Università degli Studi di Udine

Anno Accademico 1999/2000

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Compitino del 26 novembre 1999

Cognome e Nome:

Matricola: Documento di identità (se chiesto):

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori.

1. Data la funzione di due variabili reali

$$f(x,y) := \log(3+xy)$$

a. determinare il dominio D di f; dire se D è aperto, se è chiuso, se è limitato e tracciarne un disegno;

b. trovare massimi e minimi relativi e assoluti di f sul disco chiuso di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$.

2. Dire se esiste (motivando la risposta) il limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(xy+1)}{x^2+y^2}\,.$$

3. Risolvere esplicitamente il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{t}{t+1}y = t^2+t \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Punti: 5+14, 8, 10.

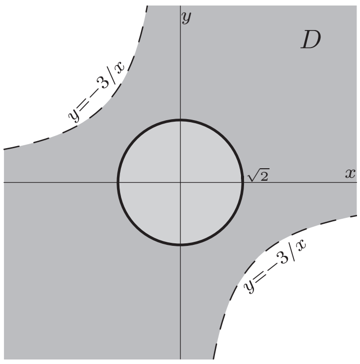
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica II

Compitino del 26 novembre 1999

Svolgimento

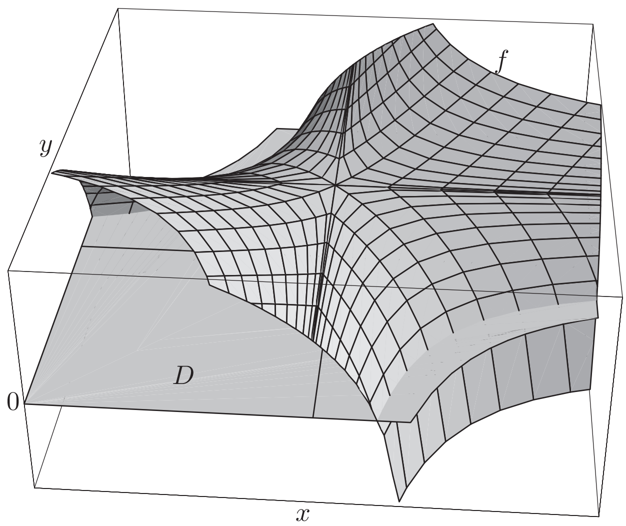
1. a. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3+xy > 0\}$ cioè D è l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ compresi fra i due rami dell'iperbole $y = -3/x$.



L'insieme D è aperto e non è chiuso. Un modo intuitivo di vederlo è di notare che la frontiera di D è formata dai due rami dell'iperbole $y = -3/x$, e che nessun punto della frontiera appartiene a D. Un altro modo per dimostrare che D è aperto: posto $g(x, y) = 3 + xy$, si ha che $(x_0, y_0) \in D$ se e solo se $g(x_0, y_0) > 0$; poiché g è continua, se $g(x_0, y_0) > 0$, esiste un intorno U di (x_0, y_0) tale che, per ogni $(x, y) \in U$, si ha $g(x, y) > 0$; quindi $U \subset D$.

L'insieme D non è limitato. Infatti D contiene per esempio tutto il primo quadrante.

Nella figura qui sotto è disegnato un grafico della funzione f. La griglia è formata da rami di iperbole che sono curve di livello, e da segmenti di retta. I segmenti sono orientati diversamente nei quattro quadranti, e questo potrebbe dare l'impressione che la funzione non sia differenziabile lungo gli assi, quando in realtà lo è. Il dominio D è messo in evidenza come ritaglio del piano orizzontale a quota 0.



b. Il cerchio chiuso $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 2\}$ è contenuto in D. Infatti, ricordandoci la disuguaglianza $|2xy| \le x^2 + y^2$, per ogni punto (x, y) di E si ha $|xy| \le (x^2 + y^2)/2 \le 1$, per cui $3 + xy \ge 3 - |xy| \ge 3 - 2 > 0$ e quindi $(x, y) \in D$.

La funzione f è di classe $\mathcal{C}^\infty(D)$, essendo funzione composta di funzioni $\mathcal{C}^\infty$ su D. Per trovare gli estremi di f in E si cercano, per prima cosa, i punti critici di f all'interno di E. Calcoliamo le derivate prime di f:

$$f_x = \frac{y}{3 + xy}\,, \qquad f_y = \frac{x}{3 + xy}\,.$$

Quindi

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0\,. \end{cases}$$

L'unico punto critico di f in E (anzi, in tutto D) è dunque l'origine. Passiamo alla matrice hessiana:

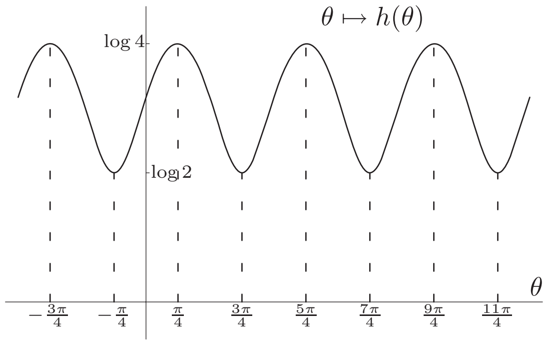
$$D^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{y^2}{(3+xy)^2} & \dfrac{1}{3+xy} - \dfrac{xy}{(3+xy)^2} \\[2ex] \dfrac{1}{3+xy} - \dfrac{xy}{(3+x)^2} & -\dfrac{x^2}{(3+xy)^2} \end{pmatrix}$$

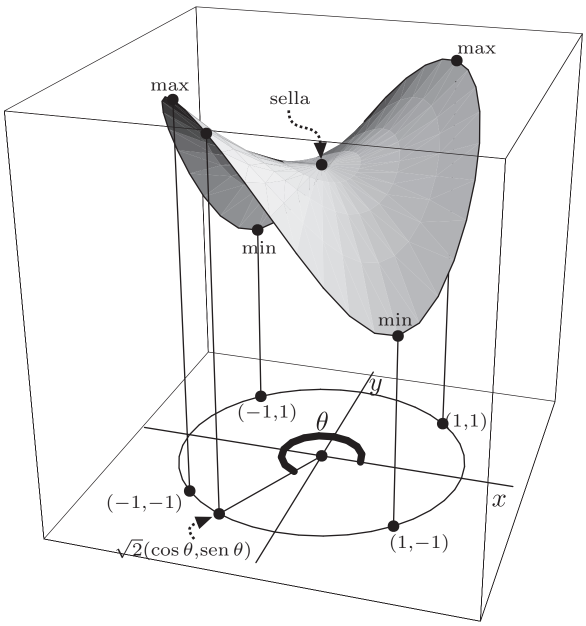
Nel punto critico la matrice hessiana diventa

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $-1/9$. Dunque l'origine è un punto di sella per f, e non è estremante. Resta da esaminare il comportamento di f sulla frontiera ∂E di E. Parametrizziamo ∂E nella forma trigonometrica:

$$\partial E = \Big\{ (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta) \;\Big|\; \theta \in [0, 2\pi] \Big\}.$$





Cerchiamo gli estremi della funzione

$$\begin{aligned} h(\theta) &:= f\big(\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta\big) = \\ &= \log\big(3 + 2(\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)\big) = \\ &= \log(3 + \operatorname{sen} 2\theta)\,. \end{aligned}$$

La funzione h è $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e

$$h'(\theta) = \frac{2\cos 2\theta}{3 + \operatorname{sen} 2\theta}\,.$$

Cerchiamo i punti stazionari di h su $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h'(\theta) = 0 \quad &\iff \quad \cos 2\theta = 0 \\ &\iff \quad 2\theta \in \Big\{ \frac{\pi}{2} + n\pi \;\Big|\; n \in \mathbb{Z} \Big\} \\ &\iff \quad \theta \in \Big\{ \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} \;\Big|\; n \in \mathbb{Z} \Big\}. \end{aligned}$$

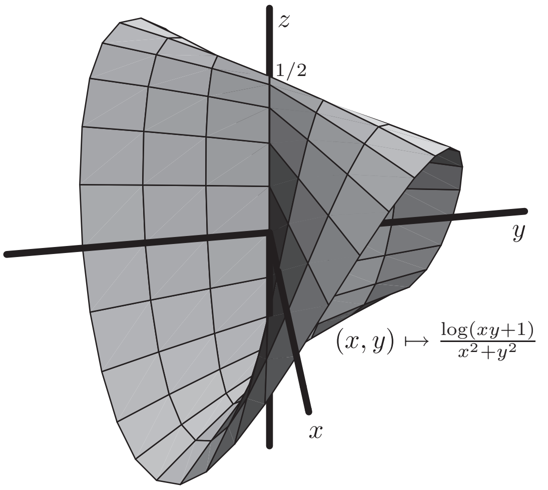
I punti stazionari di h corrispondono alle intersezioni del cerchio con le bisettrici dei quattro quadranti. Poiché f è simmetrica rispetto all'origine (cioè $f(x,y) = f(-x,-y)$), basta considerare solo le intersezioni con le bisettrici del primo e del secondo quadrante, cioè $\theta = \pi/4$ e $\theta = 3\pi/4$. Questi due punti devono essere uno un punto di massimo assoluto e l'altro un punto di minimo assoluto per f in E. Infatti f è continua ed E è chiuso e limitato e quindi, per il teorema di Weierstrass, ha almeno un punto di massimo assoluto e un punto di minimo assoluto in E. Calcoliamo f in tali punti:

$$\begin{aligned} f\big(\sqrt{2}, \sqrt{2}\big) = h\Big(\frac{\pi}{4}\Big) &= \log\Big(3 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \log 4\,, \\ f\big(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\big) = h\Big(\frac{3\pi}{4}\Big) &= \log\Big(3 - 2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \log 2\,. \end{aligned}$$

Poiché il primo valore è maggiore del secondo, concludiamo che il primo è il massimo assoluto e l'altro è il minimo assoluto, e vengono assunti rispettivamente in $\pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e in $\pm(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Su E non ci sono altri estremi relativi.

2. Poniamo

$$f(x,y) = \frac{\log(xy+1)}{x^2+y^2}.$$



Restringiamo f alla retta $y = 0$, e calcoliamo il limite della restrizione:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\big|_{y=0} = \lim_{x\to 0} f(x,0) = $$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\log(x\cdot 0+1)}{x^2+0} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\log 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0\,.$$

Se invece restringiamo la f alla retta $y = x$, otteniamo

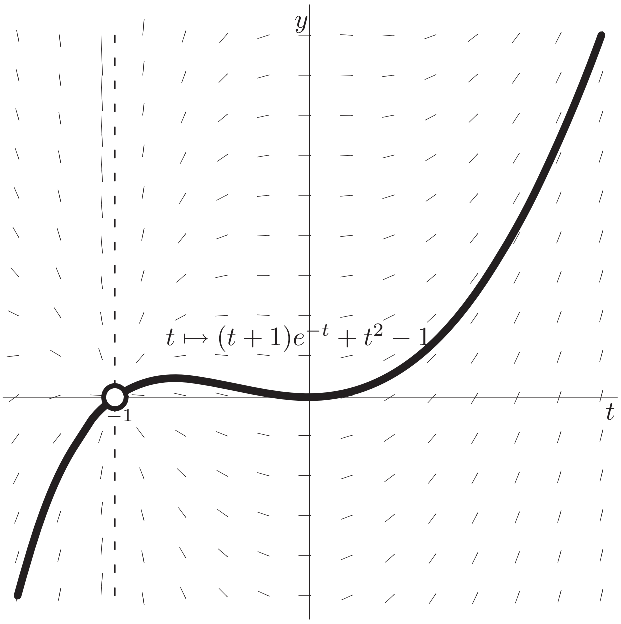
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\big|_{y=x} = \lim_{x\to 0} f(x,x) =$$
$$= \frac{\log(x^2+1)}{2x^2} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{4x} = \frac{1}{2}\,.$$

I limiti delle due restrizioni sono diversi. Dobbiamo concludere che il limite non ristretto non esiste. Più in generale, se restringiamo alla retta $y = mx$ abbiamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\big|_{y=mx} = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \frac{\log(mx^2+1)}{(1+m^2)x^2} \overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2mx}{mx^2+1}}{2(1+m^2)x} = \frac{m}{1+m^2}\,.$$

3. È un problema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale lineare. Il membro destro dell'equazione non è definito per $t = -1$; data la condizione iniziale si considera l'equazione definita sull'intervallo $(-1, +\infty)$. Il fattore integrante è

$$\mu(t) = \exp\int_0^t \frac{\tau}{\tau+1}\,d\tau = \exp\int_0^t \Big(1 - \frac{1}{\tau+1}\Big)d\tau = \exp\big[\tau - \log(\tau+1)\big]_0^t = e^{t-\log(t+1)} =$$
$$= \frac{e^t}{t+1} \qquad \text{per } t > -1\,.$$



Moltiplicando l'equazione per il fattore integrante otteniamo

$$\frac{e^t}{t+1}y' + \frac{te^t}{(t+1)^2}y = te^t$$

cioè

$$\Big(\frac{e^t}{t+1}y\Big)' = te^t\,.$$

Integrando ambo i membri fra 0 e t e imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$, si ottiene

$$\frac{e^t}{t+1}y(t) = \Big[\frac{e^\tau}{\tau+1}y(\tau)\Big]_{\tau=0}^t = \int_0^t \Big(\frac{e^t}{t+1}y\Big)'dt =$$
$$= \int_0^t \tau e^\tau\,d\tau = \big[(\tau-1)e^\tau\big]_{\tau=0}^t = (t-1)e^t + 1\,.$$

Da questa relazione si ricava infine la fomula per la soluzione:

$$y(t) = (t+1)e^{-t} + t^2 - 1\,.$$

La formula è definita per tutti i $t \in \mathbb{R}$, anche se a rigor di termini è soluzione solo per $t > -1$. La figura qui sopra mostra un grafico della soluzione e il campo di direzioni associato all'equazione differenziale.