Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1999/2000

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Compitino del 21 gennaio 2000

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri, appunti o calcolatori.

1. Risolvere esplicitamente il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = \operatorname{sen} 2t \\ y(0) = 1/8 \\ y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

2. Consideriamo il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = y^2 + x^2y^2 \\ y' = y^2\,. \end{cases}$$

a. Studiare il ritratto di fase del sistema: trovare i punti di equilibrio, l'equazione differenziale delle orbite e disegnare le orbite indicandone il verso.

b. Usando il punto **a**, determinare l'insieme delle condizioni iniziali (x_0, y_0) per le quali la soluzione $(x(t), y(t))$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = y^2 + x^2y^2 \\ y' = y^2 \\ x(0) = x_0\,, \quad y(0) = y_0 \end{cases}$$

è limitata su $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$.

3. Determinare che tipo di equilibrio è l'origine per il sistema differenziale:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

4. Studiare l'insieme

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geq x^2 - 9, \quad -8x \leq y \leq -\frac{5x}{2} \right\},$$

verificare che è misurabile secondo Peano-Jordan e calcolarne l'area.

Punti: 10, 9+9, 4, 10.

Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1999/2000

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Compitino del 21 gennaio 2000

Svolgimento

1. Ignoriamo per ora le condizioni iniziali e calcoliamo l'integrale generale dell'equazione lineare a coefficienti costanti

$$y'' - 4y' + 4y = \operatorname{sen} 2t\,.$$

Per far questo restringiamoci ulteriormente all'equazione omogenea associata $y'' - 4y' + 4y = 0$, la quale ha equazione caratteristica

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

che ha 2 soluzioni reali coincidenti $x_1 = x_2 = 2$. L'integrale generale dell'equazione omogenea risulta quindi

$$c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Per trovare una soluzione dell'equazione non omogenea, un metodo è quello della variazione delle costanti, ma in questo caso c'è un modo molto più veloce, in quanto il termine noto $\operatorname{sen} 2t$ rientra nel tipo speciale

$$e^{\alpha t}(p_1(t)\cos\beta t + p_2(t)\operatorname{sen}\beta t)\,,$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ costanti e $p_1(t), p_2(t)$ polinomi. Precisamente possiamo prendere $\alpha = 0$, $\beta = 2$ e $p_1(t) \equiv 0$, $p_2(t) \equiv 1$. Visto che $\alpha \pm i\beta = \pm 2i$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, e che p_1, p_2 sono costanti, possiamo limitarci a cercare la soluzione fra le funzioni della forma

$$\tilde{y}(t) = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\operatorname{sen}\beta t) = A\cos 2t + B\operatorname{sen} 2t$$

con A, B costanti reali da determinare. Imponendo che $\tilde{y}(t)$ sia una soluzione dell'equazione non omogenea si ottiene la relazione

$$8A\operatorname{sen} 2t - 8B\cos 2t = \operatorname{sen} 2t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

che è soddisfatta quando $A = 1/8$ e $B = 0$. L'integrale generale della non omogenea è quindi

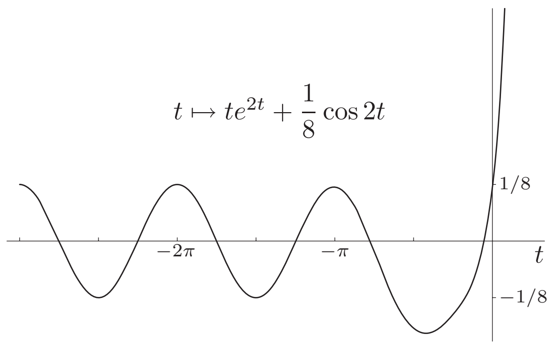
$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{1}{8}\cos 2t \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Imponiamo ora le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \\ y'(0) = 2c_1 + c_2 = 1\,, \end{cases}$$

da cui si ricavano i valori $C_1 = 0$ e $C_2 = 1$. La soluzione del problema di Cauchy è infine

$$y(t) = te^{2t} + \frac{1}{8}\cos 2t\,.$$



2. a. Il sistema considerato è un sistema differenziale autonomo definito per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. I punti di equilibrio del sistema sono le soluzioni del sistema algebrico

$$\begin{cases} y^2 + x^2 y^2 = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases}$$

cioè i punti dell'asse x. L'equazione differenziale delle orbite è

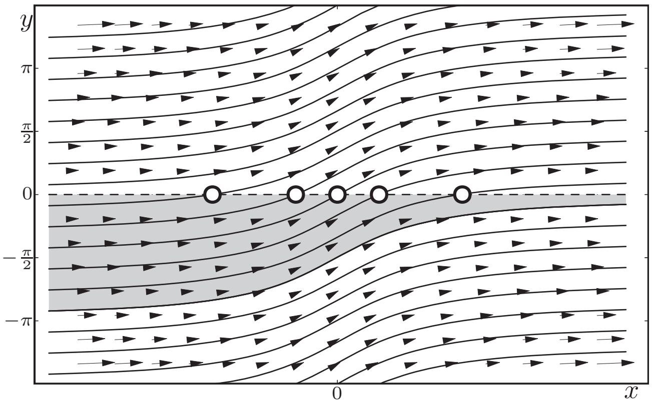
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{y^2 + x^2 y^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

da cui si ricava che la funzione $F(x, y) = y - \arctan x$ è una costante del moto. Le orbite del sistema giacciono quindi sui grafici delle funzioni

$$y = \arctan x + C \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$

Il verso di percorrenza delle orbite si può infine ricavare dalla prima equazione del sistema, che dà la diseguaglianza $x' > 0$ in ogni punto (x, y) del piano delle fasi eccetto l'asse x.

b. Dalla relazione



$$y(t) = \arctan x(t) + C$$

segue che tutte le soluzioni del sistema hanno $y(t)$ limitata. Se una data soluzione è limitata o no dipende quindi da $x(t)$. Guardando il ritratto di fase vediamo che le orbite che passano per punti (x_0, y_0) con $y_0 > 0$ hanno una $x(t)$ che tende a $+\infty$ per $t \to +\infty$, e quindi non sono limitate su $\{t \in \mathbb{R} \,:\, t \geq 0\}$. I punti $(x_0, 0)$ sono equilibri. Alle orbite passanti per punti (x_0, y_0) con $y_0 < 0$ possono succedere due cose: o incontrano l'asse x oppure no. Nel primo caso la soluzione $x(t)$ tende al punto di equilibrio per $x \to +\infty$, e quindi sono limitate per $t \geq 0$; nell'altro caso $x(t) \to +\infty$ per $t \to +\infty$, e non sono limitate. Guardando la figura si vede infine che i punti (x_0, y_0) per i quali $x(t)$ è limitata per $t \geq 0$ sono precisamente quelli per i quali

$$\arctan x_0 - \frac{\pi}{2} < y_0 \leq 0\,.$$

Il testo del problema non lo richiede, ma in realtà il nostro sistema è risolubile esplicitamente! Consideriamo la soluzione $(x(t), y(t))$ tale che $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, con $y_0 \neq 0$. Sapendo che $F(x, y) := y - \arctan x$ è un integrale primo otteniamo che

$$y(t) - \arctan x(t) = y_0 - \arctan x_0\,.$$

Sostituiamo nella equazione differenziale $x'(t) = y(t)^2(1 + x(t)^2)$:

$$x'(t) = \bigl(\arctan x(t) + y_0 - \arctan x_0\bigr)^2 \bigl(1 + x(t)^2\bigr)\,.$$

Questa è un'equazione differenziale a variabili separabili:

$$\frac{x'(t)}{\bigl(\arctan x(t) + y_0 - \arctan x_0\bigr)^2 \bigl(1 + x(t)^2\bigr)} = 1\,,$$

in cui sappiamo calcolare le primitive. Integrando:

$$\int_0^t \frac{x'(\tau)}{\bigl(\arctan x(\tau) + y_0 - \arctan x_0\bigr)^2 \bigl(1 + x(\tau)^2\bigr)}\, d\tau = \int_0^t 1\, d\tau\,,$$

cioè

$$\Bigl[-\frac{1}{\arctan x(\tau) + y_0 - \arctan x_0}\Bigr]_{\tau=0}^{t} = t\,,$$

e poi

$$-\frac{1}{\arctan x(t) + y_0 - \arctan x_0} + \frac{1}{y_0} = t\,,$$

da cui, prendendo i reciproci (quando si può)

$$-\bigl(\arctan x(t) + y_0 - \arctan x_0\bigr) = \frac{y_0}{ty_0 - 1}$$

e ricavando $\arctan x(t)$:

$$\arctan x(t) = \arctan x_0 - y_0 + \frac{y_0}{1 - ty_0}\,,$$

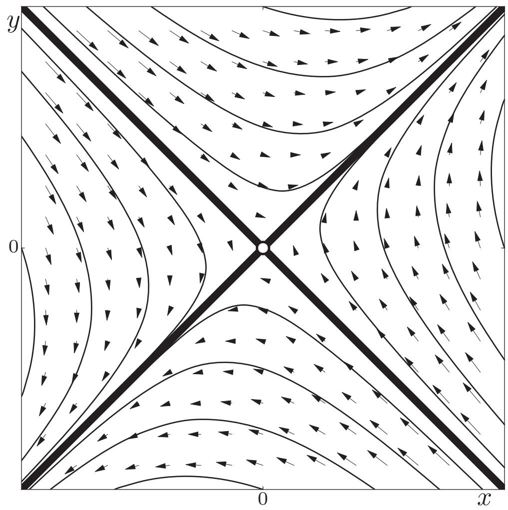
e infine

$$x(t) = \tan\Bigl(\arctan x_0 - y_0 + \frac{y_0}{1 - ty_0}\Bigr)\,, \qquad y(t) = \frac{y_0}{1 - ty_0}\,.$$

Tralasciamo la discussione dell'insieme dei t per i quali la formula ha senso come soluzione del sistema di equazioni differenziali.

3. Si tratta di un sistema differenziale lineare a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico della matrice dei coefficienti è

$$\det\left(\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = (-1-\lambda)(-1-\lambda) - 9 = \lambda^2 + 2\lambda - 8\,.$$



Ci sono due autovalori reali distinti e di segno opposto: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -4$. Quindi il punto $(0,0)$ è un punto di sella. Non è richiesto dal testo del problema, ma non è difficile trovare che l'autospazio relativo a $\lambda_1 = 2$ è la retta bisettrice del primo e terzo quadrante, mentre l'autospazio relativo a $\lambda_2 = -4$ è la bisettrice del secondo e quarto quadrante. Si può ridurre la matrice in forma normale (diagonale, in questo caso) nel modo seguente:

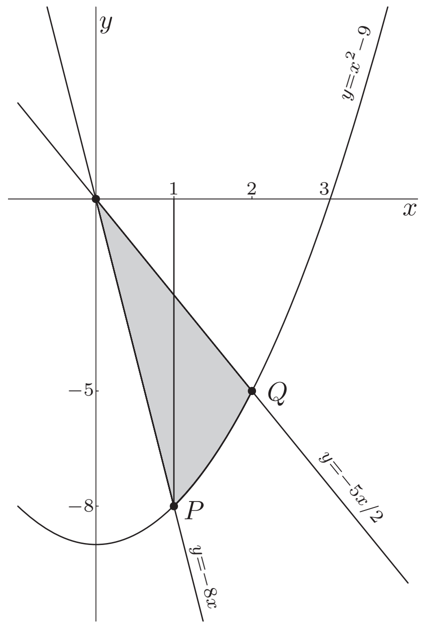
$$\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}.$$

La soluzione esplicita generale del sistema è

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1 e^{2t}\\ c_2 e^{-4t}\end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

4. L'insieme D è dato dai punti del piano che stanno sopra il grafico della parabola $y = x^2 - 9$ e della retta $y = -8x$ e sotto il grafico della retta $y = -5x/2$. L'insieme D è normale rispetto alla variabile x, quindi è misurabile secondo Peano-Jordan. I sistemi

$$\begin{cases} y = x^2 - 9\\ y = -8x\end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} y = x^2 - 9\\ y = -5x/2\end{cases}$$



forniscono rispettivamente le coordinate dei punti di intersezione P e Q. In particolare l'ascissa di P è la soluzione positiva dell'equazione $x^2 - 9 = -8x$, cioè $x_P = 1$ e l'ascissa di Q è la soluzione positiva dell'equazione $x^2 - 9 = -5x/2$, cioè $x_Q = 2$. Applicando il teorema di Fubini (o anche direttamente le nozioni di Analisi I) si ha

$$\begin{aligned}\text{area}\,D &= \iint_D dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{-8x}^{-5x/2} dy + \int_1^2 dx \int_{x^2-9}^{-5x/2} dy = \\ &= \int_0^1 \Big(-\frac{5x}{2} + 8x\Big)dx + \int_1^2 \Big(-\frac{5x}{2} - x^2 + 9\Big)dx = \\ &= \left[\frac{11}{4}x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{5}{4}x^2 - \frac{x^3}{3} + 9x\right]_1^2 = \frac{17}{3}\,.\end{aligned}$$