verso di percorrenza delle orbite si può infine ricavare dalla prima equazione del sistema, che dà $x' > 0$ in ogni punto del I e III quadrante del piano delle fasi e $x' < 0$ in ogni punto del II e IV quadrante.

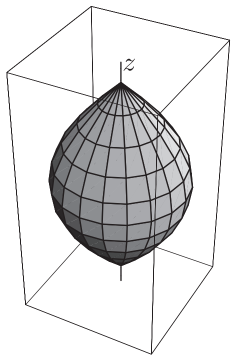
4. Usiamo il teorema di Pappo sul volume dei solidi di rotazione. Calcoliamo prima l'area di D e la distanza del baricentro di D dall'asse di rotazione, cioè la sua ascissa. Il dominio D è normale rispetto alla variabile z; per il teorema di Fubini si ha quindi

$$\operatorname{area} D = \iint_D 1\,dx\,dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dz \int_0^{\cos z} 1\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos z\,dz = \big[\operatorname{sen} z\big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\,.$$

L'ascissa X_G del baricentro è

$$\begin{aligned} X_G &= \frac{1}{\operatorname{area} D} \iint_D x\,dx\,dz = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dz \int_0^{\cos z} x\,dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 z\,dz \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{z + \operatorname{sen} z \cos z}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}\,. \end{aligned}$$





Il volume del solido risulta quindi

$$2\pi \cdot X_G \cdot \operatorname{area} D = 2\pi \cdot \frac{\pi}{8} \cdot 2 = \frac{\pi^2}{2}\,.$$