

## ESERCIZI SUI NUMERI COMPLESSI

- (1) Trovare la parte reale e la parte immaginaria dei seguenti numeri complessi, determinandone anche la posizione come punto sul piano di Argand–Gauss.

$$z = 3, \quad z = -3, \quad z = i - \sqrt{3}, \quad z = -i\pi/2.$$

- (2) Svolgere le operazioni sottoindicate trovando la parte reale e la parte immaginaria del risultato ottenuto:

$$(1 - 2i) + (\sqrt{2} - i); \quad (1 - 2i) + (\sqrt{2} - i); \quad (1 + 2i) \cdot (1 - 2i); \quad (1 - 2i)^3$$

$$(1 + i)^3; \quad \frac{3 - 2i}{-1 + i}; \quad 3 \left( \frac{1 + i}{1 - i} \right)^2 - 2 \left( \frac{1 - i}{1 + i} \right)^3.$$

- (3) Determinare le seguenti potenze dell'unità immaginaria (trovandone la parte reale e la parte immaginaria):

$$i^{12}, \quad i^{17}, \quad i^{-15}$$

- (4) Dati due numeri complessi  $z, z'$  dimostrare che  $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ ,  $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$  (in particolare, vale  $(\bar{z})^n = \overline{z^n}$ ).

Quali sono i numeri complessi tali che  $z = \bar{z}$ ?

- (5) Determinare la parte reale e la parte immaginaria del coniugato del numero  $(1 - i)^3$ .

- (6) Verificare che il numero complesso  $z = -1 + 2i$  soddisfa l'equazione  $z^3 + z^2 + 3z - 5 = 0$ . Il suo coniugato  $\bar{z}$  soddisfa la stessa equazione?

- (7) Sia  $z = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ . Calcolare la forma trigonometrica di  $z$  e di  $z^3$ . Risolvere lo stesso esercizio per i numeri:  $1/2 - i\sqrt{3}/2$ ,  $\sqrt{3}/2 + i/2$  e  $3/\sqrt{2} - i3/\sqrt{2}$ .

- (8) Determinare la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso  $z$  che ha modulo 2 e argomento  $\frac{5\pi}{6}$ . Svolgere lo stesso esercizio se il modulo è  $\sqrt{2}$  e l'argomento è  $75^\circ$ .

- (9) Trovare la parte reale, la parte immaginaria, il modulo e l'argomento principale dei seguenti numeri complessi:

$$z = 3, \quad z = -3, \quad z = i - \sqrt{3}, \quad z = -i\pi/2.$$

- (10) Sia  $z$  il numero complesso  $1 + i$ . Il numero complesso  $z^3$  è:

il doppio di  $i - 1$ ;

$$2\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4}));$$

$$2(\cos(90^\circ) + i \sin(90^\circ))$$

V	F
V	F
V	F

- (11) Sia  $z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$  un numero complesso non nullo, scritto in forma trigonometrica. Trovare la forma trigonometrica del coniugato di  $z$  e quella dell'inverso di  $z$ .
- (12) Trovare un numero complesso  $z_0$  tale che per qualsiasi numero complesso  $z$  il numero  $z_0 z$  sia ottenuto ruotando il vettore  $z$  intorno all'origine in senso antiorario di 45 gradi.  
Svolgere lo stesso esercizio per la rotazione oraria di  $\frac{\pi}{2}$  radianti.
- (13) Siano  $z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$  e  $z' = \rho'(\cos(\theta') + i \sin(\theta'))$  due numeri complessi in forma trigonometrica. L'argomento di

$$\frac{z^2}{2z'}$$

è:

$$\begin{aligned} 2\theta - \theta'; \\ \frac{\theta^2}{2\theta'}; \\ \theta - \theta' \end{aligned}$$

<b>V</b>	<b>F</b>
<b>V</b>	<b>F</b>
<b>V</b>	<b>F</b>

- (14) Sia  $z = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ . Determinare il numero  $z^{39} - z^{36}$ .
- (15) Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni, verificando la correttezza del risultato.

$$z^4 = -1, \quad z^3 = 1+i, \quad z^3 = -1+i, \quad z^7 = 1, \quad z^5 = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$$

- (16) Sia  $z = 2/\sqrt{2} - i2/\sqrt{2}$ . Calcolare la forma trigonometrica di  $z$ , di  $z^{10}$  e di  $z^{-2}$ .

- (17) Risolvere i seguenti sistemi di equazioni:

$$\begin{cases} z\bar{w} = i \\ |z|^2 w + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z + w = 1 - i \\ |w|^2 + \bar{z} = 1 - i \end{cases} \quad \begin{cases} z^2 - \bar{z}^2 = 4i \\ (1+i)z = (1-i)\bar{z} \end{cases}$$

- (18) Risolvere l'equazione  $z^4 = 2z$ .