Esercizi sulla forumla di Taylor

Esercizio 1. Svolgendo i calcoli, determina il polinomio di Taylor delle seguenti funzioni fino all'ordine n indicato e centrato nel punto x_0 indicato:

(a) $\sin(x)$, $n = 5$, $x_0 = \pi$;
(b) $x - \cos(x^2)$, $n = 4$, $x_0 = \sqrt{\pi/2}$;
(c) e^{2x-1}, $n = 3$, $x_0 = 1$;
(d) $\cos(\sqrt{x})$, $n = 3$, $x_0 = \pi^2$;
(e) $\sqrt{\cos(x)}$, $n = 6$, $x_0 = 0$.

Ricorda gli sviluppi di Maclaurin (cioè di Taylor centrati in $x_0 = 0$) visti a lezione:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n),\\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),\\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),\\
\tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5),\\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}),\\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + o(x^n),\\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n),\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)\\
&= 1 + \alpha x + \alpha\cdot\frac{\alpha-1}{2}x^2 + \alpha\cdot\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{\alpha-2}{3}x^3 + \dots + \alpha\cdot\frac{\alpha-1}{2}\cdots\frac{\alpha-n+1}{n}x^n + o(x^n),
\end{aligned}$$

Esercizio 2. Usando gli sviluppi di Maclaurin visti a lezione, determina il polinomio di Maclaurin delle seguenti funzioni fino all'ordine n indicato:

(a) $\log(x^2 + x + 1)$, $n = 2$;
(b) e^{x^2+x}, $n = 3$;
(c) $\log(1 + \sin(x))$, $n = 4$;
(d) $\cos(\sin(x)) - \log(1 + 2x)$, $n = 2$;
(e) $(\sin(x))^2$, $n = 6$;
(f) $(\sin(x))^3$, $n = 8$;
(g) $(\sin(x))^4$, $n = 8$;
(h) $(\log(1 + x^2))^2$, $n = 8$;
(i) $e^x \sin(x)\cos(x)$, $n = 4$;
(j) $(\cos(x))^x$, $n = 5$ (usa il trucchetto di esponenziale e logaritmo);
(k) $(e^x + \cos(x)^2$, $n = 3$;
(l) $e^{\sin(x)}$, $n = 3$;

(m) $\cos((\sin(x))^2)$, $n = 6$;

(n) $\sqrt{1+\sin(x)}$, $n = 3$ (ricorda che $\sqrt{1+y} = (1+y)^{1/2}$).

Esercizio 3. Usando gli sviluppi di Maclaurin visti a lezione, calcola i seguenti limiti (eventualmente con un opportuno cambio di variabile):

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - xe^x + x^2\cos(x)}{x^3}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3}\log(1+x^2) - \sin(\sqrt{3}x^2)}{x^2(\tan(x))^2}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) - 1 - (\cos(x))^2}{e^{2x-\pi} - 1 + \pi - 2x}$ (dopo il cambio di variabile, ricorda le simmetrie di sin e cos);

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x+3) - \log(x) - 3\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1}$;

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{\log(x^2)}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\arctan(x-1)}\right)$.