ANALISI MATEMATICA

GIANLUCA GORNI

ESAME

1° modo 2 compitini parziali + eventuale orale

2° modo 1 scritto + 1 orale "globale"

1° modo 1 compitino → febbraio } 3 ore ciascuno
1 compitino → giugno

soglia di accettabilità: 12 punti

chi prende meno di 12 in uno dei due compitini passa alla modalità 2

Chi ha passato entrambi i compitini con almeno 12: si calcola la media dei punti. Se la media ~~⟹~~ arrotondata per eccesso è ≥ 18 lo studente può accettare la media (troncata a 30) come voto finale e non fare l'orale. (in questo caso niente lode).
L'orale è facoltativo e può migliorare il punteggio

Chi prende < 18 come media deve fare l'orale

2° modo 1 scritto + orale

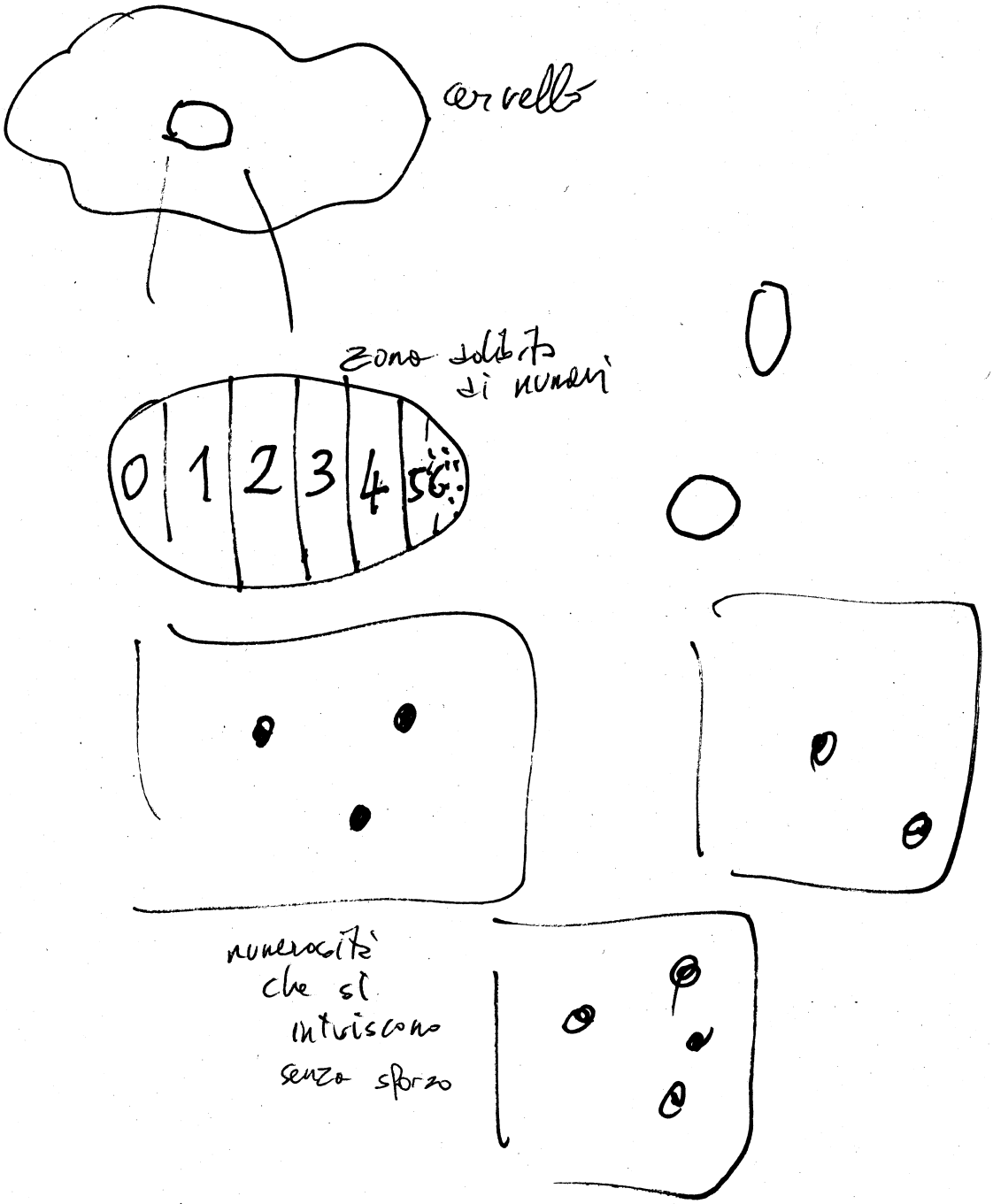
3 ore

l'orale può essere fatto in un qualsiasi appello successivo

soglia di 12

esse 3

NUMERI


cervello
zona addetta ai numeri
0 1 2 3 4 5 6
numerosità che si intuiscono senza sforzo

NUMERI "NATURALI"

INTERI POSITIVI o NULLI

0 1 2 3 4 5 6 7

controverso

8 9 10 ...

eccetera

(sono infiniti)

1234

i

$x \geq 0$

x strettamente positiv.

NUMERI FRAZIONARI "RAZIONALI"

RATIO

numeratore / denom.

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{7}$ ...

$-\frac{2}{4}$ ... $\frac{1}{1}$ ...

NUMERI

numeri naturali, interi dallo zero in poi

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

l'insieme dei numeri naturali si indica in matematica $\mathbb{N}$.

numeri interi relativi

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

indicato con $\mathbb{Z}$ Zahl

numeri razionali relativi

$$\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{2}{7}; -\frac{5}{11}; \ldots; \frac{1}{1}; \frac{-3}{1}$$

$$\frac{4}{2} = 2$$

forma $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$

"razionali" dal fatto RATIO rapporto

simbolo per l'insieme è $\mathbb{Q}$ quoziente

=

$\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}333\ldots\ldots$ infinite cifre

10

10

10

$\ddots$

numeri decimali infiniti

Se si parte da un numero razionale

$\frac{p}{q} = \pm$

la rappresentazione decimale è periodica

---

ci sono numeri la cui rappresentazione non è periodica?

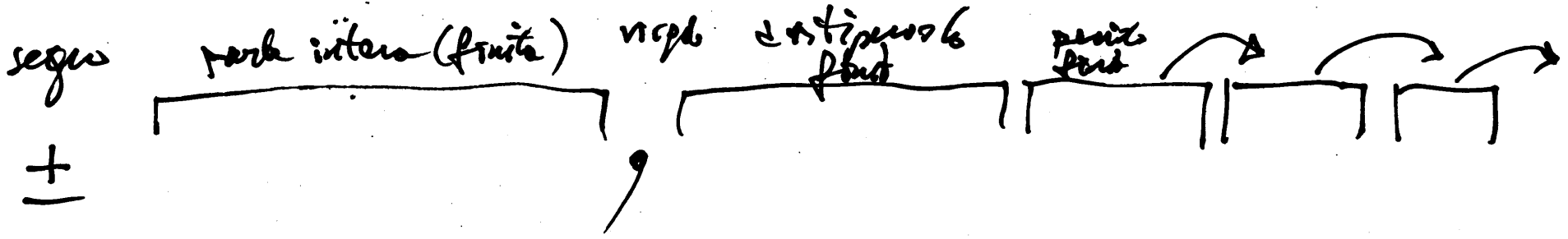
Sì, il più antico esempio noto è

$\sqrt{2}$ (pitagora)

Esempio di tipo diverso, che parte da un numero decimale

$+0{,}101001000100001000001\ldots$

questo numero non è periodico



7 ott 2020 P3

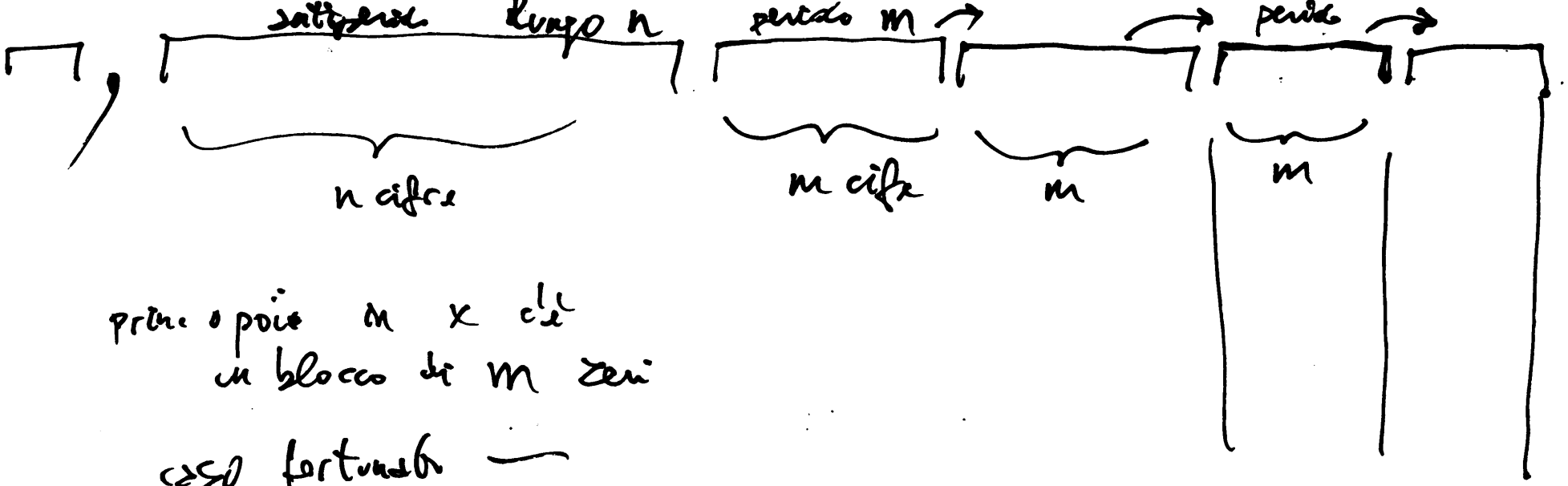
Teorema: il numero $x = 0,101001000100001\ldots$ non è periodico.

Dimostrazione formale metodo **per assurdo**.

Supponiamo che il numero sia periodico, e concludiamo da questo di dedurre cose assurde.

Supponiamo che x rientri nello schema

7 ott 2020 P4



prima o poi $m \times$ cifre
un blocco di m zeri

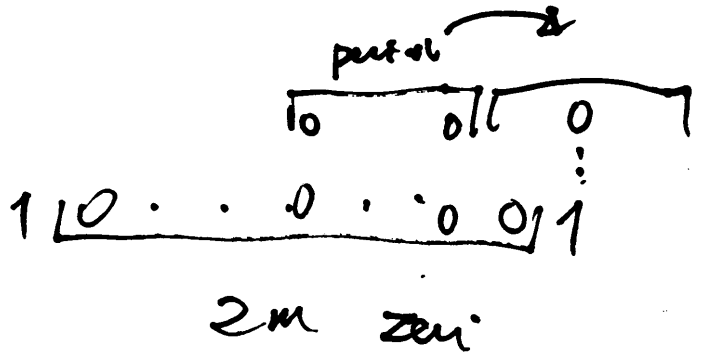
caso fortunato —

non può succedere

divisione 1

prima o poi c'è un blocco di $2m$ zeri

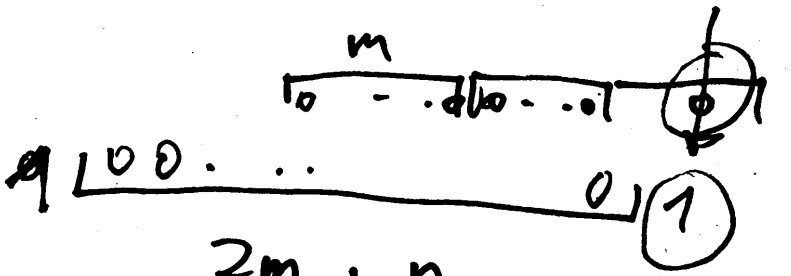
per ogni supponi che ciò
dopo l'antipenultimo



impossibile

7 ott 2020 PS

7 Ott 2020 p.6



$2m+n$ zeri

↕

cella dopo l'ultimo contiene tutti gli altri blocchi di zeri

assurdo

non può esserci contemporaneamente 0 e 1.

1,41871010010001...

esistono infiniti numeri decimali non periodici

e sono facili da costruire

1,4187...

0,401008000

Ecco due numeri decimali distinti, cioè infiniti numeri periodici e infiniti non periodici.

0,1

0,10001

I numeri periodici e quelli non periodici

Ecco DENSI.

antiperiodo periodo

0,145555...

7 ott 2020 p 8

NUMERI REALI

Agli scopi del nostro corso possiamo pensare ai numeri reali come ~~agli~~ ai numeri decimali con infinite cifre, periodici o no

segno | parte intera finita | parte decimale infinita

$\pm$, (quasi) liberi tutti

incovenienti

vietato il 9 periodo

$$1,000000\ldots$$
$$0,999999\ldots \quad \Big\} = 1$$

due rappresentazioni diverse dello stesso numero

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = 0,50000\ldots$$

$$= 0,49999\ldots$$

si potrebbe pensare di vietare una delle 2 possibili rappresentazioni, per esempio quella che termina con infiniti 9

Abbiamo visto dei numeri reali:

$\sqrt{2}$ $\qquad$ $0,1010010001\ldots$

hanno delle regole, o algoritmi, che generano le cifre decimali una dopo l'altra

$$\frac{1}{3} = 1:3 = 0,33\ldots$$
$$10$$
$$10$$
$$\ddots$$

la regola della divisione genera le cif dei numeri razionali

$$\sqrt{2} = 1,41\ldots$$

$$\pi = 3,14\ldots$$

numero reale $\longrightarrow$ algoritmo che genera le sue cifre

L'algoritmo richiede un <u>finito</u> di caratteri alfanumerici per scriverlo

7 ott 2020 p10

Così sorprendente: esistono numeri decimali infiniti che non sono generabili da alcun algoritmo.

Dimostrazione per assurdo:

Supponiamo che tutti i numeri reali siano generabili da algoritmi.

Prendiamo gli algoritmi associati a tutti i numeri reali. Ci sono infiniti algoritmi, però ogni singolo algoritmo è composto da un numero finito di caratteri.

L'insieme degli algoritmi si può ordinare in modo lessicografico: (alfabetico)

a b |
a b | c

Posso ordinarli per quantità di caratteri

0 caratteri 0

1 carattere stesso ragionamento di prima quanti sono i caratteri dell'alfabeto.

2 caratteri quanti algoritmi? non finito
3 ... non RE
4 ... non RL

vedi figura

algoritmi con n caratteri da generare un numero reale

ce ne sono un numero finito

Questi si possono mettere in ordine lessicografico

Posso in linea di principio passo generare una lista (infinita) di tutti i programmi che generano numeri reali

1° prog.
2° prog
3° prog
4° pr.
.
.
.

ogni programma che genera un numero reale rientra da qualche parte nella lista

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
prog. 1	0,	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0
prog 2	,	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1
prog 3	...,	3	1	**8**	7	5	0	0	0	0
prog 4	,	1	7	0	**3**	1	0	5	7	2
prog 5	,	0	1	0	0	**1**	0	0	0	1

K) RAGIONAMENTO DIAGONALE

- K. ∞

prog n. ∞+1

cifre sulla diagonale

cambio sistematicamente tutte le cifre dopo la virgola magari ripetendo il 9

0, 0 1 8 3 1 ...

0, 1 2 0 0 2 | 7

Piccolo problema

ebbene questo nuovo numero non è nella lista

non è generato da nessuno degli algoritmi

questo numero non è nella list

non è il primo
non è il secondo
non è il terzo
non è l'ennesimo perché l'n-esimo cifra è diversa

ASSURDO

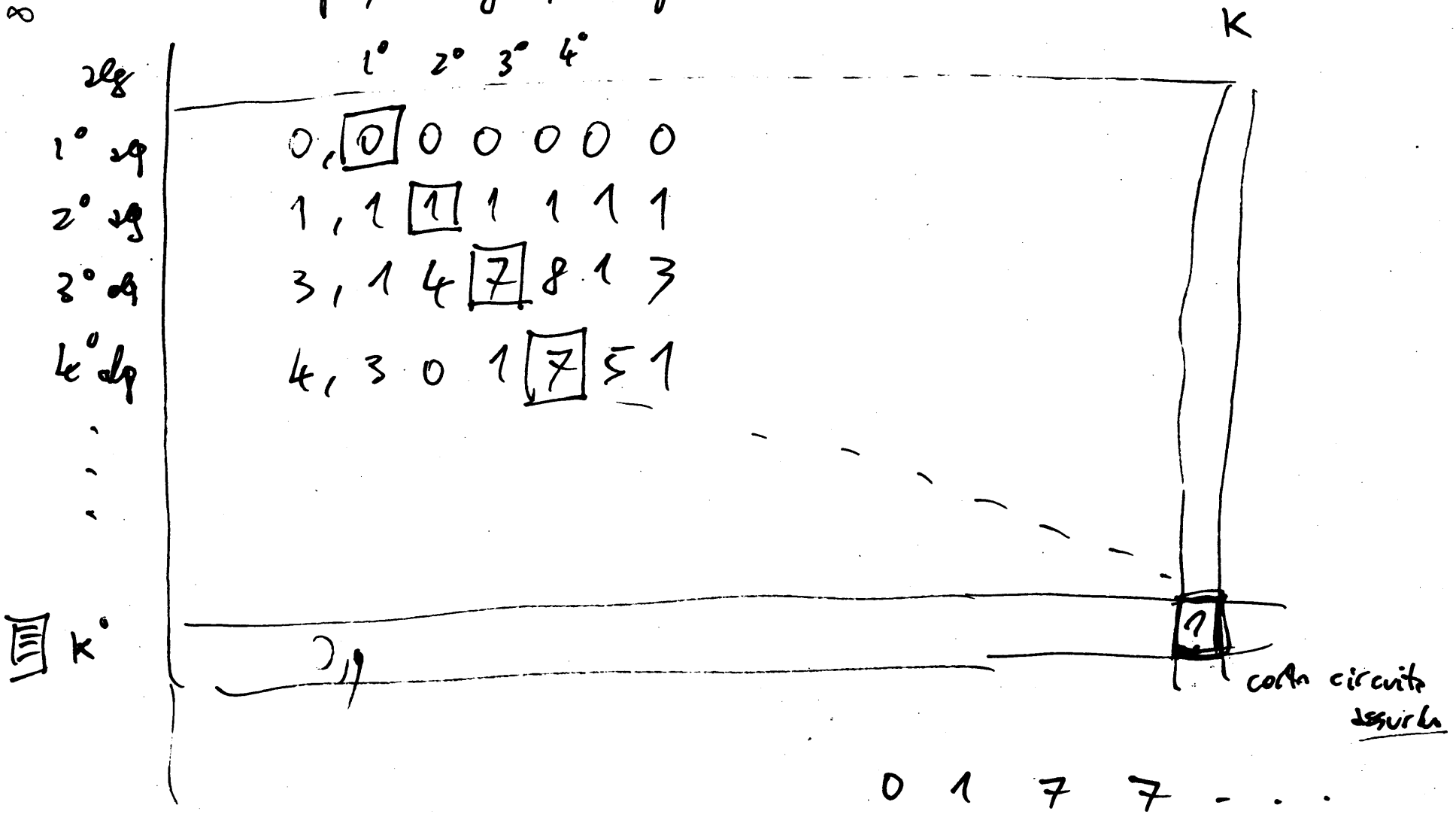
perché avevo supposto che tutti i numeri reali fossero generabili da un algoritmo.

8 ott 2020 p. 1

Teorema Esistono numeri decimali reali non generabili da algoritmi

Dim Gli algoritmi che generano numeri decimali si possono numerare:

1° alg, 2° alg, 3° alg ...



0 1 7 7 ...

le cambio tutte

$x = 0,1\,0\,0\,0$ non sta nella tabella

I numeri generati da un algoritmo si possono "zippare"

$0,3333\ldots$ è zippabile con l'algoritmo

$0,10100\,10001\ldots$

$\sqrt{2} = 1,41\ldots$ è zippabile

tutti i numeri decimali fra 0 e 1

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N}$ naturali $0, 1, 2, 3, \ldots$

$\mathbb{Z}$ interi relativi $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

$\mathbb{Q}$ razionali $\frac{p}{q}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}$ $-\frac{7}{8}$ $\frac{2}{2}$

$\mathbb{R}$ reali un modo di pensarli è con le approssimazioni decimali infinite

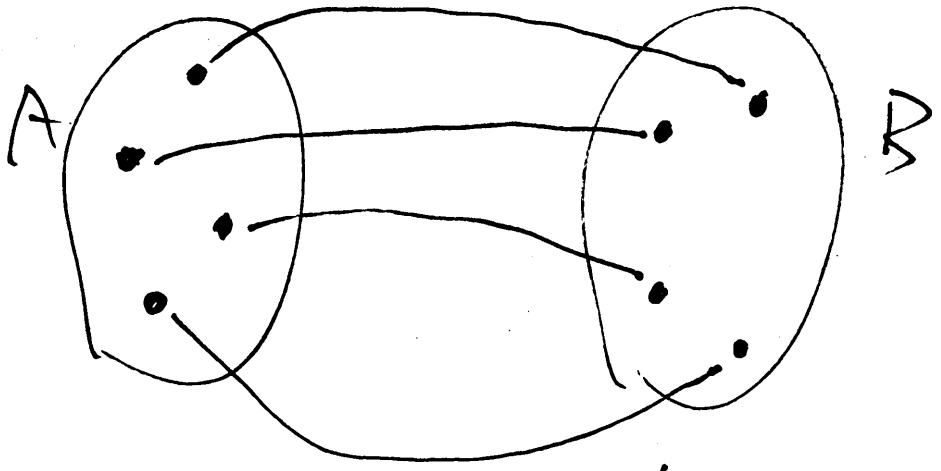
$+3,14\ldots$

($\mathbb{C}$ complessi)

8 ott 2020 ore 3

insiemi equipotenti

Def due insiemi si dicono **equipotenti** (o con la stessa numerosità, o con la stessa cardinalità) se è possibile metterli in corrispondenza biunivoca.



corrispondenza biunivoca

Quando si passa a insiemi **infiniti** il concetto di equipotenza dà risultati un po' strani

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5 ...
$\mathbb{N}\setminus\{0\}$		1	2	3	4	5 ...

$\mathbb{N}$ contiene propriamente $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ $\quad \mathbb{N} \supsetneq \mathbb{N}\setminus\{0\}$

in questo senso mi viene da dire che

$\mathbb{N}$ è più grande di $\mathbb{N}\setminus\{0\}$

$\mathbb{N}$ 0 1 2 3 4 5 n

$\mathbb{N}\setminus\{0\}$ 1 2 3 4 5 n+1

è una corrispondenza biunivoca?

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	n
	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbb{N}\setminus\{0\}$	1	2	3	4	5	6	n+1

Conclusione: $\mathbb{N}$ è equipotente a $\mathbb{N}\setminus\{0\}$

Albergo di Hilbert

1 2 3 4 5 ...

arrivano i negativi

0, -1, -2, -3, -4 ...

spostarsi nella stanza con numero doppio

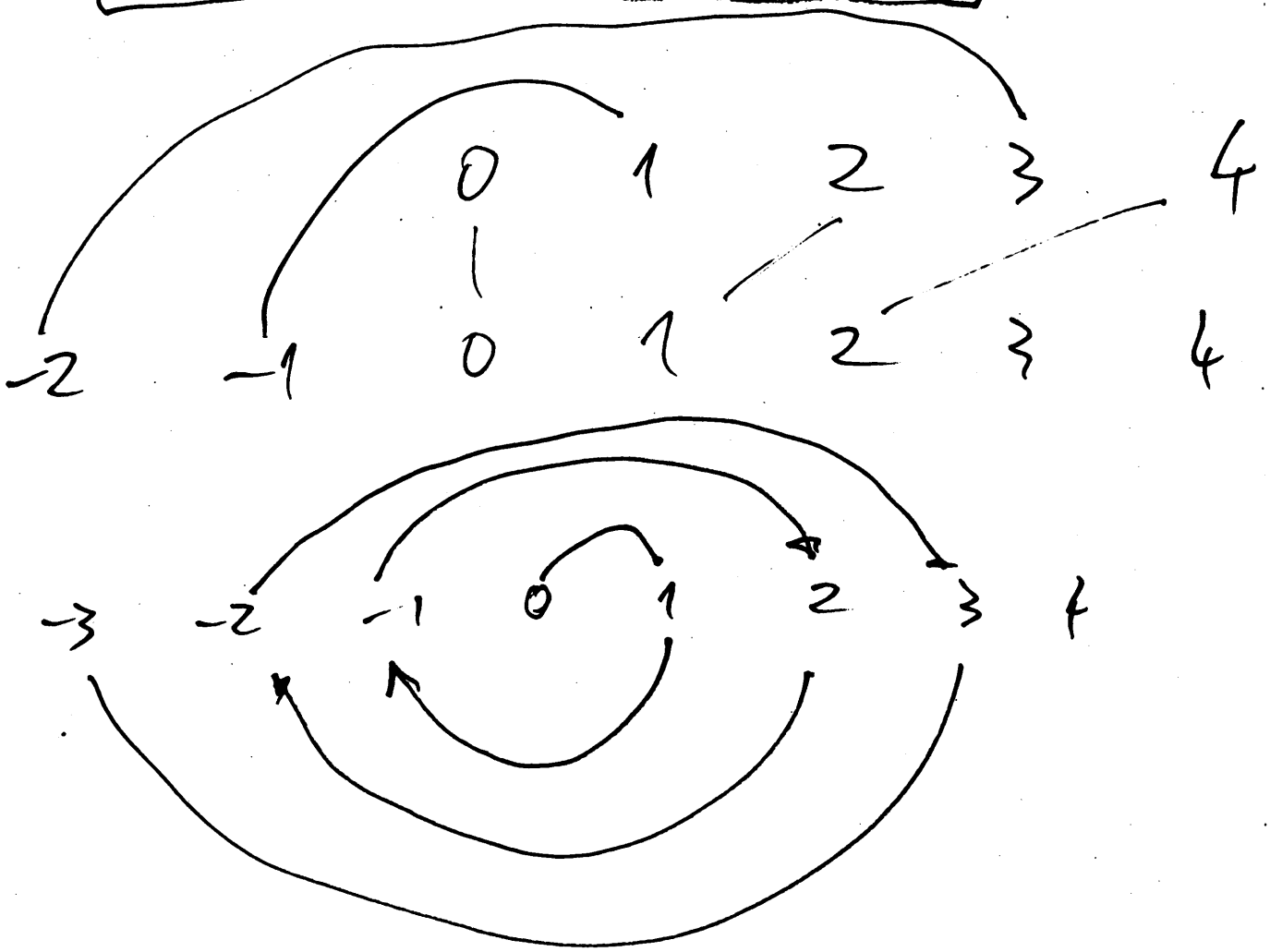
1 2 3 4

1 2 3 4 6 8

se liberano tutte le stanze pari

8 ott 2020 p.5

$\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono equipotenti



$\mathbb{Z}$ contiene infiniti elementi che non appartengono a $\mathbb{N}$

$$\mathbb{Z} \supsetneq \mathbb{N}$$

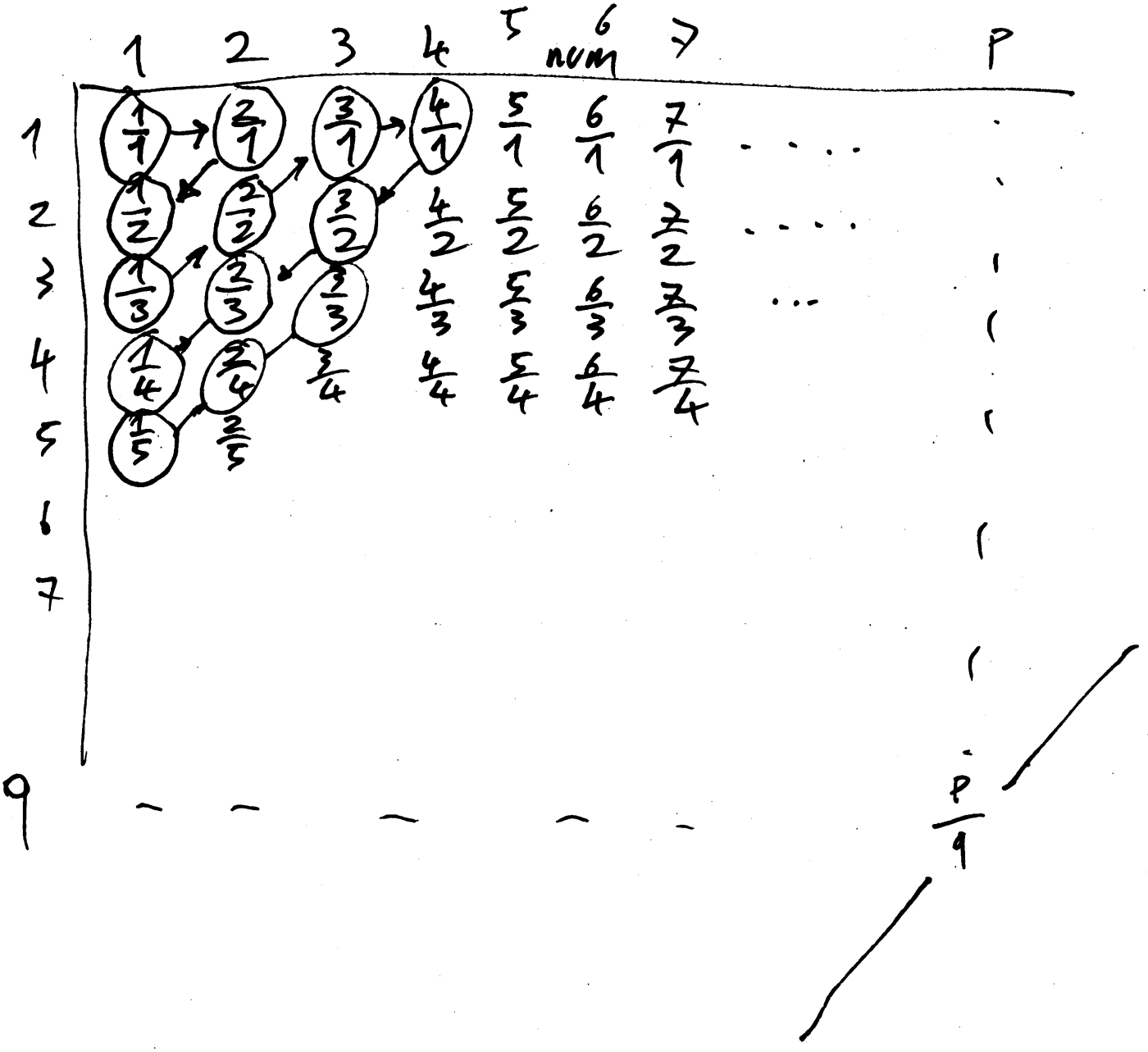
8 ott. 2020 p. 6

Fatto sorprendente $\mathbb{Q}$ è equipotente a $\mathbb{N}$

$\mathbb{Q}$ è formato dalle frazioni $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$

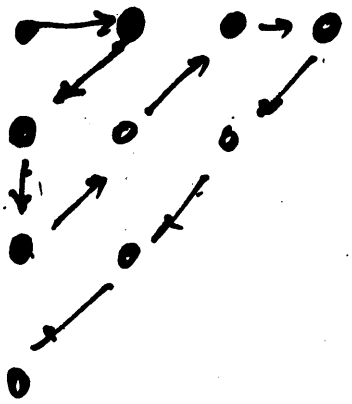
per semplicità $p, q > 0$

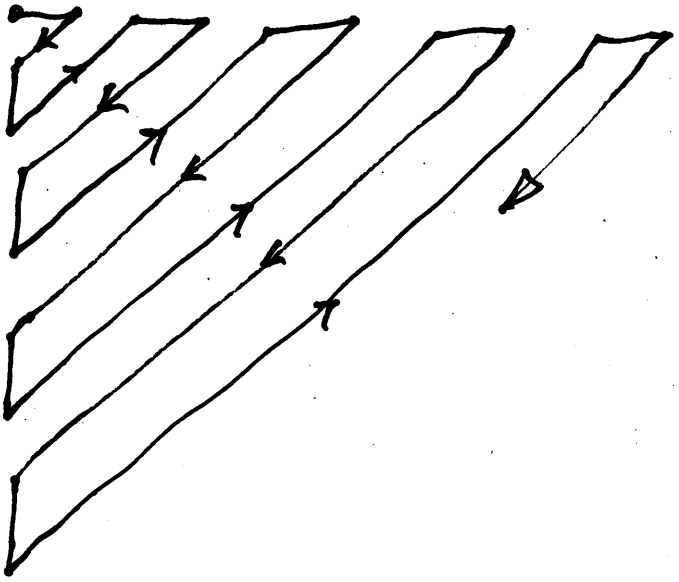
Faccio una tabella ordinando le frazioni
la riga corrisponde al ~~~~ denominatore
la colonna corrisponde al denominatore



denom.

8 ott 2020 p. 7

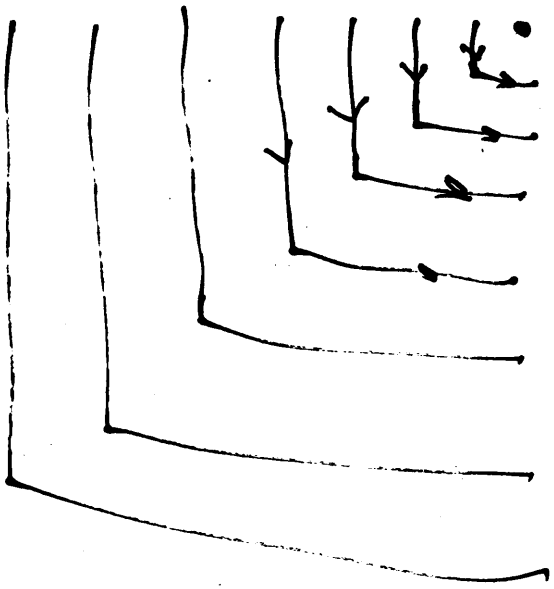


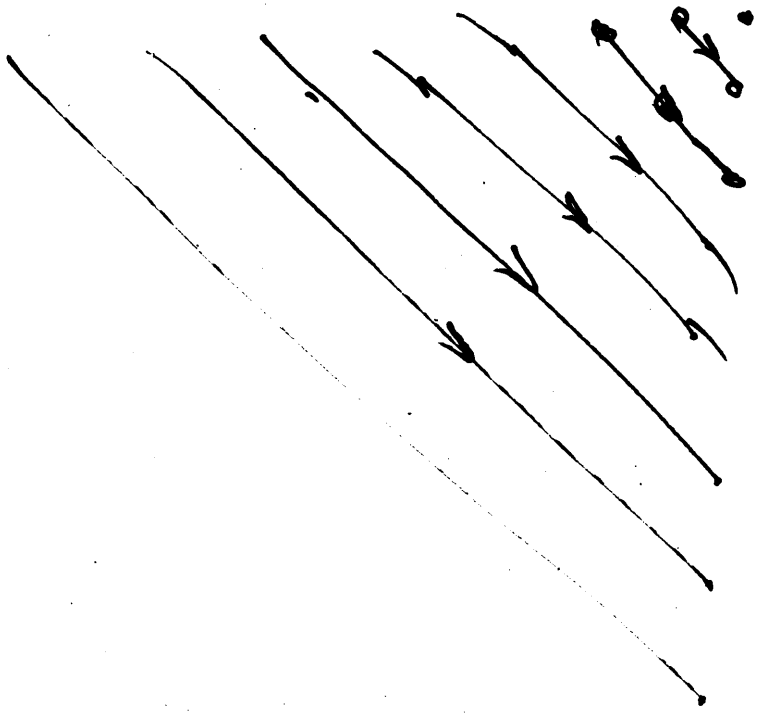


Insiemi infiniti fra loro equipotenti:

$\mathbb{N}$ $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$

Georg Cantor





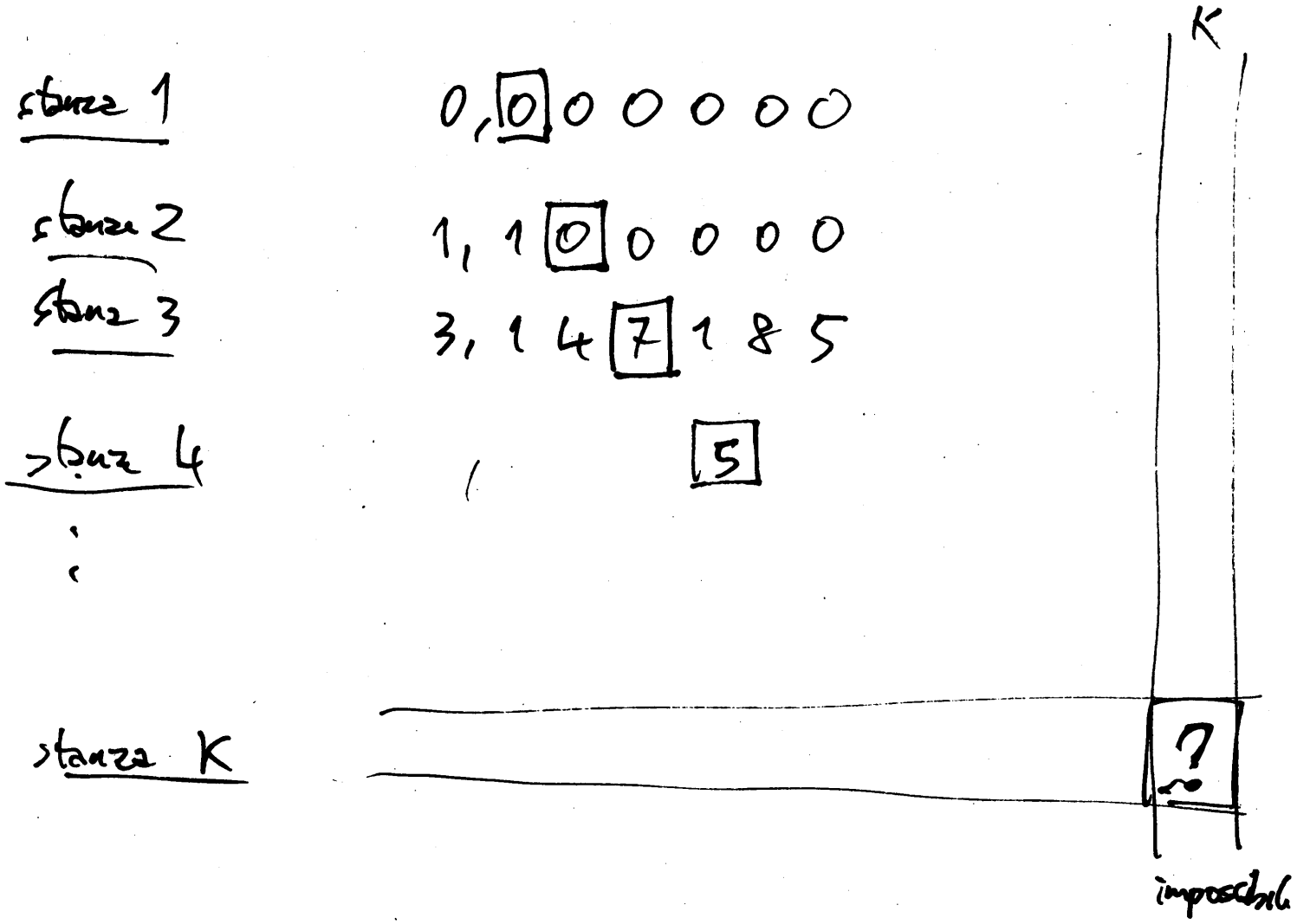
8 ott. 2020 p. 9

Teorema: $\mathbb{R}$ **non** è equipotente a $\mathbb{N}$

Dim per assurdo col metodo diagonale

Supponiamo che siano equipotenti.

Li posso far stare **tutti** nell'albergo di Hilbert



0 0 7 5 ...

le cambio tutte

$x = 0,1\ 1\ 0\ 0\ \ldots$

RICEVIMENTO: GIOVEDÌ 15:30 - 16:30
su Teams

giuliana.porni@uniud.it

Forum su e-learning

RICHIAMIAMO GLI INSIEMI NUMERICI

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

irrazionali $= \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

"calcolabili" visti con le cose generabili da algoritmi

i razionali sono tutti calcolabili

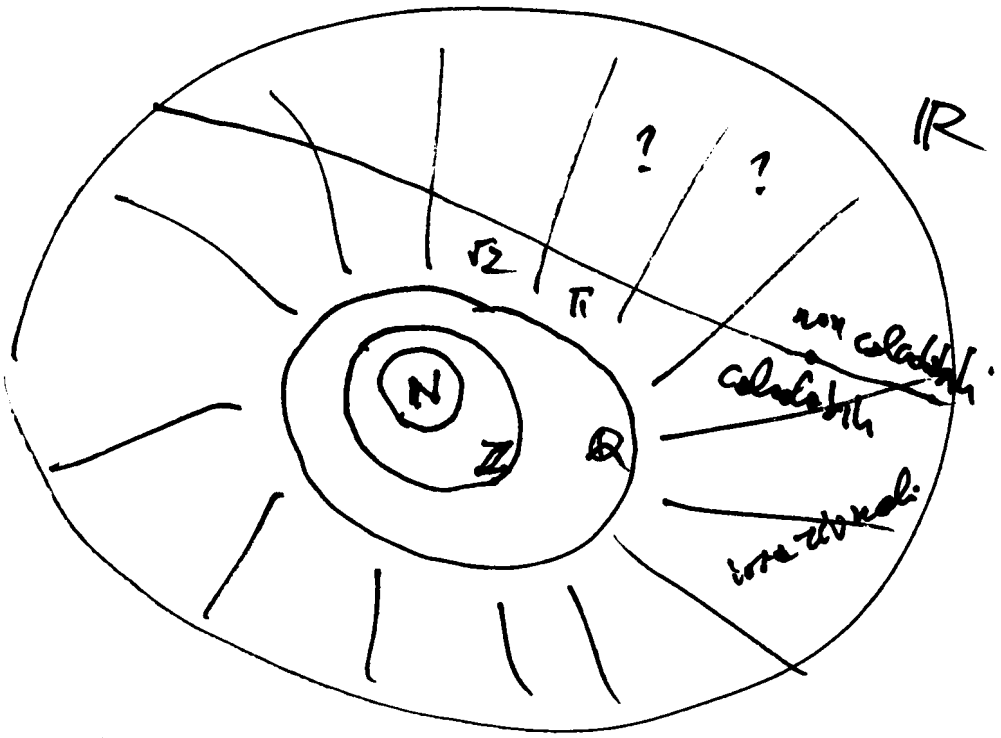
algoritmo di divisione

$$1 : 3 = 0{,}333\ldots$$
$$10$$
$$10$$
$$10$$

gli irrazionali sono calcolabili? < alcuni sì / altri no

$\sqrt{2}$ è calcolabile
π è calcolabile
} irrazionali

Diagramma



Punto di vista della numerosità

$\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ (calcolabili) sono fra loro equipotenti
o hanno la stessa numerosità
o la stessa cardinalità

$\mathbb{R}$ non è equipotente a $\mathbb{N}$
è decisamente più grande

Gli insiemi equipotenti a $\mathbb{N}$
sono detti INSIEMI NUMERABILI

Gli insiemi più grandi di questi sono
detti non numerabili ($\mathbb{R}$)

PROPRIETÀ ALGEBRICHE DEI NUMERI REALI O RAZIONALI

Regole dell'addizione

1) proprietà COMMUTATIVA

$$x + y = y + x \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

2) proprietà associativa

$$(x + y) + z = x + (y + z) \qquad \forall x, y, z$$

questo autorizza a togliere le parentesi

$$x + y + z$$

Per i numeri macchina non vale la proprietà associativa

$$x = \overbrace{1{,}000}^{4} \times 10^{0}$$

~~$y = 0{,}005 \times 10^{0}$~~

$$y = \overbrace{0{,}0005}^{} \times 10^{0} = \overbrace{5{,}000}^{4} \times 10^{-4}$$

$$z = 0{,}0005 \times 10^{0} = 5{,}000 \times 10^{-4}$$

$$x + y = 1{,}000 + 0{,}0005 = \overbrace{1{,}0005}^{4} = 1{,}000 = x$$

(1 cifra sost.)

$$(x+y) + z = 1{,}000 + 0{,}0005 = \overbrace{1{,}0005}^{} = 1{,}000 = x$$

(1 cifra sost.)

$$(x+y) + z = x$$

$$y + z = 0{,}0005 + 0{,}0005 = \overbrace{0{,}001}^{4}$$

$$x + (y+z) = 1{,}000 + 0{,}001 = \overbrace{1{,}001}^{4} \neq x$$

$$(x+y) + z \neq x + (y+z)$$

3) esistenza dello zero 0 :

esiste unico un numero, detto zero, che ha la proprietà che $0+x=x \quad \forall x$

4) esistenza degli opposti :

$\forall x \in \mathbb{R}$ esiste unico un numero, detto opposto di x, indicato con $-x$, tale che

$$x+(-x)=0 \qquad -0=0$$

Regole della moltiplicazione

5) proprietà commutativa

$$x \cdot y = y \cdot x \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

6) proprietà associativa

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \qquad \forall x, y, z$$

autorizza a scrivere xyz

oss la divisione non è associativa

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} \qquad \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}$$

di solito sono diversi

7) esistenza dell'uno 1

esiste unico un numero, indicato con 1, e diverso da 0, tale che

$$1 \cdot x = x \quad \forall x$$

8) esistenza dei reciproci

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esiste unico un numero, detto reciproco di x, e indicato con $x^{-1} = \frac{1}{x}$, tale che

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

PROPRIETÀ MISTA SOMMA CON PRODOTTO

9) proprietà DISTRIBUTIVA

distribuisco

$$x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad \forall x, y, z$$

raccolgo la x = fattor comune

non esiste il reciproco di 0

bisogna usare le varie regole, in particolare la distributiva:

$x \cdot (0+0)$ ci può calcolare in 2 modi

1° modo sommiamo $0+0$ e poi moltiplichiamo

$$x \cdot (\underbrace{0+0}_{\text{per la regola 3}}) = \boxed{x \cdot 0}$$

$$0+0 = 0$$

2° modo distribuiamo la moltiplicazione

$$x \cdot (0+0) = \boxed{(x \cdot 0) + (x \cdot 0)}$$

Uguagliamo i risultati:

$$x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0$$

Aggiungo ad ambo i membri $-(x \cdot 0)$

$$\underbrace{x \cdot 0 + (-(x \cdot 0))}_{\text{numero qualsiasi con il suo opposto}} = (x \cdot 0) + \underbrace{(x \cdot 0) + (-(x \cdot 0))}_{0}$$

$$0 = x \cdot 0 + 0$$

$$\boxed{0 = x \cdot 0}$$

qualsiasi numero moltiplicato per 0 fa zero

È una conseguenza delle regole che ho dato

0 ha un reciproco? NO!

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1 \qquad x \neq 0$$

$0 \cdot \frac{1}{0} = 1$ (0 moltiplicato per 0)

$\neq 0$

impossibile

$\frac{1}{0}$ non è un numero

$\frac{1}{0} = \infty$ ∞ non è un numero

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

proprietà distributiva della divisione

$$\frac{1+n}{n} = \frac{1}{n} + \frac{n}{n} = \frac{1}{n} + 1$$

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} + \frac{b}{d}$$

NO!!!

$\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$?? $\dfrac{a}{\frac{b}{c}}$ $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$

mettere in evidenza
la frazione principale
o mettere le parentesi

L'elevamento a potenza non è associativo.

x^{y^z} ? $(x^y)^z$ non sono equivalenti

$\Longrightarrow x^{(y^z)}$ convenzione

$e^{x^2} = e^{(x^2)}$

$\frac{1}{2}mv^2 = 1/2mv^2$ $(1/2)mv^2$

ambigua

$\frac{1}{2mv^2} = 1/2mv^2$ $1/(2mv^2)$

PROPRIETÀ DELL'ORDINAMENTO

Sui numeri reali è definito anche un ordinamento.

cioè dati due numeri reali si può sempre dire se uno è più piccolo dell'altro

$$1 < \sqrt{2} \qquad \text{VERO}$$

$$\pi < 5 \qquad \text{VERO}$$

$$(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2} \qquad \text{VERO}$$

simboli per l'ordinamento sono

$$< \quad \leq \quad > \quad \geq \quad =$$

$$x \overset{\geq}{<} y \qquad y \overset{\leq}{>} x$$

Proprietà di base.

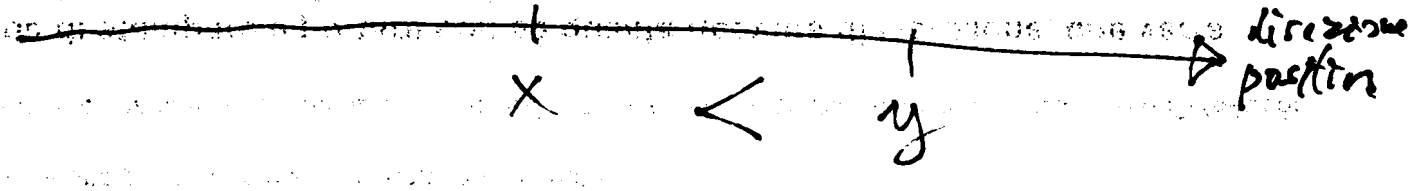
1° tricotomia (divisione in tre)

Dati due numeri reali x, y vale sempre uno e uno solo delle tre seguenti possibilità

$$x < y \qquad x = y \qquad x > y$$

tutti i numeri reali sono confrontabili fra loro

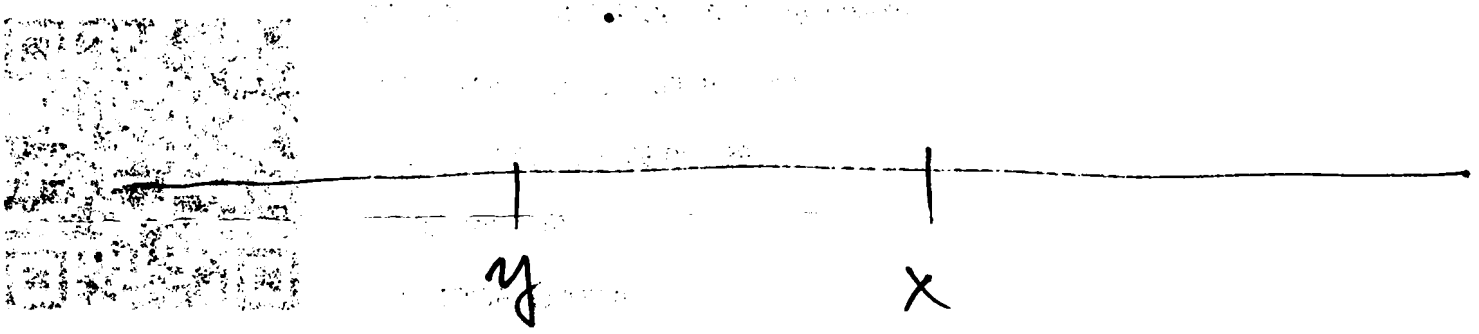
interpretazione grafica: i numeri reali sono pensati come punti della retta:



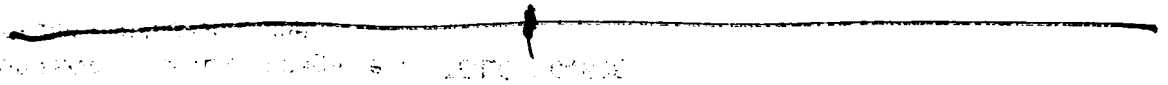
x minore di y

x precede y

x è a sinistra di y



$y < x$ o $x > y$



$x = y$

$x \geq y$

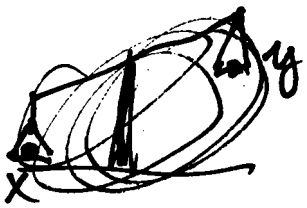
Proprietà che legano le operazioni con l'ordinamento

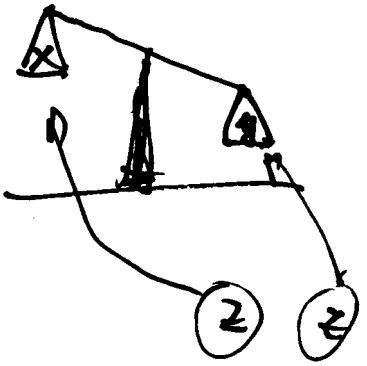
10) invarianza per traslazioni

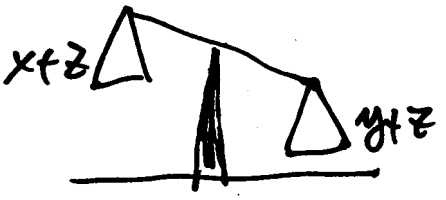
Se $x < y$ allora $x+z < y+z$

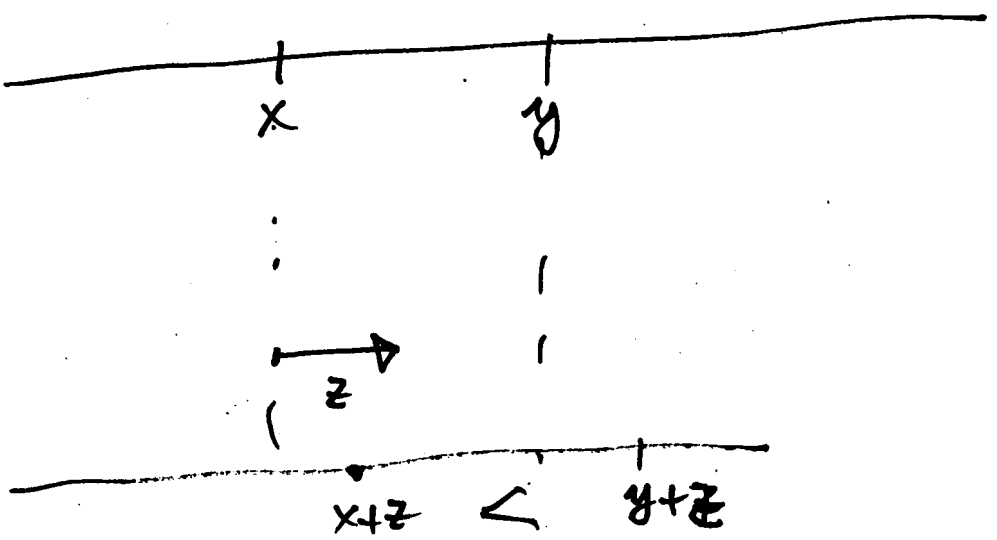
da una disuguaglianza posso dedurne un'altra aggiungendo la stessa cosa ad ambo i membri

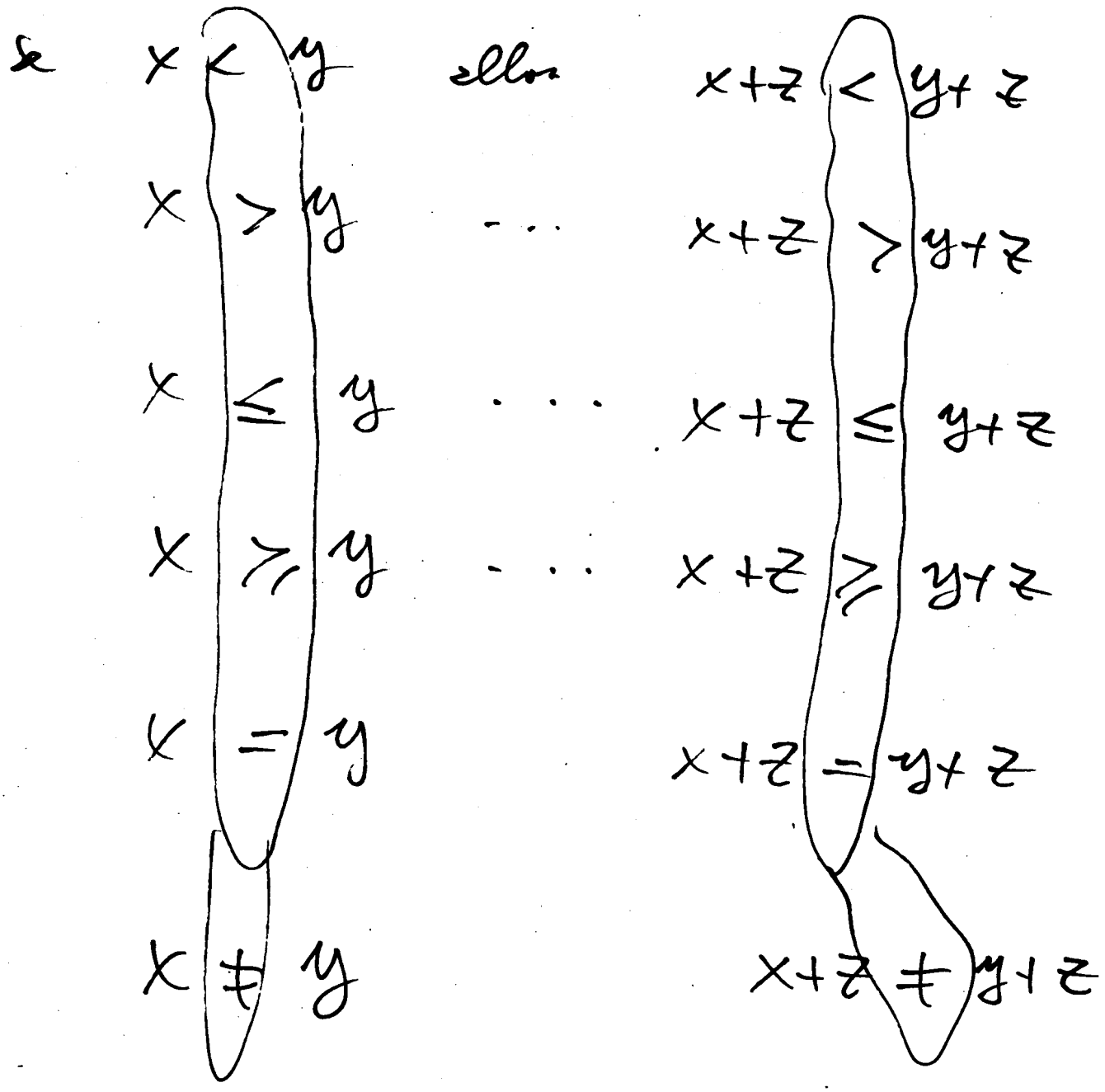
se quella di partenza è vera, anche quella nuova è vera










se
x < y
x > y
x ≤ y
x ≥ y
x = y
x ≠ y
allora
x+z < y+z
x+z > y+z
x+z ≤ y+z
x+z ≥ y+z
x+z = y+z
x+z ≠ y+z

Me ott 2020 per Mk

11) Se $x < y$ e $z > 0$

allora $xz < y \cdot z$

se $z > 0$

$x < y$ implica $xz < yz$

$x > y$ ... $xz > yz$

$x \leq y$ ... $xz \leq yz$

$x \geq y$ ... $xz \geq yz$

$x = y$ $xz = yz$

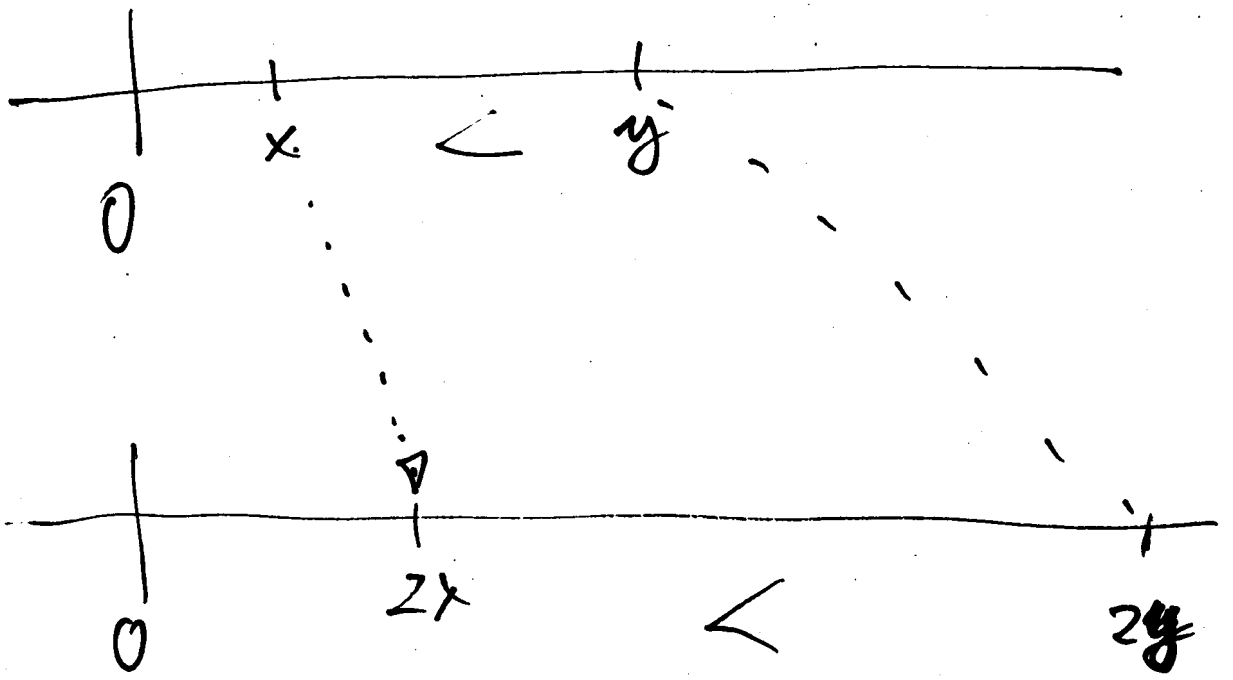
Se moltiplico o entrambi i membri di una disug. per uno stesso numero > 0, ottengo una ~~disug~~ disuguaglianza che rimane vera se era vera quella di partenza

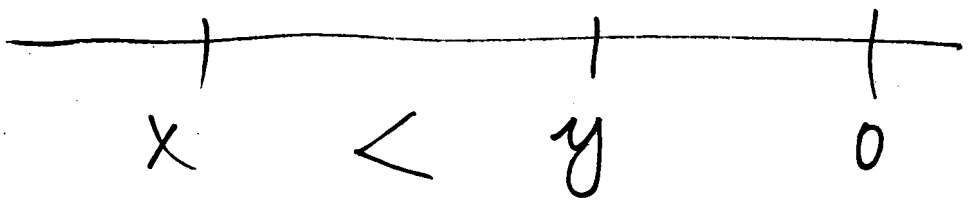
Invariata per omotetie (cambiamenti di scala) positivi

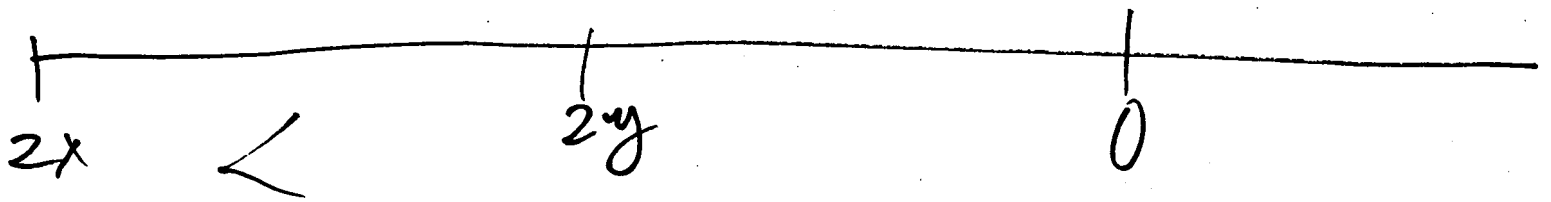
$z = 2$

se $x < y$ allo $2x < 2y$

geometria!







x
0
y

zx
0
zy

PROPRIETÀ DI BASE DEI NUMERI REALI

ALGEBRICHE + ·

somma

1) commutativa $x+y=y+x$

2) associativa $(x+y)+z=x+(y+z)$

3) esistenza dello zero
$x+0=x \quad \forall x$

4) esistenza degli opposti
$x+(-x)=0$

prodotto

5) commutativa $xy=yx$

6) associativa $(xy)z=x(yz)$

7) esistenza dell'unità $1 \neq 0$
$1 \cdot x = x \quad \forall x$

8) esistenza dei reciproci
$\forall x \neq 0 \quad x \cdot \frac{1}{x} = 1$

9) distributiva $x(y+z)=xy+xz$

ORDINAMENTO

$< \quad \leq \quad > \quad \geq \quad (= \quad \neq)$

TRICOTOMIA $\forall x, y \in \mathbb{R}$ una e una sola delle tre alternative è vera $\quad x<y \quad x=y \quad x>y$

TRANSITIVA se $x<y<z$ allora $x<z$

$x \leq y \leq z$ allora $x \leq z$

$x>y>z$ .. $x>z$

$x \geq y \geq z$ .. $x \geq z$

$x<y \leq z$ .. $x<z$

$<$ $>$ disuguaglianze strette

$\leq$ $\geq$ " deboli

$x < y$ dà più informazione di $x \leq y$
stretta debole

INVARIANZE dell'ordinamento

invarianza per traslazioni

$$x < y \implies x + z < y + z$$
implica

aggiungere z ad ambo i membri
è come traslare di vettore z

invarianza per omotetie positive

$$\left.\begin{array}{l} x < y \\ z > 0 \end{array}\right\} \implies xz < yz$$

Se ho una disug. vera e moltiplico ambo i membri per uno stesso numero >0, la disug. rimane invariata

$x < y$ e $z < y$ stanno in $\mathbb{R}$

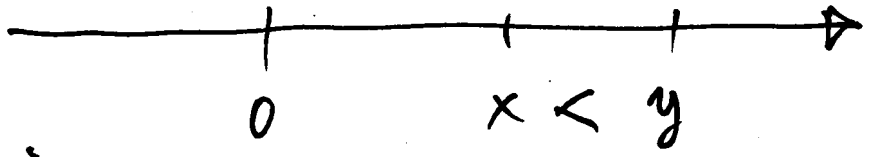
$x ? z$ $\quad x < y > z$

15 ott 2020
Pag. 3

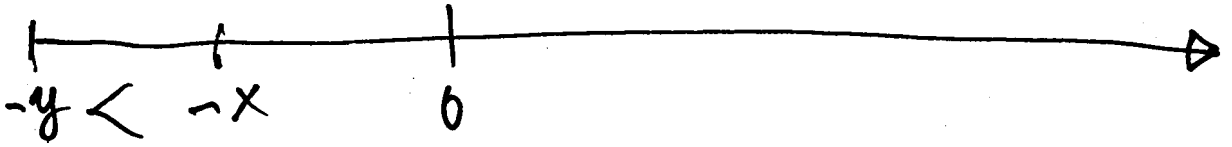
Cosa succede se moltiplichiamo una disug. per un numero negativo?

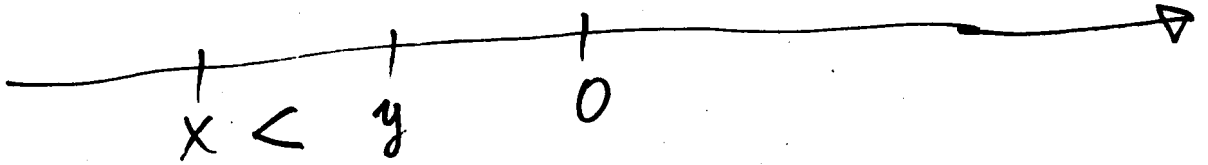
$z = -1$

$$x < y \Rightarrow -x \overset{?}{>} -y$$

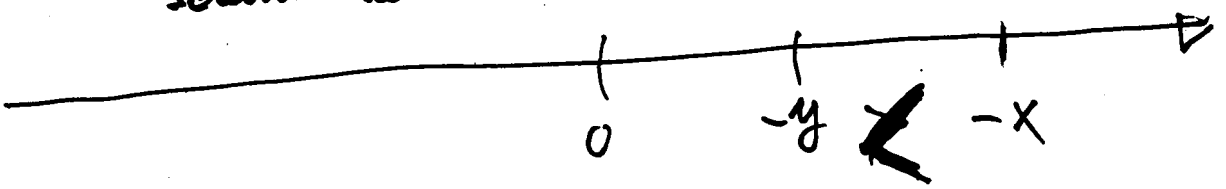


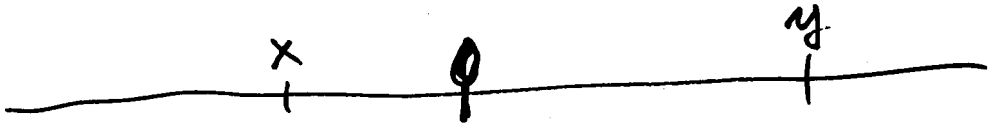
primo caso



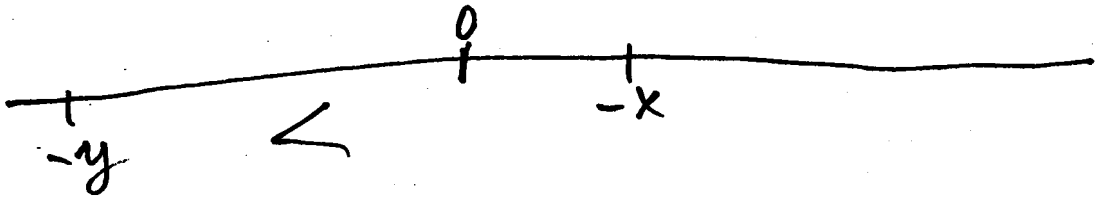


secondo cas.





Terzo caso



15 ott 2020
pag 4 Moltiplicando una disug. vera per uno stesso numero o minore di zero, ottengo una disuguaglianza vera ma inversa

$z < 0$

$$x < y \implies xz > yz$$

$$\leq \quad \geqslant$$

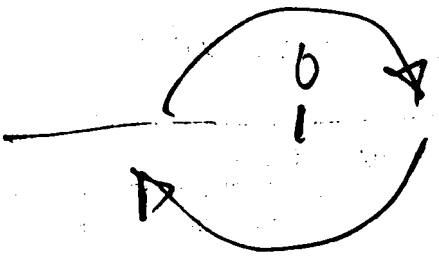
$$> \quad <$$

$$\geqslant \quad \leqslant$$

$$= \quad =$$

$$\neq \quad \neq$$

moltiplicando per un numero negativo le disuguaglianze si ribaltano



rotaz. di 180° di centro

15 ott 2020
pag. 5

$z \geq 0$

$x < y \implies xz \overset{?}{\leq} yz$

$x \cdot 0 \quad y \cdot 0$

$0 = 0$

$x > y \implies xz \geq yz$

Se si moltiplica per un numero $z \geq 0$ la disug. mantiene il verso ma si indebolisce

$x \leq y \implies xz \leq yz$

$x \geq y \implies xz \geq yz$

15 ott 2020
Pag. 6

moltiplich. per $z \leq 0$

$$x < y \implies xz \geqslant yz$$

$$> \quad \leqslant$$

$$\leqslant \quad \geqslant$$

$$\geqslant \quad \leqslant$$

le disug. si ribaltano e indebboliscono

---

cosa succede se moltiplichiamo per un z di cui non sappiamo il segno?

$$z \gtrless ? \; 0$$

$$x < y \qquad xz \overset{?}{\underset{??}{}} yz$$

---

15 ott 2020
pag. 7

ALTRE PROPRIETÀ CONSEGUENTI

12) $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0$

$x > 0 \Rightarrow -x < 0$

$x < 0 \Rightarrow -x > 0$

$x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0$

$x \geq y \Rightarrow -x \leq -y$

passando agli opposti, le disug. si ribaltano

$x \leq y \Rightarrow -y \leq -x$

13) $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$ il reciproco di un positivo è positivo

$x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < 0$

$0 < x \leq y \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$

Se tutti numeri positivi, passando al reciproco le disug. si ribaltano

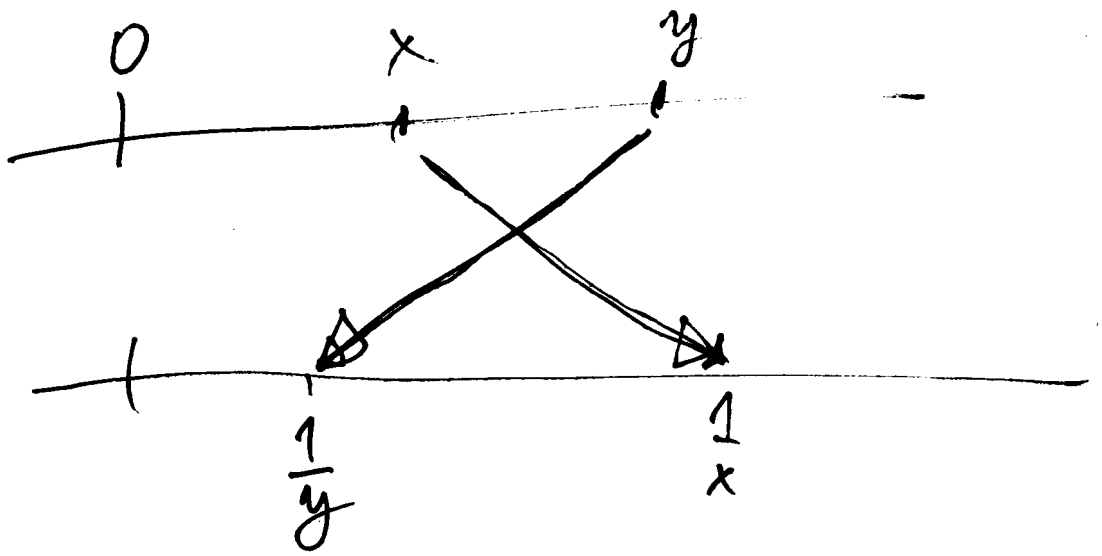
$x > 0$
$y > 0$

$x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

$x \leq y \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$

$\geq$ $\leq$

15 ott 2020
Pag. 8



$10 < 36 \Rightarrow \frac{1}{10} > \frac{1}{36}$

Se ho due frazioni con num e denom positivi e aumento il denominatore la frazione diminuisce

$n \geq 0$ $\qquad \frac{n+3}{n^2+1} > \frac{n+3}{n^2+2}$

$x + (-y) = 0 \qquad x = y$

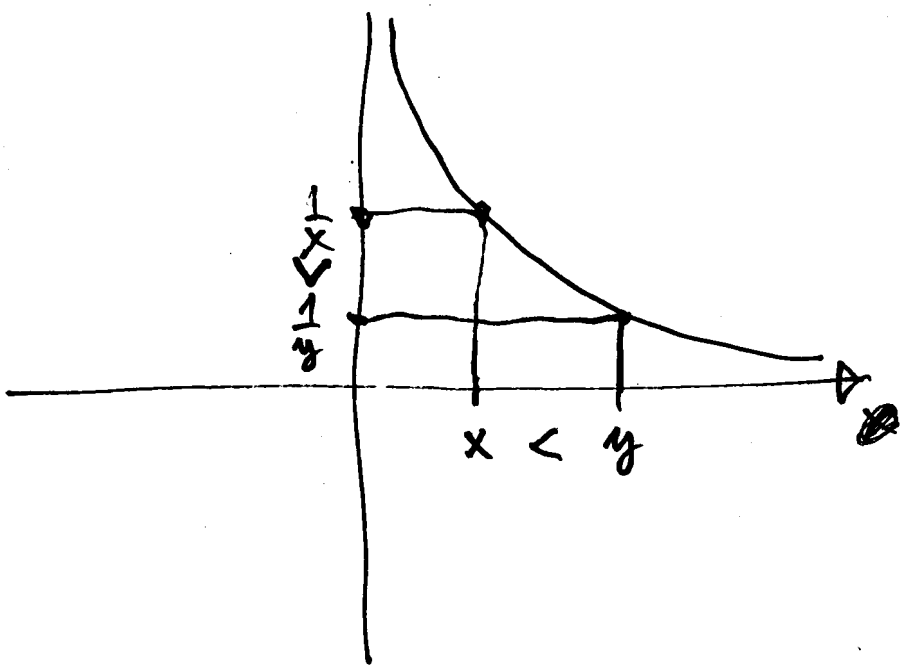
$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y$ che sommato a x ritorna 0

$x + y = 0 \qquad y = -x$

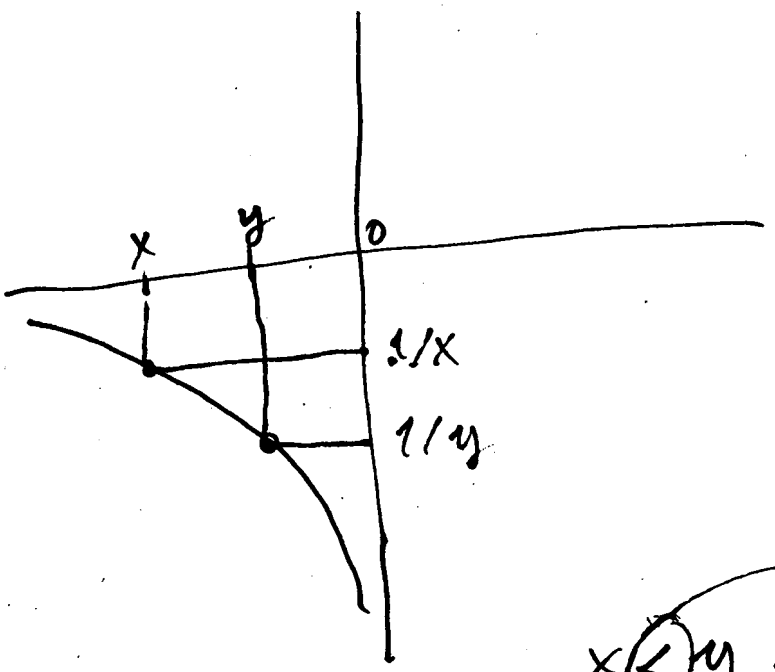
$x + (-x) = 0$

15 окт 2020
Лу-9

$f(x) = \frac{1}{x}$

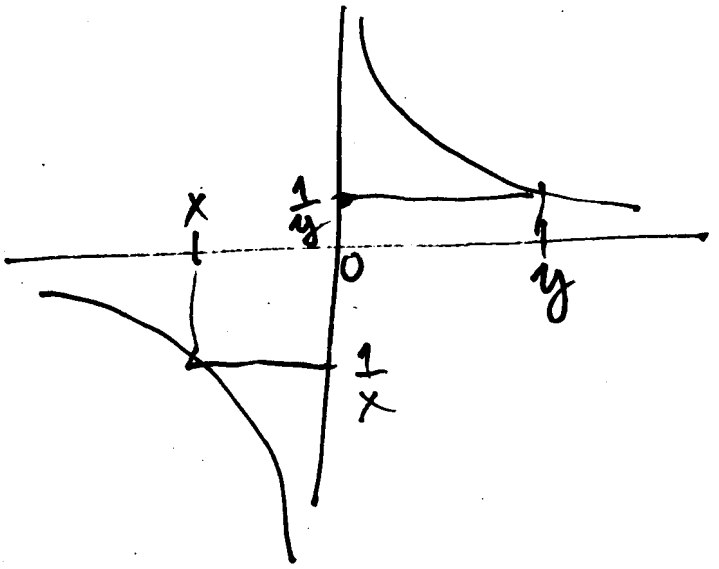


$0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$



$x < y < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

15 ott 2020
Ry.10



~~$0 < x$~~

$x < 0 < y \Longrightarrow \quad \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

$x < y$

si conserva
non si ribalta

Se non so i segni di x e y,
non posso dire nulla su $\frac{1}{x} ? \frac{1}{y}$

15 ott 2020
Pag. 11

15) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad x^2 > 0$

(Conseguenza $1^2 = 1 > 0$)

il risultato di una espressione in $\mathbb{R}$ è ≥ 0 positivo o nullo

positivo in senso debole

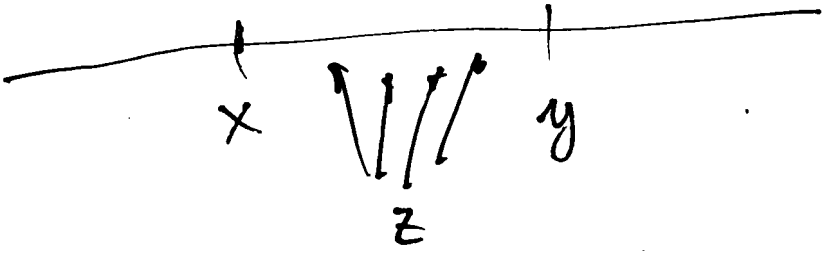
$$(x^2 - x)^2 (x+1) \geq 0$$

$$(x+1) > 0$$

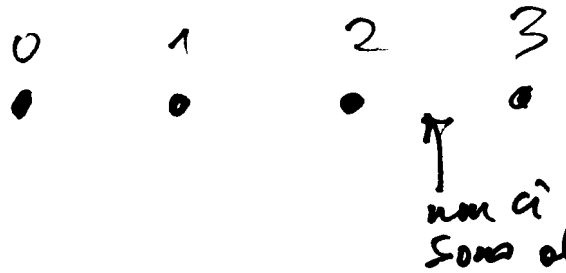
16) l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzione nei reali

17) <u>densità</u> $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $x < y$

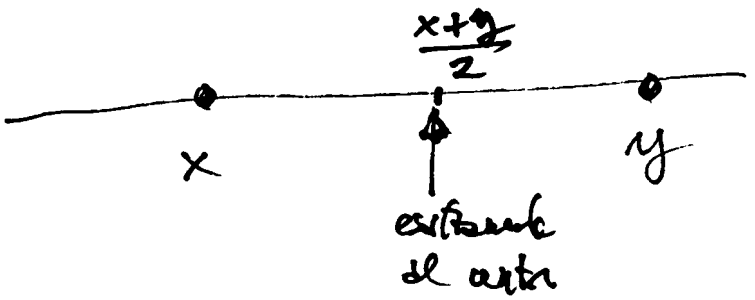
se $x < y$ esistono infiniti z tali che $x < z < y$



Se lavoro su $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$



Un numero <u>notevole</u> intermedio fra x e y è il <u>punto medio</u> o anche media aritmetica



punto medio $= \frac{x+y}{2}$

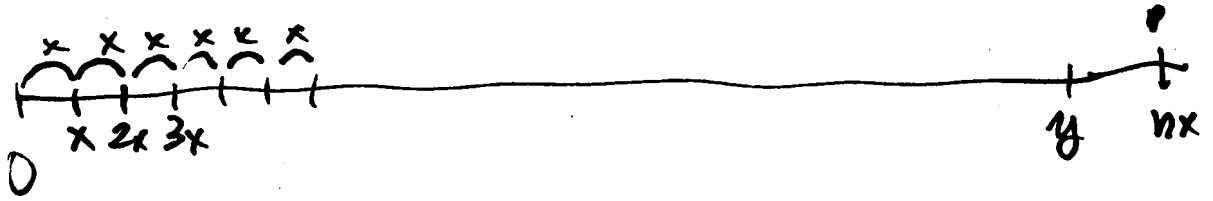
18) PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE

$\forall x, y > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $nx \geq y$

Per spiegare il significato precisiamo

x = numero molto piccolo

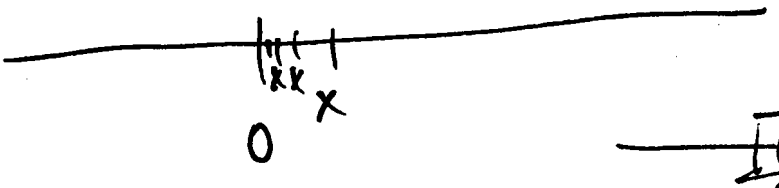
y = numero molto grande

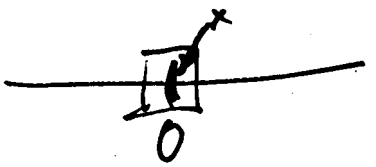


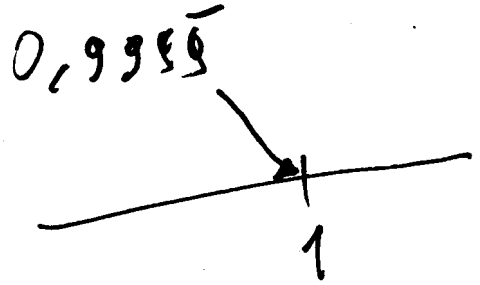
Archimede dice che non ci sono numeri reali infinitamente grandi

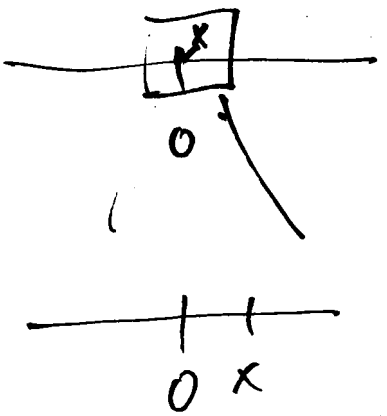
dice anche che non ci sono numeri reali infinitamente piccoli

Esiste una teoria, chiamata <u>Analisi non standard</u>, in cui sono ammessi numeri infinitamente grandi e piccoli.









NOZIONI DI LOGICA

quanto serve per questo corso

In questo corso incontreremo diversi tipi di formule

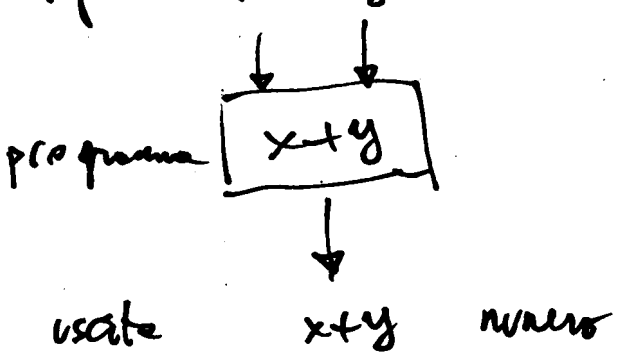
1) a valore numerico

$$3 \qquad 1+1 \qquad \sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}+1)^2$$

2) simbolica a valore numerico

$x+y$ assume valore numerico quando diamo valori numerici alle variabili simboliche



3) a valore logico: vero-falso

$1+1=2$ vero

domanda: vero o falso?

$2^2=3$ falso

domanda

Il simbolo di uguaglianza a volte non è una domanda vero-falso ma una assegnazione di valore, cioè un comando

$n = 5$ a seconda del contesto potrebbe essere una domanda oppure una assegnazione

$n := 5$ assegnazione

$n = n+1$ assegnazione
come domanda è per forza falsa

$n := n+1$

↑ dopo l'assegnazione

↑ prima dell'assegnazione

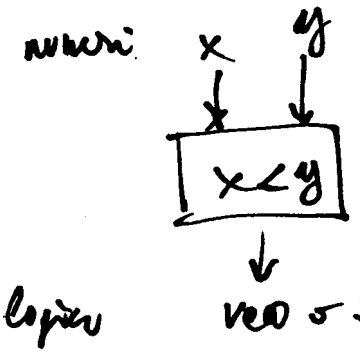
Disuguaglianze

~~$\neq$~~ $3 < 4$ vero

$\pi < 2$ falso

4) simbolicamente a valore logico

$x < y$



Chiameremo **PROPOSIZIONE** una formula a valore **logico**

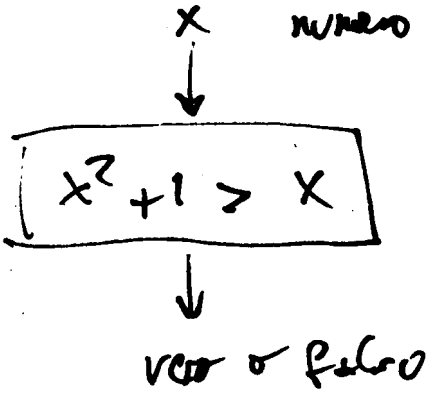
$3 < 5$ $\quad$ $1 = 7$

$\sqrt{2} < 2$

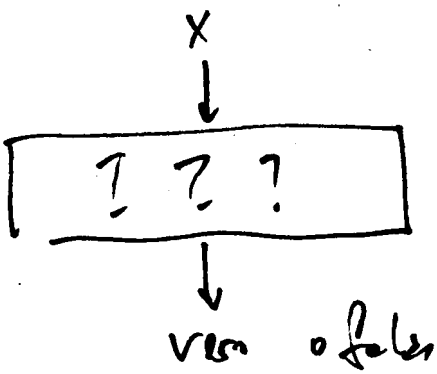
Chiameremo **PREDICATO** una formula **simbolica** a valore logico

$x < y$ $\quad$ $x^2 + 1 > x$

$x^2 + 2x - 3 = 0$



Risolvere la disequazione?



programmi più semplici di un determinato tipo specifico

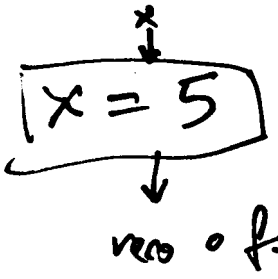
In pratica diremo **predicati** anche le proposizioni

$(\sqrt{2}+1)^2 - 7$ predicato? NO

es $6+1 \overset{?}{=} 7$ predicato? sì vero

$6+1 \overset{?}{=} 8$ predicato? sì falso

Poniamo $x = 5$ comando non vero né falso



predicato

OPERAZIONI LOGICHE SUI PREDICATI

(connettivi logici)

NEGAZIONE

non (1 = 2)

non (predicato) ha valore logico opposto al predicato

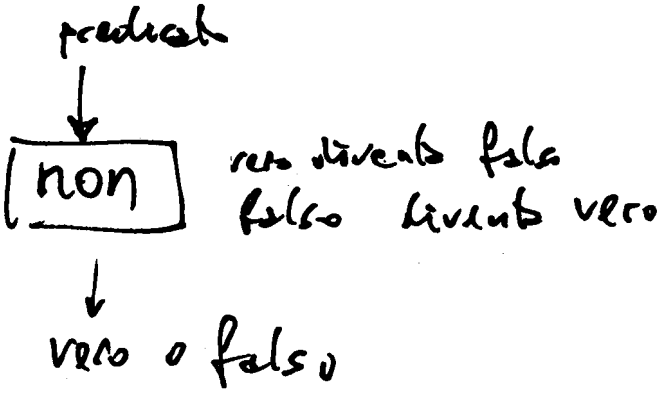


tabella di verità

P	non P
V	F
F	V

$\neg P$

NOT (P)

!P

P' $\overline{P}$

non (5) non ha senso

non $(x < y)$ equivale a $x \geq y$

hanno sempre lo stesso valore

CONGIUNZIONE AND

prende 2 predicati in ingresso e

fa' in uscita un nuovo predicato

AND ($1>2$, $3=4$)

predi. predi

$(1>2) \wedge (3=4)$

$(1>2)$ e $(3=4)$

$(1>2)$ & $(3=4)$

$(1>2)$ && $(3=4)$

falsi

Tabella di verità

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$1 \cdot 1 = 1$

$0 \cdot 1 = 0$

$1 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 0 = 0$

AND $\begin{cases} x < x^2 + 1 \\ x^2 + 2x - 1 < 0 \end{cases}$

Sistema di equazioni o disequazioni $\{$ = AND

DISGIUNZIONE OR (INCLUSIVA)

oppure o

OR((1>2), 3=4)

prop prop

$1>2 \quad \vee \quad 3=4$

$1>2 \quad$ o (oppure) $\quad 3=4$

FALSO

$1>2 \quad | \quad 3=4$

$1>2 \quad || \quad 3=4$

tabella di verità

p	q	p V q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

e/o

non è la disgiunzione esclusiva

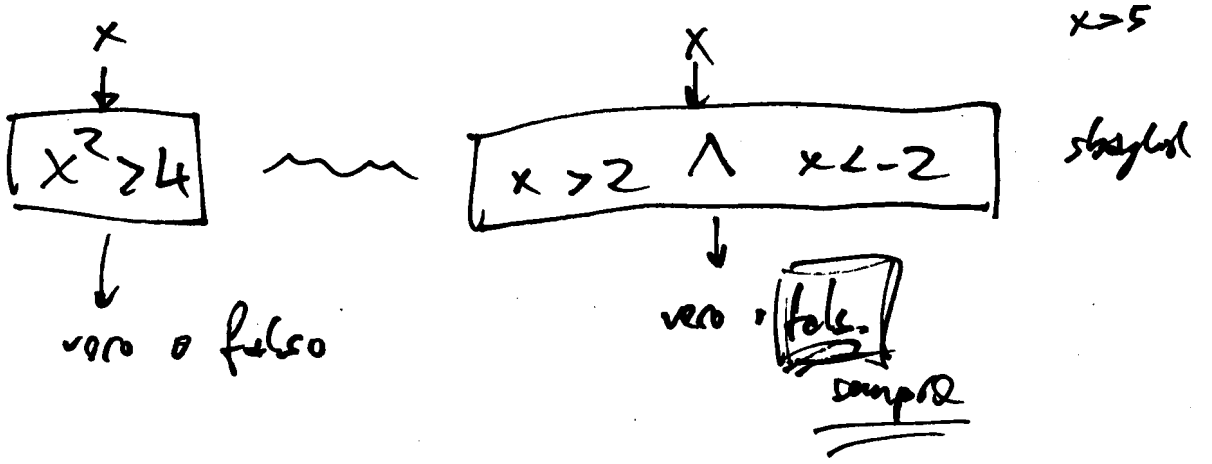
XOR [uno o l'altro ma non tutti e due]

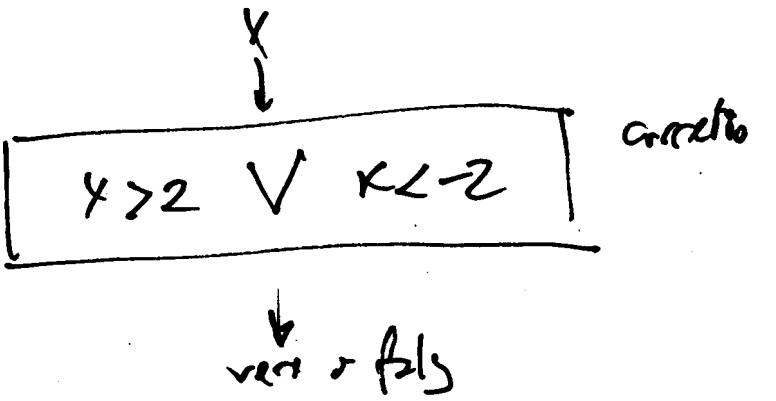
p V q è vera quand è vero almeno uno dei due

21 ott. 2020 p. 9

Risolvere la diseq. $x^2 > 4$

Le soluzioni di questa diseq. sono i numeri $x > 2$ e i numeri $x < -2$





i numeri x tali che ($x > 2$ o $x < -2$)

21 okt. 2020 p. 10

$\frac{x+1}{x-1} > 0$

$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$ ...

IMPLICAZIONE

$p \Rightarrow q$ $\quad$ p implica q

se p allora q

se vale p allora vale anche q

da p segue q

tabella di verità

p	q	$p \Rightarrow q$	
V	V	V	
V	F	F	
F	V	V	} non intuitive
F	F	V	

l'unico caso in cui l'implicazione è falsa è nel caso $\quad$ vero $\Rightarrow$ FALSO

FALSA

in tutti gli altri casi è considerata vera

$1 < 0 \Rightarrow 5 < 3$

vero

FATTO IMPORTANTE ci sono implicazioni che sono vere per la loro forma, indipendentemente dai valori in input.

$$x > 1 \implies x+1 > 2$$

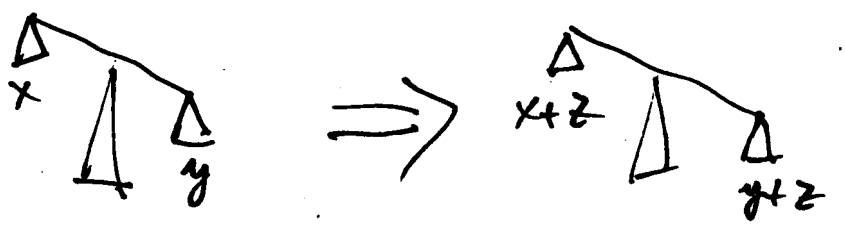
x input numerico

si ottiene la $x>1$ aggiungendo 1 ad ambo i membri

Nei principi di base dell'onestà reale c'è

$$\forall x, y, z \quad x > y \implies x+z > y+z$$

l'implicazione è vera qualunque siano gli input



Es) So che una implicazione $p \Rightarrow q$ è vera posso fare 2 deduzioni

1) se anche p è vera, anche q è vera
2) se q è falso, anche p è falso

$$p \overset{\text{vero}}{\Longrightarrow} q$$
vero

avendo ho una implicazione vera,

la verità "fluisce" lungo la freccia "si trasmette"
nella direzione della freccia

la falsità risale in direzione opposta alla freccia

$$p \overset{\text{vera}}{\Longrightarrow} q$$
falso

L'implicazione è transitiva

$$p \overset{\text{vera}}{\Longrightarrow} q \overset{\text{vera}}{\Longrightarrow} r$$
vera

Supponiamo di sapere che $p \Rightarrow q$ è vera

e per esempio di sapere che p è vero

come è q?

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
~~V~~	~~F~~	~~F~~
F	V	V
F	F	V

q è vero

supponiamo di sapere che $p \Rightarrow q$ è vero

e che q sia vero.

Che ne è di p? non so nulla

Supponiamo di sapere che $p \Rightarrow q$ è vero

e che q sia falso

$\Rightarrow$

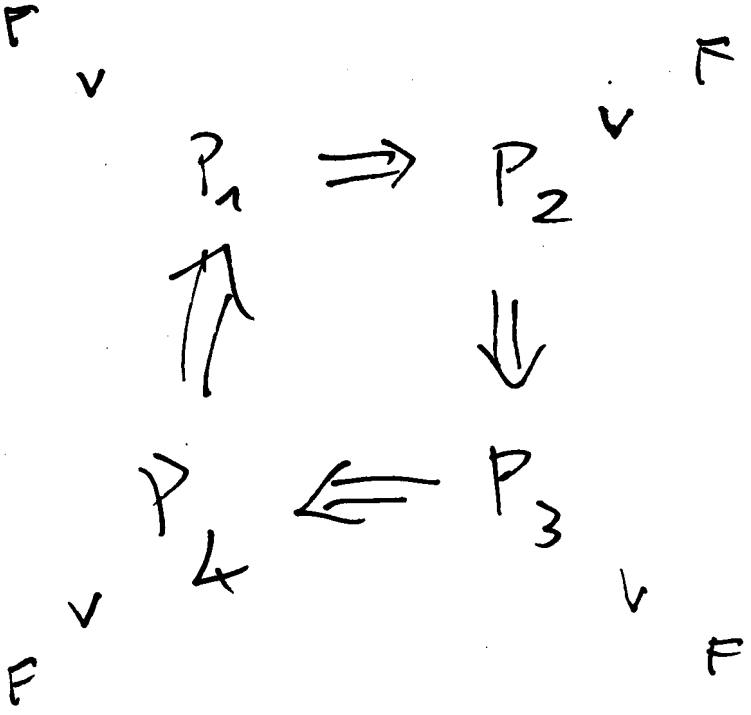
Che ne è di p? FALSO

21 ott 2020 p. 15

CATENE DI IMPLICAZIONI VERE

$P_1 \overset{V}{\Rightarrow} P_2 \overset{V}{\Rightarrow} P_3 \overset{V}{\Rightarrow} P_4$

?	?	V	V
?	V	V	V
F	F	F	F
F	F	F	?



quando queste implicazioni sono vere, le quattro prop. P_1, P_2, P_3, P_4 sono o tutte false o tutte vere

21 okt. 2020 p. 16

ESERCITATORE NIZAR SALAHI AL ASBAHI

ELEMENTI DI LOGICA

proposizioni e predicati : valore vero o falso.
combinazioni logiche di proposizioni e predicati

1) NEGAZIONE NOT

P	non P
V	F
F	V

2) CONGIUNZIONE AND

P	q	P ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

3) DISGIUNZIONE OR (NON INCLUSIVA)

P	q	P ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4) IMPLICAZIONE

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Spesso quello che si sa in anticipo è che $p \Rightarrow q$ è vera, e si sa qualcosa sulla verità di p oppure di q.

$p \Rightarrow q$ vera
p vera
} deduzione: q è vera

$p \Rightarrow q$ vera
q falsa
} deduzione: p è falsa

$p \Rightarrow q$ vera
q vera
} p ??

$p \Rightarrow q$ vera
p falsa
} q ??

REPERTORIO DI IMPLICAZIONI CHE SAPPIAMO VERE

PROPRIETÀ TRANSITIVA di $\leq$ e $<$.

$$\Big(x \leq y \ \wedge \ y \leq z\Big) \implies x \leq z$$

$$x \leq y \leq z \implies x \leq z$$

$\uparrow$ sempre vera

$$x < y < z \implies x < z$$

sempre vera

$x = 0$
$z = 2$
$y = 3$

$0 < 3 < 2$

falsa

Vera

$x \geq 0$
$z = -1$
$y = 1$

$0 < 1 < -1$

falsa

$0 < -1$

falso

5) DOPPIA IMPLICAZIONE, EQUIVALENZA

p	q	$p \iff q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La doppia implicazione è vera quando ~~entrambe~~ p, q sono o entrambe vere o entrambe false

è falsa quando uno dei due è vero e l'altro è falso

In altre parole ancora, la doppia implicazione è vera quando p, q hanno lo stesso valore logico

è falsa quando p, q hanno valori diversi

$p \iff q$ doppia implicazione

p "se e solo se" q

p equivalente a q

Quando la doppia implicazione è vera, p e q sono equivalenti, nel senso etimologico, stesso valore.

L'utilità della doppia implicazione è che spesso sappiamo in anticipo che è vera, per cui si possono fare deduzioni

La doppia implicazione è più potente dell'implicazione semplice.

Supponiamo di sapere che $p \iff q$ è vera.

Se so che uno dei lati è vero, sarà vero anche l'altro,

Se so che uno dei lati è falso, anche l'altro è falso

[la verità si trasmette nella direzione delle frecce
la falsità va in senso contrario

vale anche per la doppia implicazione:

$$p \overset{\text{vera}}{\iff} q$$

Quando la doppia implicazione è vera, sia la verità che la falsità viaggiano in entrambe le direzioni

Spesso le dimostrazioni matematiche sono catene miste di implicazioni e doppie implicazioni, che sappiamo vere.

$$P_1 \Rightarrow P_2 \Leftrightarrow P_3 \Leftarrow P_4$$

V V V ?

F F F F

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \Rightarrow & P_2 \\ \Uparrow & \nearrow\!\!\searrow & \Downarrow \\ P_4 & \Leftarrow & P_3 \end{array}$$

equivale a dire $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow P_3 \Leftrightarrow P_4$

Sono equivalenti

REPERTORIO DI IMPLICAZIONI E EQUIVALENZE CHE SAPPIAMO VERE

TRANSITIVA $\quad x < y < z \implies x < z$

$\not\iff$ NO

non sono equivalenti

$x \neq y \neq z \implies x \neq z$

NO

$0 \neq 1 \neq 0 \qquad 0 = 0$

La maggior parte delle regole che abbiamo viste sono doppie implicazioni

$$x < y \iff x + z < y + z$$

equivalenza

$$x + z < y \iff x < y - z$$

equivalenza

$$\left.\begin{array}{l} x < y \\ z > 0 \end{array}\right\} \text{AND} \implies xz < yz$$

non è equivalenza

$z = 2$

$$x < y \iff 2x < 2y$$

equivalenza

moltiplicare una disug. per un numero che supponiamo essere >0 produce una disug. equivalente a quella di partenza

sommando a una disug. uno stesso numero ai due membri produce una nuova disug. equivalente

Sommare membro a membro due disug.

$$\left.\begin{array}{l} x < y \\ z < t \end{array}\right\}\ \text{AND} \Longrightarrow x+z < y+t$$

$$x+z < y+t$$

semplice, non doppia più scrivo che

$x+z < y+t$ vero

$\begin{cases} x<y \\ z<t \end{cases}$ falso

Quando facciamo una catena di implicazioni o doppie implicazioni, la presenza di implicazioni semplici, il risultato finale sarà semplice

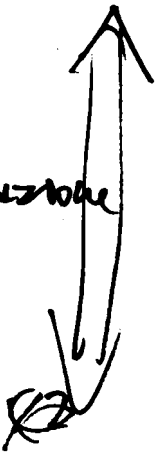
$$(P_1) \Longleftrightarrow P_2 \Longleftrightarrow P_3 \Longrightarrow P_4 \Longleftrightarrow (P_5)$$

$$P_1 \Rightarrow P_5$$

elevare al quadrato non equivalente

$$x = y \implies x^2 = y^2$$

non è doppia implicazione



$$x^2 - y^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-y)(x+y) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = y \ \vee \ x = -y$$

$$-\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2c} \qquad -\left(\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2c}\right)$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2c}$$

$$-\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2c} \quad \begin{cases} -\left(\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2c}\right) \\ \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2c} \end{cases}$$

$$\log\left(\frac{1+x}{x}\right) \qquad \log\left(\frac{(1+x)}{x}\right)$$

$$\frac{\log(1+x)}{x}$$

$$\frac{\frac{11}{3}}{4} \quad \begin{cases} \frac{\left(\frac{11}{3}\right)}{4} = \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{4} \\ \frac{11}{\left(\frac{3}{4}\right)} = 11 \cdot \frac{4}{3} \end{cases}$$

non sono la stessa cosa

IMPLICAZIONE

tabella di verità

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

doppia implicazione
equivalenza logica

$\Leftrightarrow$ iff
se e solo se
sse

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ci sono situazioni in cui
le proposizioni o predicati sono veri,
si considerano come informazioni o dati

p = "io abito in Friuli" vera

q = "io abito in Italia" vera

$p \Rightarrow q$ è appropriato

p dà più informazioni di q

sostituire al posto di p mettere q
fa perdere informazione

è una trasformazione IRREVERSIBILE

$p =$ "$x > 0$"

$q =$ "$x^2 > 0$"

$p \Rightarrow q$ è vero

l'informazione data da p
è più precisa di quella data da q

se in un ragionamento sostituisco a $x > 0$
$x^2 > 0$, perdo informazione su x
è una trasformazione di formule irreversibile

LA DOPPIA IMPLICAZIONE
CONSERVA L'INFORMAZIONE,
È REVERSIBILE

$p =$ "$x \neq 0$"

$q =$ "$x^2 \neq 0$"

$p \Leftrightarrow q$ è vera

$1 < \sqrt{2} < 2$

$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$

PREDICATI DI INTERESSE

$$= \quad < \quad \leq \quad \geq \quad > \quad \neq$$

predicati insiemistici

$$\subsetneq$$

$$\in \qquad \subset \qquad \subseteq \qquad =$$

appartenenza — inclusione stretta — inclusione debole — uguaglianza

$$\supset \qquad \supseteq$$

$$\supsetneq$$

$1 \in \mathbb{Z}$ vero

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ vero

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ vero

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \mathbb{Z}$ vera sempre

$n = \sqrt{2}$

$\sqrt{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Z}$ vero

F F

$$\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n > 3 \end{cases} \Longrightarrow n \in \mathbb{R}$$

vero

AND

PREDICATI E INSIEMI

Come si specificano gli insiemi

insiemi base $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$

se l'insieme è finito e non troppo grande si può dare l'elenco degli elementi tra graffe, separati da virgole

$$A = \{1, 2, 3\}$$

l'ordine in cui vengono scritti non è importante se parliamo di insiemi.

Puntini:

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 23\}$$

$$D = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

USANDO PREDICATI

Schema generale:

$$\{ \underbrace{x}_{\text{variabile}} \in \underbrace{C}_{\substack{\text{ambiente} \\ \text{(spazio} \\ \text{sottostante)}}} \mid \text{predicato}(x) \}$$

:

esempi $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è pari}\}$

l'insieme degli n in $\mathbb{N}$ tali che n è pari

4 nov. 2020 - p. 2

Una scrittura del genere significa l'insieme dei valori della variabile x, n che rendono vero il predicato

$\{ n \mid n \text{ è dispari} \}$ sottintesa che n è intero

non è ovvio se intendiamo gli n positivi soltanto o anche negativi

$\{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è dispari} \}$

$\{ n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ è dispari} \}$

↑ tale che

$\{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è primo} \}$

$\{ n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ è divisibile per } 7 \}$

talvolta si sottintende la prima parte

$\{ n \text{ dispari} \}$ (poco formale)

COMPLICAZIONE

$$\{ f(x) \mid \underbrace{x}_{\text{variabile}} \in \underbrace{C}_{\text{sostegno}}, \text{predicato}(x) \}$$

l'insieme dei valori $f(x)$ al variare della x in C (sostegno) per i quali il predicato è vero

Esempi

$$\{ n^2 \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ è dispari} \}$$

i valori di n^2 per gli n tali che, al variare degli $n \in \mathbb{N}$, n è dispari

insieme dei valori di n^2 al variare degli $n \in \mathbb{N}$ tali che n è dispari

1° passo $n \in \mathbb{N}$

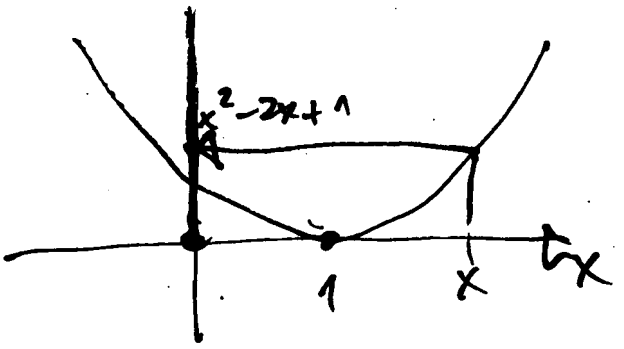
2° passo si tengono solo gli n dispari

3° passo si eleva al quadrato

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6
dispari		1		3		5	
elevo al quad.		1^2		3^2		5^2	

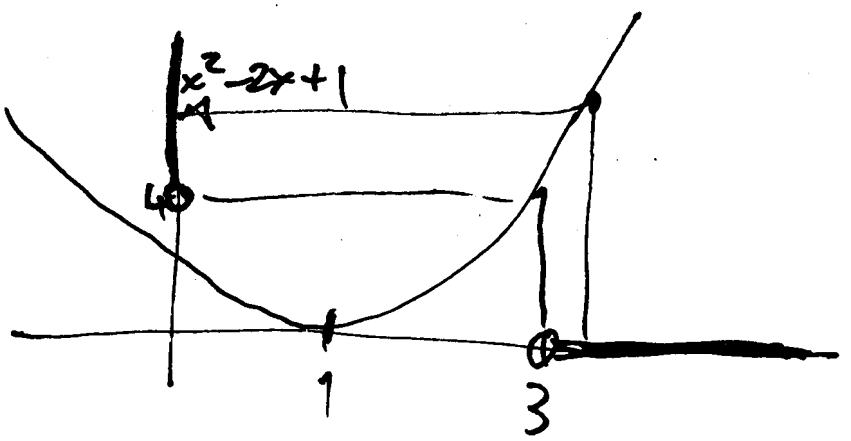
$$\{ x^2 - 2x + 1 \mid x \in \mathbb{R} \}$$

l'insieme dei valori di $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ al variare di $x \in \mathbb{R}$



$= [0, +\infty[$

$$\{ x^2 - 2x + 1 \mid x \in \mathbb{R},\ x \geq 3 \}$$

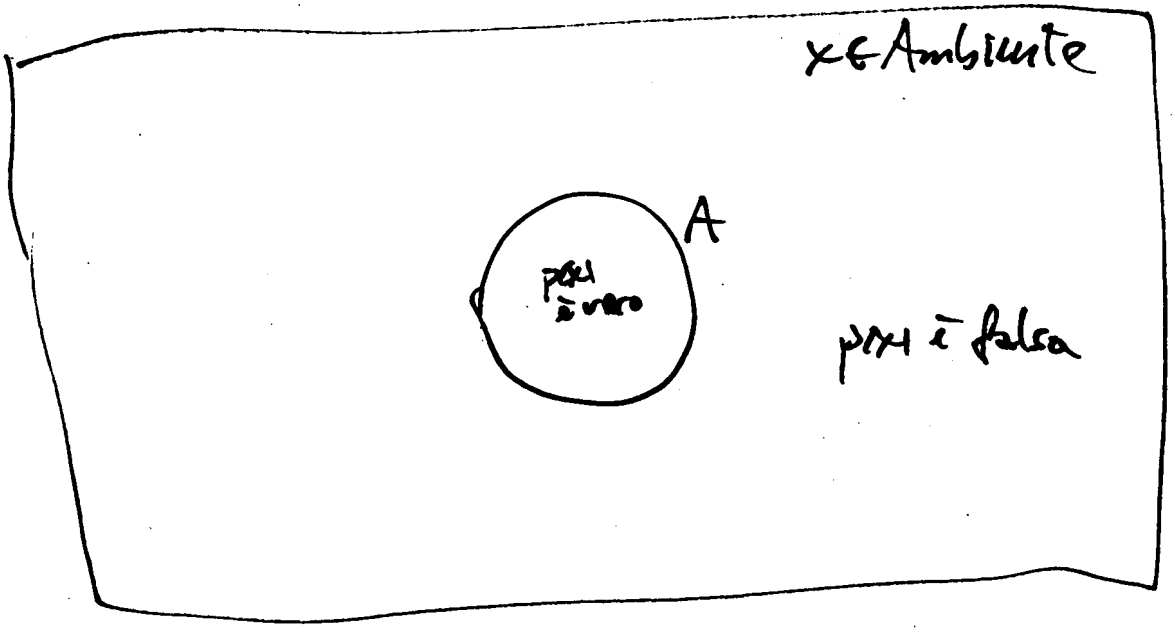


CONNETTIVI LOGICI E INSIEMI

$p(x)$, $q(x)$ sono predicati

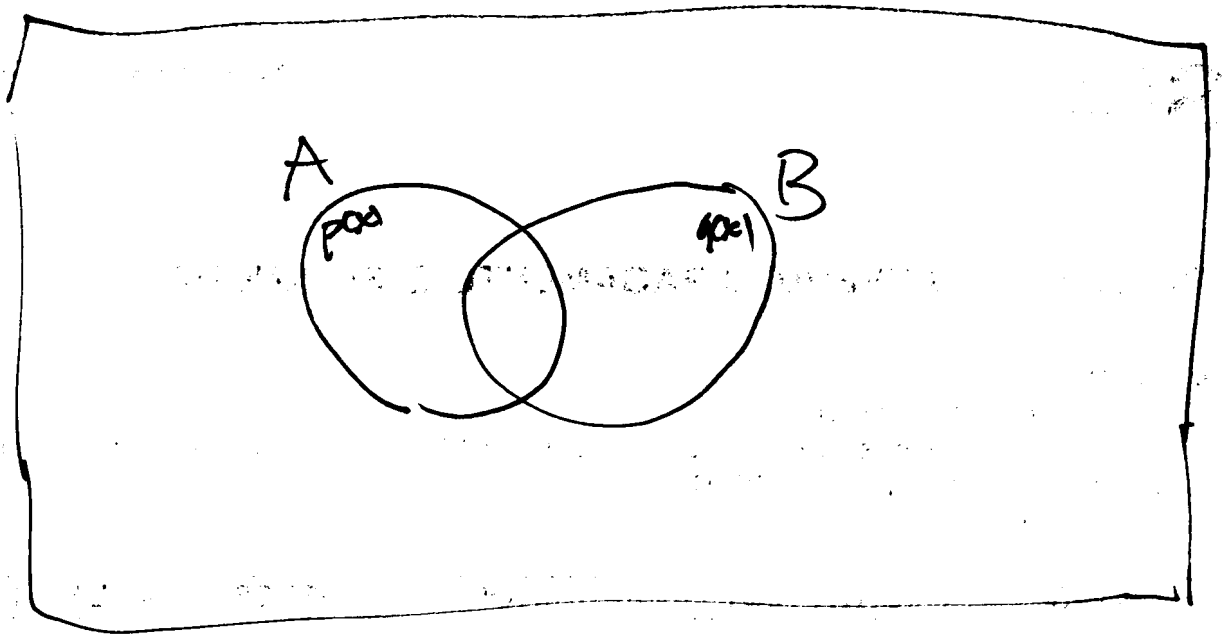
$$A = \{ x \in \text{Ambiente} \mid p(x) \}$$

$$B = \{ x \in \text{Ambiente} \mid q(x) \}$$

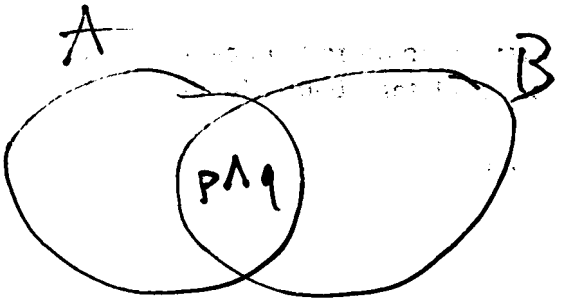


A insieme $\longleftrightarrow$ $p(x)$ predicato

$x \in A$



CONGIUNZIONE $p(x) \wedge q(x)$ a che insieme corrisponde?

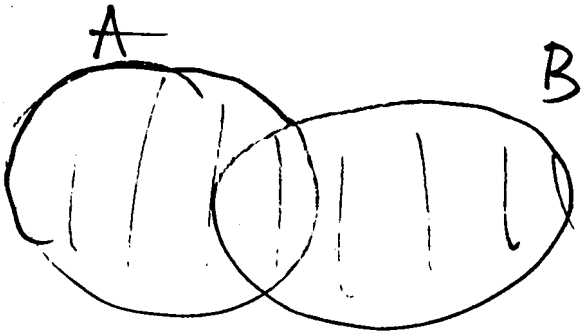


$$A \cap B = \{ x \in \text{ambiente} \mid p(x) \wedge q(x) \}$$

INTERSEZIONE $\cap$ insiemistico

$\wedge$ simbolo logico

DISGIUNZIONE $p(x) \vee q(x)$

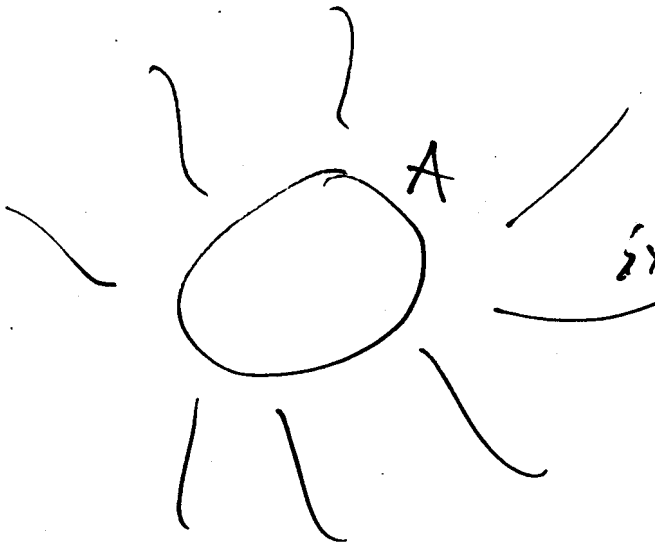


$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$

$A \cup B = \{ x \in \text{ambiente} \mid p(x) \vee q(x) \}$

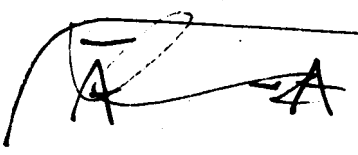
$\cup$ $\vee$

NEGAZIONE non $p(x)$



$\{ x \in \text{ambiente} \mid \text{non } p(x) \}$ è il complemento di A

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

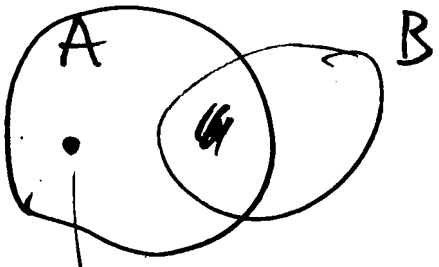


IMPLICAZIONE ?

$p(x) \Rightarrow q(x)$

supponiamo che l'implicazione sia sempre vera

es. $x > 0 \Rightarrow x > -1$
(sempre vero)



NO

~~$x \in A$ ma $x \notin B$~~

$x \in A$ può $x \notin B$

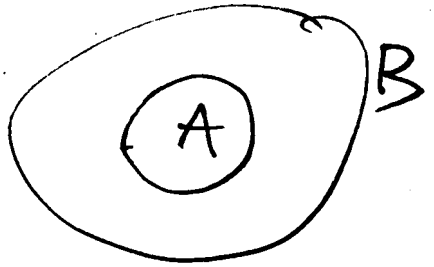
V Φ

$x \in A \Rightarrow x \in B$

vera falsa falso

Se $\Rightarrow$ è sempre vera non può succedere che $x \in A$ e $x \notin B$

Se $x \in A$, allora $x \in B$ anche



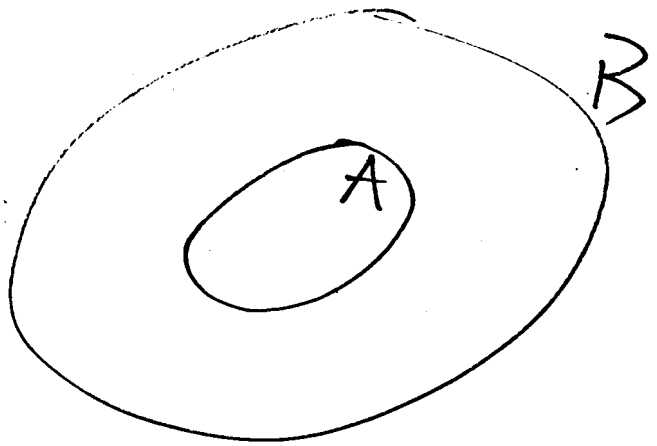
$A \subseteq B$

Una implicazione sempre vera

$$p(x) \Rightarrow q(x)$$

corrisponde all'inclusione dei due insiemi

$$\{ x \in \text{ambiente} \mid p(x) \} \subseteq \{ x \in \text{ins} \mid q(x) \}$$



$A \subseteq B$

$x \in A \Rightarrow x \in B$

ovvero i punti di A sono anche punti di B

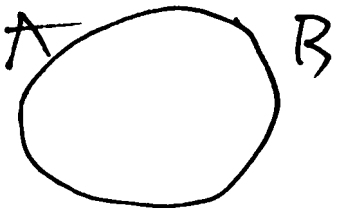
DOPPIA IMPLICAZIONE

$$p(x) \iff q(x)$$

supposta sempre vera

$$x \neq 0 \iff x^2 \neq 0$$

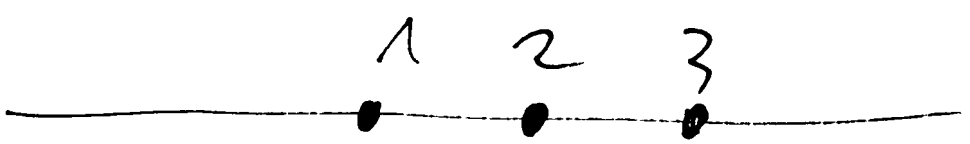
$$\{x \in Amb. \mid p(x)\} = \{x \in Amb \mid q(x)\}$$



$$x \in A \iff x \in B$$

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$$

$$n \in \mathbb{N} \iff (n \in \mathbb{Z} \wedge n \geq 0)$$



$\{1, 2, 3\}$

INSIEMI NOTEVOLI: INTERVALLI

~~(INTERVALLO)~~

Un intervallo, parlando ~~ingenuamente~~, è tutto quello nella retta sta fra due estremi

in mezzo

Più precisamente danno una caratterizzazione di tutti i tipi di intervalli con la notazioni

Intervallo chiuso e limitato

numeri reali finiti

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$$

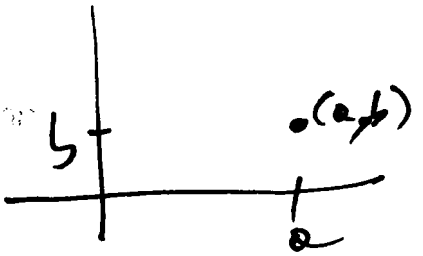
a e b specificano l'insieme, l'intervallo

Intervallo limitato ~~aperto~~ aperto

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

a e b non appartengono all'intervallo

notazione alternativa: (a, b)



Intervalli limitati semiaperti o semichiusi

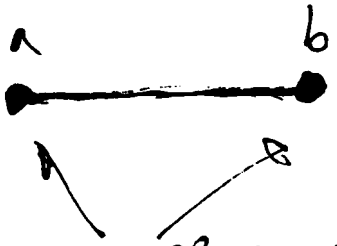
$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

alternativa $[a, b)$ $(a, b]$

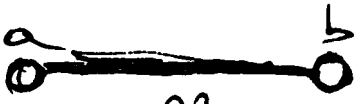
GRAFICAMENTE

$[a,b]$



pallini pieni

$]a,b[$



pallini vuoti

$[a,b[$

pieno vuoto

$]a,b]$

vuoto pieno

intervalli limitati

bounded

bound = limitazione

SEMIRETTE

$$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < +\infty\}$$

(chiusa)

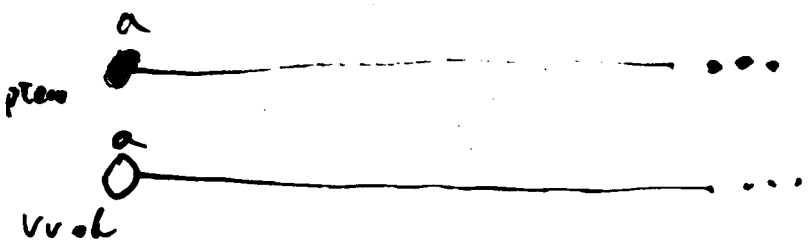
$$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

GRATICAMENTE

$[a, +\infty[$ pieno



vuoto

$]a, +\infty[$

$]-\infty, a]$

$]-\infty, a[$

$[a, +\infty)$ $\quad (a, +\infty)$

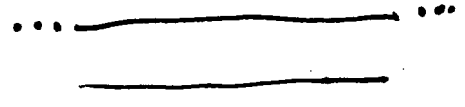
$(-\infty, a]$ $\quad (-\infty, a)$

INTERVALLI DEGENERI O IMPROPRI

$\{a\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x = a\}$

$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$



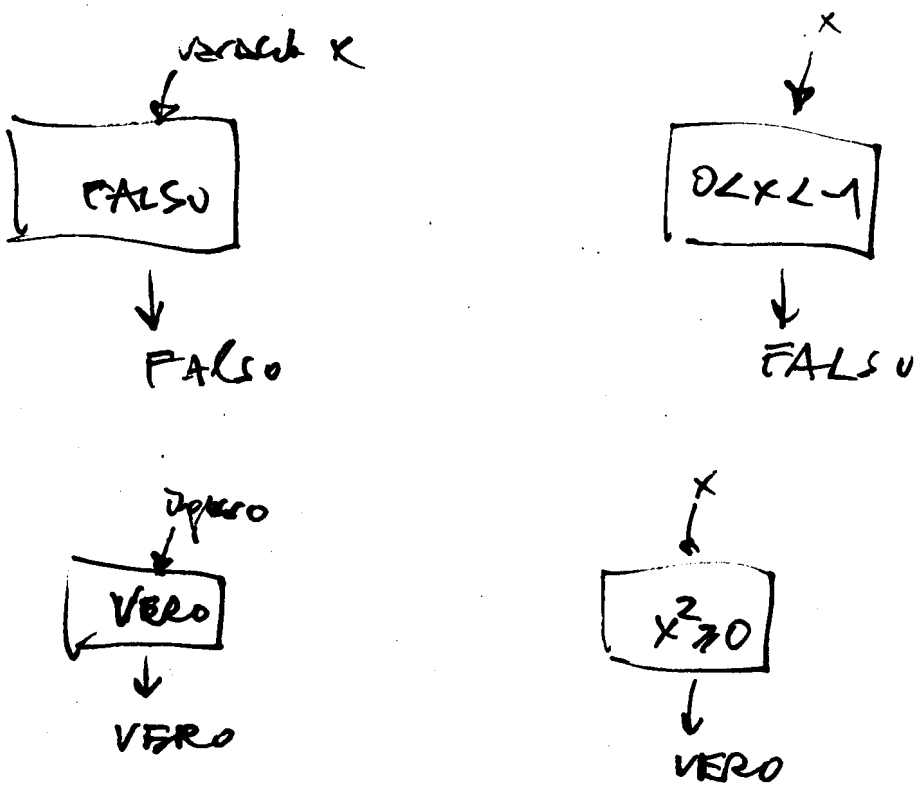
$\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{0 < x < -1}_{\text{sempre falso}}\}$

vuoto $\qquad$ 0

DUE PREDICATI PARTICOLARI

sempre vero : VERO

sempre falso : FALSO



Disequazioni sempre vere

$$x^2 + 1 > 0 \iff \text{VERO}$$

<u>ridotti:</u> $x^2 + 1 > 0$ $\forall x$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$

$x^2 + 1 > 0 \iff \forall x$

non è un predicato

$x^2 < 0$ $\quad S = \emptyset$ giusto

$S = \{\emptyset\}$ no

$\nexists x \in \mathbb{R}$

$x \notin \mathbb{R}$ ~~$x \neq 1+i$~~

$\forall x \in \phi \quad p(x)$

è vera qualque sia il predicato

$\forall x \in \phi$ x è dispari è vero

$\forall x$ $\underbrace{x \in \phi}_{\text{falso}} \Rightarrow x$ è dispari

implicazione sempre vera

$x^2 < 0 \iff x \in \phi$ vero

$x^2 < 0$ $\forall x \in \phi$ evitarlo

$x^2+1>0 \iff x \in \mathbb{R}$ giusto

$x^2+1>0 \iff \mathbb{R}$ NO

predicato

insieme non è predicato

$x^2+1>0 \quad \mathbb{R}$

$x^2+1>0 \quad S: \mathbb{R}$

$S = \mathbb{R}$

$x^2+1>0$ ~~$\{\mathbb{R}\}$~~ NO

~~$\{\forall x\}$~~ NO

$x^2+1>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ giusto

$x^2+1>0 \iff x^2>-1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x+1>0 \iff x>-1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

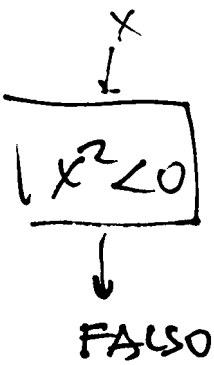
4 nov. 2020 - P. 18

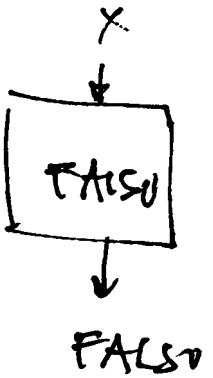
$x^2+1>0 \iff x^2>-1 \implies$ VERO

$\forall x \in \mathbb{R}$

$x^2<0 \iff$ FALSO

La diseq. non ha soluzioni





$x^2<0$ $\quad \nexists x$

$\nexists x \in \mathbb{R}$

$x^2+1<0 \iff x^2<-1$ $\quad \nexists x \in \mathbb{R}$

sempre vero

$x^2<0 \iff x \in \emptyset$ corretto

sempre falso

$x^2<0$ $\quad \emptyset$ corretto

$\emptyset$ $\quad\quad$ $]a[$

$]a,a[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < a\}$

sempre falso

$\emptyset =]0,-1[=$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < -1\}$

sempre falso

$\{a\} = [a,a]$ ok

$\emptyset = [a,a[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < a\}$

falso

Stile per le equaz / diseq

tutti predicati, connettivi: logici

$$x + 3 > 2x$$

$\Updownarrow$ trasformazione reversibile

$$3 > 2x - x$$

$\Updownarrow$

$$3 > x$$

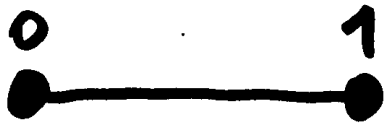
$\Updownarrow$

$$x < 3$$

$\ldots \Leftrightarrow x^2 < 0 \Leftrightarrow$ FALSO

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI INSIEMI NELLA RETTA

$[0,1]$



$]1,2[$

$[0,1] \cup]2,3[$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \ \vee \ 2 < x < 3\}$

A

$x \neq 0$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$= \mathbb{R} \setminus \{0\}$

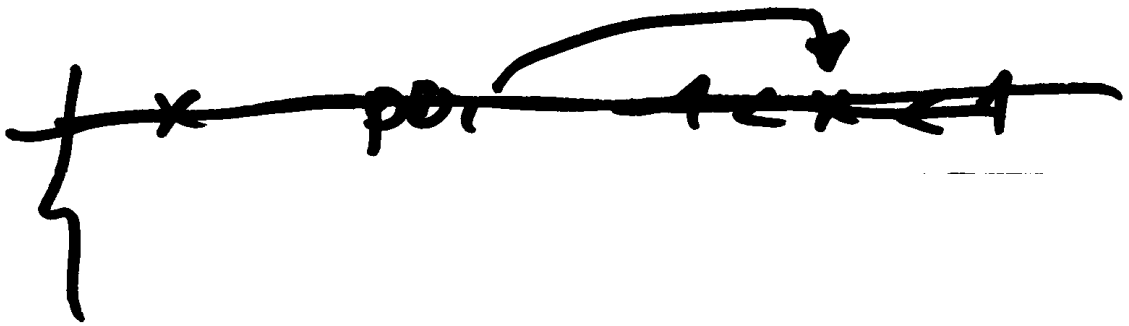
$x \neq 0 \iff (x < 0 \ \vee \ x > 0)$

VALORE ASSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

definizione per casi

$$\begin{cases} x & \text{per } x \geq 0 \\ -x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$



$x = 2$

$$|2| = \begin{cases} 2 & \text{se } 2 \geq 0 \\ -2 & \text{se } 2 < 0 \end{cases}$$

$x = -5$

$$|-5| = \begin{cases} -5 & \text{se } -5 \geq 0 \quad \text{falso} \\ -(-5) & \text{se } -5 < 0 \quad \text{vero} \end{cases}$$

$|-5| = +5$

in pratica

$|\text{numero}| =$ numero stesso se questo è positivo

$|\text{numero}| =$ opposto del numero se il numero è negativo

facile da applicare se il numero è in forma decimale

$|5{,}61| = 5{,}61$ il valore assoluto lascia come è

(+)

$|-5{,}61| = 5{,}61$ si toglie il segno −

Per i numeri decimali, se sono positivi o negativi si decide dal ± che compare all'inizio

$$|\underbrace{-2+2\sqrt{2}}| = -2+2\sqrt{2}$$

non è negativo

è positivo

Se l'espressione è simbolica

$$|-x|$$

$-x$ vuol dire l'opposto di x

ma x può essere a sua volta negativo

$$|-x| = \begin{cases} -x & \text{se } -x \geq 0 \\ -(-x) & \text{se } -x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$= |x|$$

Regola utile: b

$$|-x| = |x|$$

$$|-2+2\sqrt{2}| = |+2-2\sqrt{2}|$$

Definizione alternativa

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è equivalente

$$0 \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant 0$$

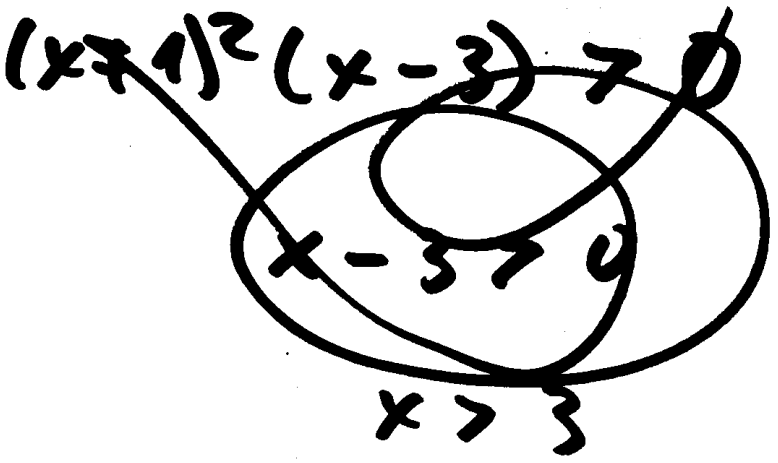
0 non è positivo

è "positivo o nullo"

positività debole

$$(x+1)^2(x-3) > 0$$

$$(x-3) > 0$$



$$(x+1)^2(x-3) < 0$$

$$x-3 < 0$$

$$x < 3$$

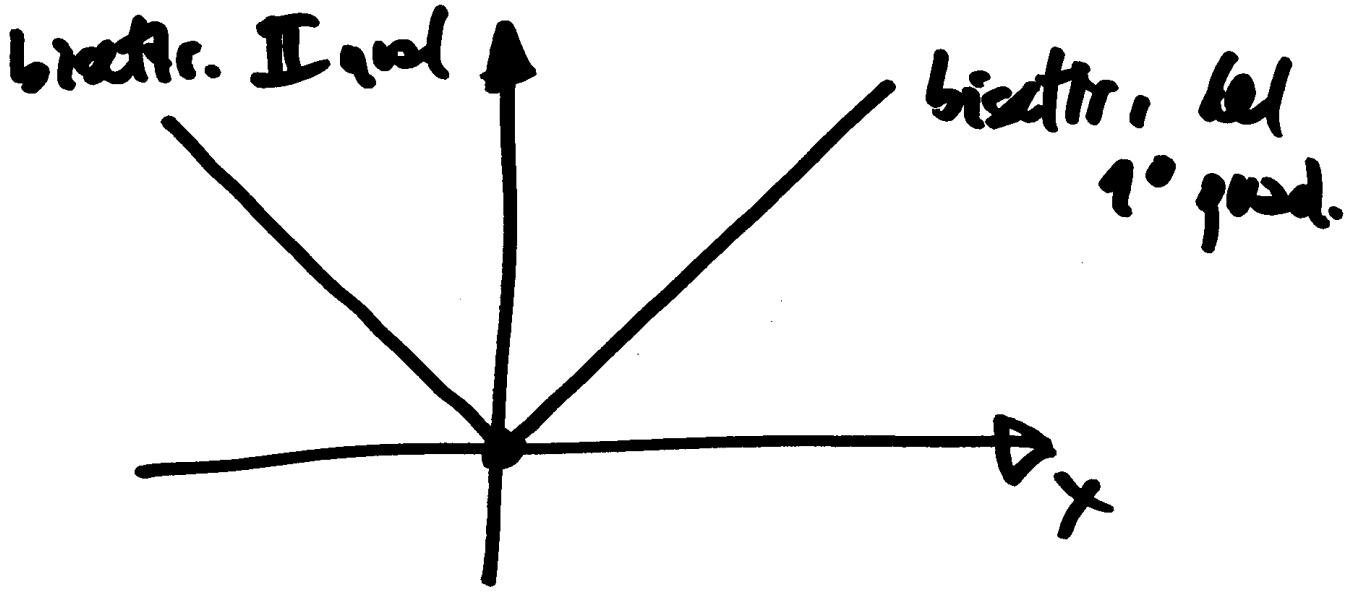
NO

$x = -1$: $0 \cdot (-4) = 0 \not< 0$

non è soluzione!

GRAFICO DEL VALORE ASSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



da ricordare

FORMULE NOTEVOLI

$|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c$

ha val. assoluto — non ch'è valore assoluto

$|x| < c \iff -c < x < c$

$|x| \geq c \iff x \leq -c \ \vee \ x \geq c$

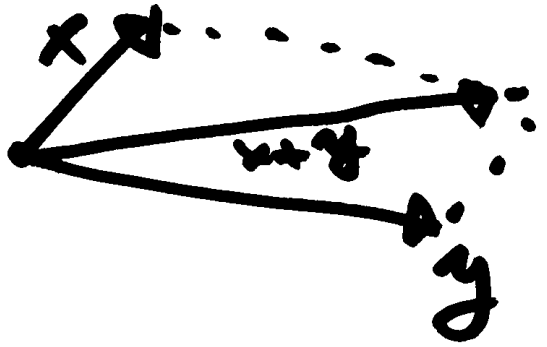
$|x| > c \iff x < -c \ \vee \ x > c$

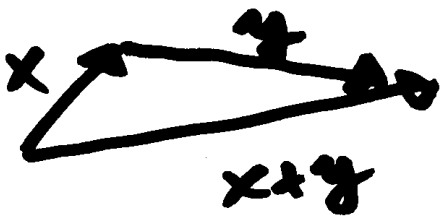
$-|x| \leq x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

DISUGUAGLIANZA <u>TRIANGOLARE</u>

$|x+y| \leq |x| + |y|$

in generale <u>non</u> sono uguali





ogni lato di un triangolo
è $\leq$ alla somma
degli altri due

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$|xy| = |x| \cdot |y|$$

il valore assoluto di un prodotto è uguale al prodotto dei valori assoluti

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

triang. il valore assoluto di una somma è $\leq$ alla somma dei valori assoluti

$$|2x| = |2| \cdot |x| = 2|x|$$

$$|-2x| = |-2| \cdot |x| = 2|x|$$

INTERPRETAZIONE GEOM. DEL VALORE ASSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$|x|$ si può interpretare come la distanza di x dallo zero, dall'origine

se $x \geq 0$ distanza di x da 0 è uguale a x

se $x < 0$ la distanza di x da 0 è $-x$

in generale $|x|$ è la distanza di x dall'origine
(vale sia per i positivi che per i negativi)

ESTENSIONE

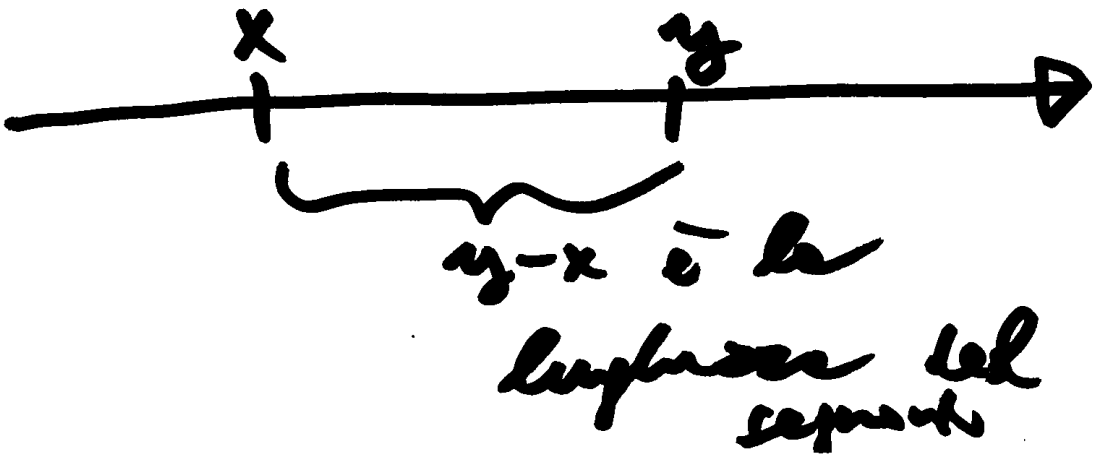
$|x-y|$ interpr. geom.?

1° caso $x < y$

$$|\underbrace{x-y}_{<0}| = -(x-y) =$$

$$= -x+y =$$

$$= y-x$$



oppure, $y-x$ è la distanza fra x e y

2° caso $x > y$

$$|\underbrace{x-y}_{>0}| = x-y$$

Silvia 2020 - p. 12

$x-y$ è la lunghezza del segmento

ossia è la distanza fra x e y

IN ENTRAMBI I CASI

$|x-y|$ è la lunghezza del segmento che congiunge x con y,

oppure, la distanza fra x e y

3° caso banale $x = y$

$$|x - y| = 0$$

CONCLUSIONE

$|x-y|$ è la distanza fra x e y

= la lunghezza del segmento che congiunge x con y

oss scambiando x con y il risultato non cambia

$$|x-y| = |y-x|$$

$x-y$ $\quad$ $y-x$

non sono uguali

(sono opposti)

NOTAZIONE

$|x|$ due simboli verticali

Weierstrass '80

notazione ambigua

(x) $[\,]$ $\{\}$

$(x + (y - z))$

$|$ è aperta o chiusa?

$|x|$

$|x|y|z|$ < $|x|y|z|$, $|x|y|z|$

sono Liner

abs(x)

abs(x) · y · abs(z)

abs(x abs(y) z)

Disequazioni con valori ass.

$$|x-1| > 3$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 \text{ se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) \text{ se } x-1 < 0 \end{cases}$$

$$|x-1| > 3 \iff$$

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ |x-1| > 3 \end{cases} \text{ Ann} \quad \vee \quad \begin{cases} x-1 < 0 \\ |x-1| \geq 3 \end{cases} \text{ Ann}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 > 3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x-1 < 0 \\ -(x-1) \geq 3 \end{cases}$$

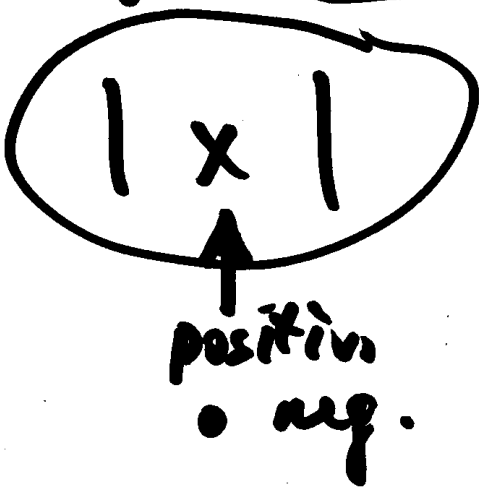
I sconplessi il valore ass.

VALORE ASSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Regola: $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Non confondere il fatto che $|x| \geq 0$ con il segno di x



DISEQUAZIONI CON VAL. AS.

$|x+1| > x$ proposta

$\Updownarrow$ equiv. logica

forma normalizzata
combinazione di disug. col tipo

$x >$ costante — numero
$<$
$=$
$\geq$
$\leq$

variabile in sito

combinazionale
logica
OR AND

ESEMPIO

$|x+1| > x$

Strategia

forma normalizzata

Primo passo:
far scomparire il $|\cdot|$
usando la def.

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & \text{se } x+1 < 0 \end{cases}$$

metodo ricorsivo:

$$|x+1| > x$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ |x+1| > x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x+1 < 0 \\ |x+1| > x \end{cases}$$

$$\Updownarrow \text{ togliere } |\cdot|$$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1 > x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x+1 < 0 \\ -(x+1) > x \end{cases}$$

$$\Updownarrow \text{ risolvere}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ 1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -1 \\ -x - 1 > x \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

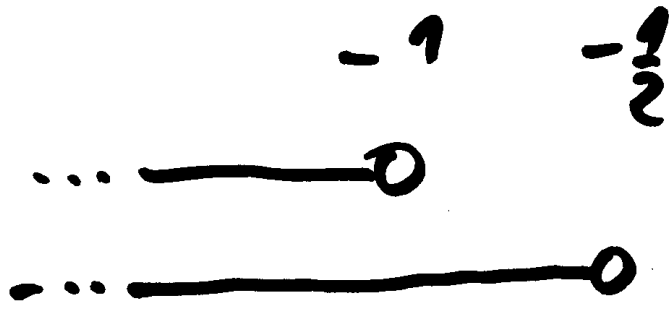
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ \text{VERO} \end{cases} \vee \begin{cases} x < -1 \\ -1 > 2x \end{cases}$$

AND

$$\Updownarrow$$

$$x \geq -1 \quad \vee \quad \begin{cases} x < -1 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

AND



intors.

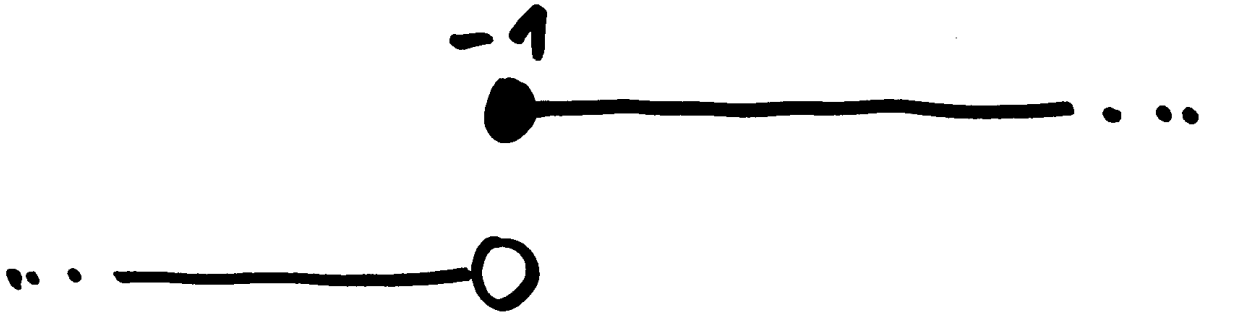
11 nov. 2020 - p. 5

$\Updownarrow$

$x \geq -1 \quad \vee \quad x < -1$

è normalizzata

si può scrivere



unione

$\Updownarrow$

$x \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$

VERO

$$|x+1| > x$$

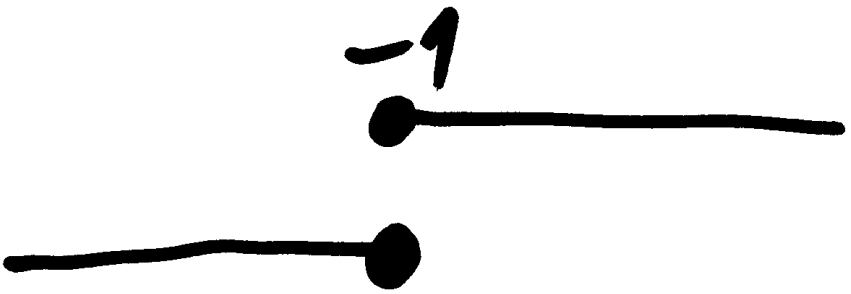
$\Updownarrow$

VERO

non esclusive

$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1 > x \end{cases}$ $\vee$ $\begin{cases} x+1 \leq 0 \\ -(x+1) > x \end{cases}$

GIUSTO



unione

Se imposto dall'inizio condizioni esclusive

$\geq$ $<$

l'unione alla fine non può avere punti in comune.

se per trovo trovo una sol. in comune, sicuramente ho sbagliato da qualche parte

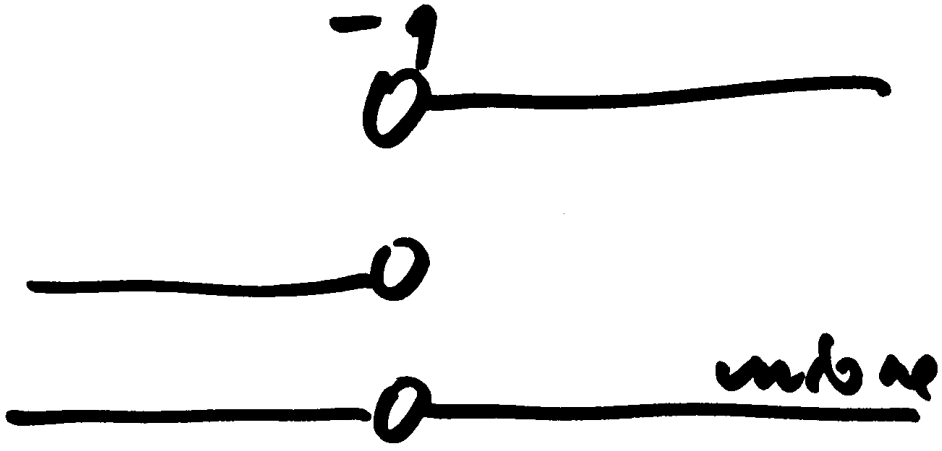
SBAGLIATO

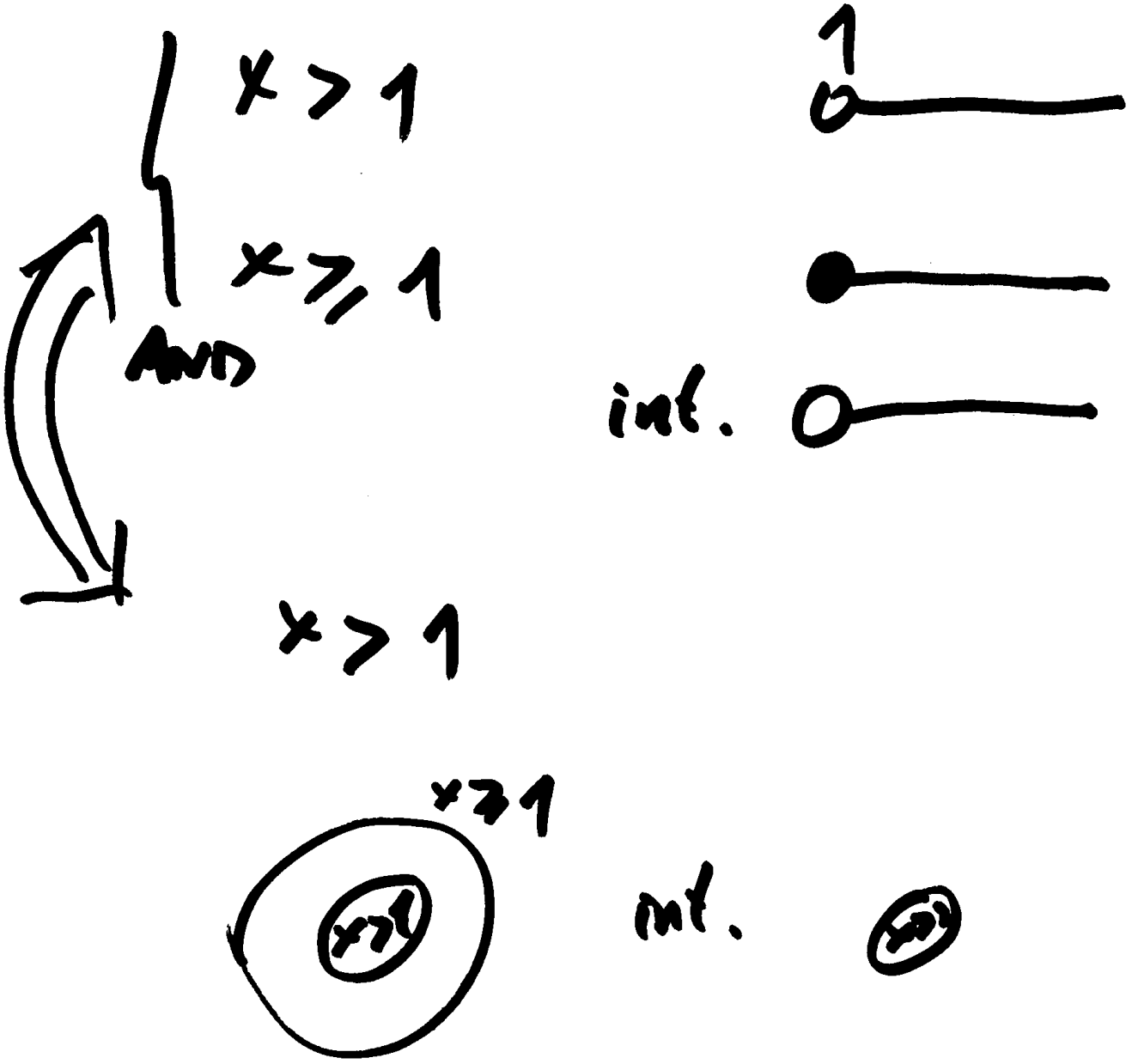
$$\begin{cases} x+1>0 \\ \vee \\ x+1<0 \end{cases}$$

lascia fuori il caso

$$x+1=0$$

$$x \neq -1$$




x > 1
x ≥ 1
AND
1
int.
x > 1
x ≥ 1
int.

ALTRO ESEMPIO

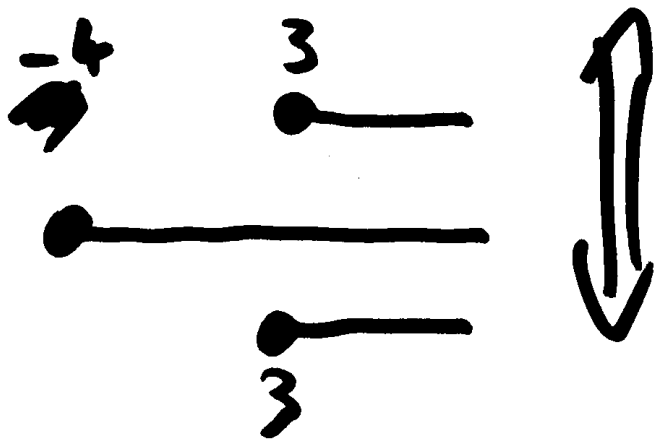
$$|x-3| \leq 2x+1$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-3 \leq 2x+1 \end{cases} \vee \begin{cases} x-3 < 0 \\ -(x-3) \leq 2x+1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ -4 \leq x \end{cases} \vee \begin{cases} x < 3 \\ -x+3 \leq 2x+1 \end{cases}$$

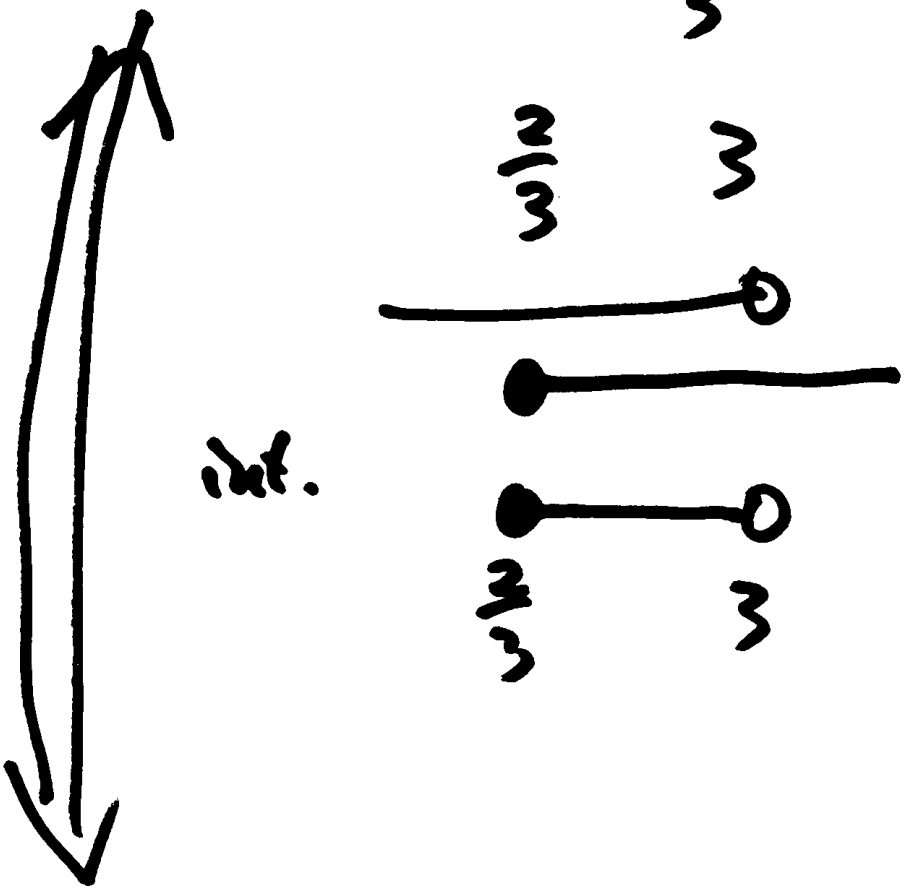


$\Updownarrow$

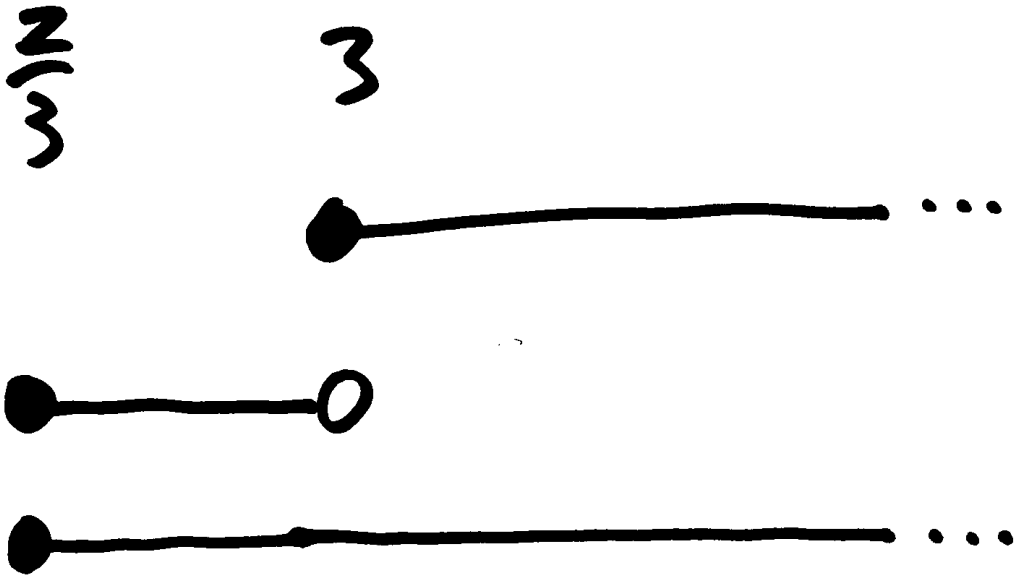
intersez.

$$x \geq 3 \vee \begin{cases} x < 3 \\ 2 \leq 3x \end{cases}$$

$x \geq 3 \quad \vee \quad \begin{cases} x < 3 \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$



$x \geq 3 \quad \vee \quad \frac{2}{3} \leq x < 3$



union

$\Updownarrow$

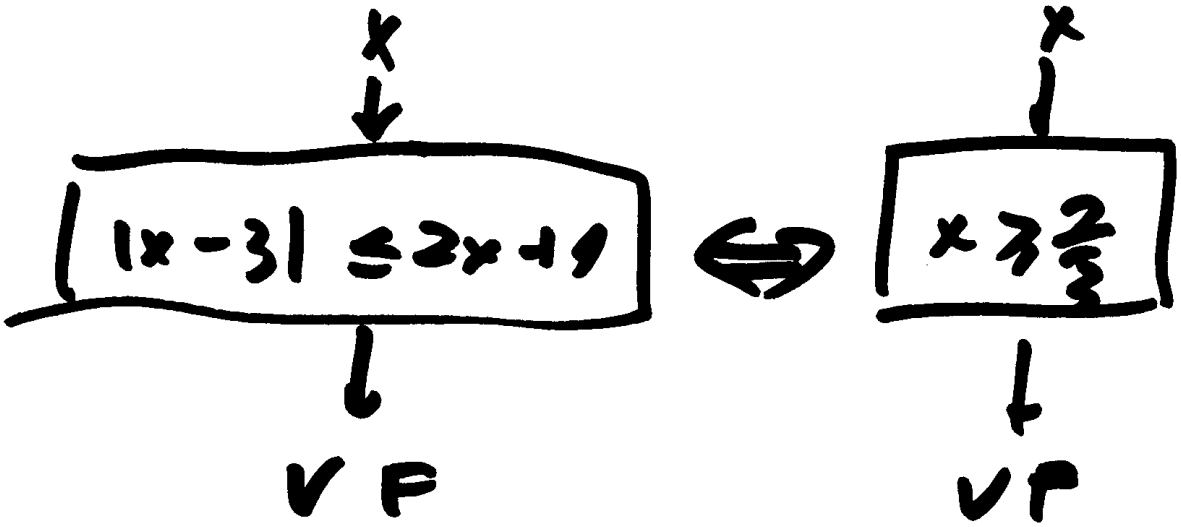
$x \geq \frac{2}{3}$

Riassunto:

$$|x-3| \leq 2x+1$$

$\Updownarrow$

$x \geq \frac{2}{3}$



Esempio

$$|x-1|+|2-x|>+2$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$x-1 \gtrless 0 \qquad 2-x \gtrless 0$$

4 possibili combinazioni

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ \dots \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x < 0 \\ \dots \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ \dots \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 < 0 \\ 2-x < 0 \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{matrix} + & + \\ + & - \\ - & + \\ - & - \end{matrix}$$

11 nov. 2020 - p. 1k

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \\ 1 > 2 \end{cases}$$ FALSO

$$\vee \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 2 \\ x - 1 - 2 + x > 2 \end{cases}$$

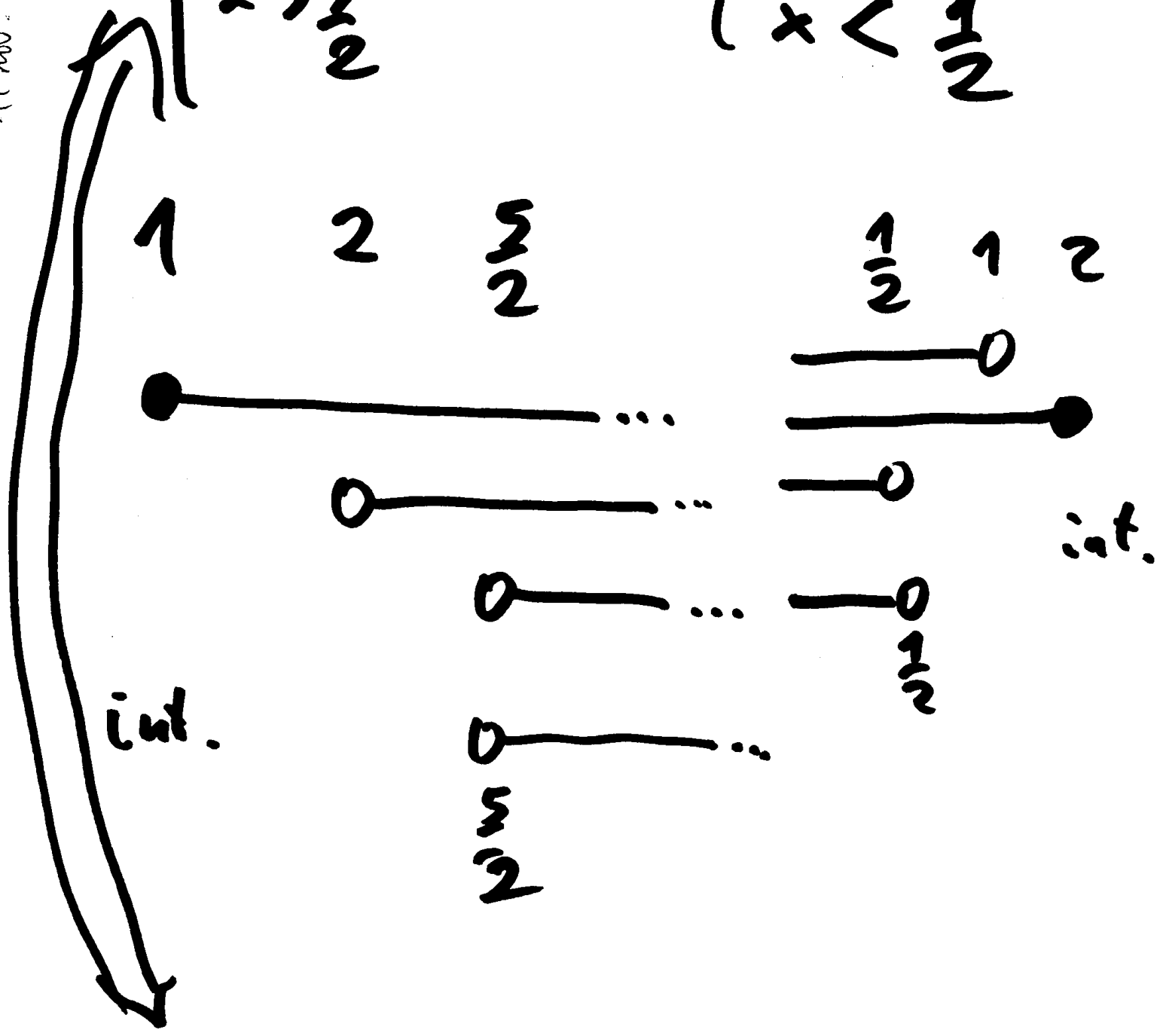
$$\vee \begin{cases} x < 1 \\ x \leq 2 \\ -x + 1 + 2 - x > 2 \end{cases} \qquad \vee \begin{cases} x < 1 \\ x > 2 \\ -x + 1 - 2 + x > 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{FALSO} \vee \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 2 \\ 2x > 5 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} x < 1 \\ x \leq 2 \\ -2x > -1 \end{cases} \qquad \vee \begin{cases} x < 1 \\ x > 2 \\ -1 > 2 \end{cases}$$ FALSO

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x > 2 \\ x > \frac{5}{2} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 1 \\ x \leq 2 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$x > \frac{5}{2} \quad \vee \quad x < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{2} \quad \vee \quad x > \frac{5}{2}$$

11 nov. 2020 - p 16

$$S =]-\infty, \tfrac{3}{2}[\cup]\tfrac{5}{2}, +\infty[$$

Continuo a x - 1

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1+|2-x|>2 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1<0 \\ -(x-1)+|2-x| \\ >2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ x-1+2-x>2 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x<0 \\ \cancel{\text{illegible}} \\ x-1-(2-x)>2 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} x-1<0 \\ 2-x \geq 0 \\ -(x-1)+2-x>2 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1<0 \\ 2-x<0 \\ -(x-1)-(2-x)>2 \end{cases}$$

esempio

$$|x - |2x-1|| < x$$

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ |x-(2x-1)| < x \end{cases} \vee \begin{cases} 2x-1 < 0 \\ |x-(-(2x-1))| < x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ |x-2x+1| < x \end{cases} \vee \begin{cases} 2x-1 < 0 \\ |x+2x-1| < x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ |-x+1| < x \end{cases} \vee \begin{cases} 2x-1 < 0 \\ |3x-1| < x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ -x+1 \geq 0 \\ -x+1 < x \end{cases} \vee \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ -x+1 < 0 \\ -(-x+1) < x \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} 2x-1 < 0 \\ 3x-1 \geq 0 \\ 3x-1 < x \end{cases} \vee \begin{cases} 2x-1 < 0 \\ 3x-1 < 0 \\ -(3x-1) < x \end{cases}$$

massimi e minimi fra un numero finito di numeri

$\max\{x, y\}$ = il più grande fra i due

$$= \begin{cases} x & \text{se } x \geq y \\ y & \text{se } x < y \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x & \text{se } x \geq y \\ y & \text{se } x \leq y \end{cases}$$

$$\max\{-1, 5\} = 5$$

$\min\{x, y\}$ = il più piccolo

$$= \begin{cases} x & \text{se } x \leq y \\ y & \text{se } x > y \end{cases}$$

$\max\{x,y,z\}$ = il più grande dei tre

$$= \begin{cases} x & \text{se } x \geq y \wedge x \geq z \\ y & \text{se } y \geq x \wedge y \geq z \\ z & \text{se } z \geq x \wedge z \geq y \end{cases}$$

---

disequazioni con max. min

$$\max\{x, 2x-1\} < 3$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 2x-1 \\ x < 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 2x-1 \\ 2x-1 < 3 \end{cases}$$

$$\vdots$$

11 nov. 2020 - p. 22

$$\left| x - \min\{2x, -3\} \right| < 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x \geq -3 \\ |x-(-3)|<1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x < -3 \\ |x-2x|<1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x \geq -3 \\ |x+3|<1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x < -3 \\ |-x|<1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x \geq -3 \\ x+3 \geq 0 \\ x+3<1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x \geq -3 \\ x+3<0 \\ -(x+3)<1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x<-3 \\ -x \geq 0 \\ -x<1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x<-3 \\ -x<0 \\ -(-x)<1 \end{cases}$$

11 nov. 2020 - p. 23

| |

\left \right

$1 + |-3|$

$+ |-3|$ giusto

$+ 1 - 3|$ sbagliato

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq y \\ y & \text{se } x < y \end{cases}$$

$$\min\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{se } x \leq y \\ y & \text{se } x > y \end{cases}$$

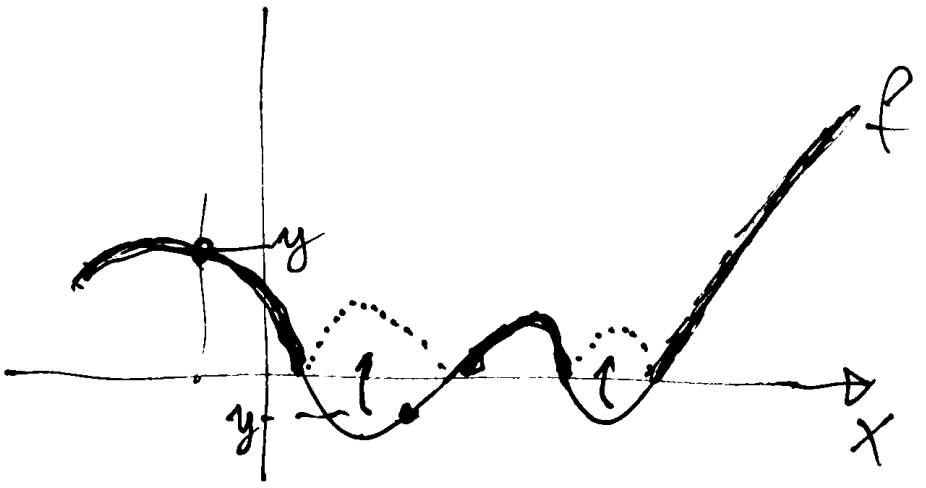
Relazioni notevoli

~~$|x| = \max\{x, 0\}$~~

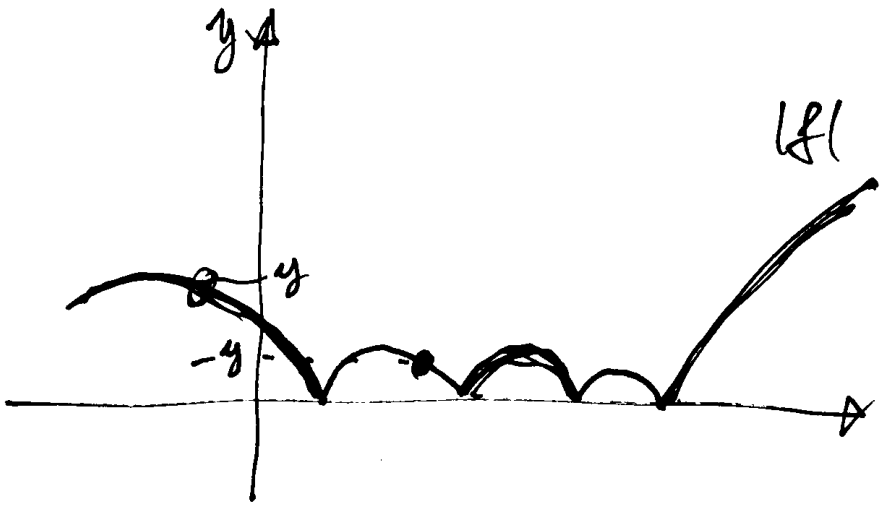
$|x| = \max\{x, -x\}$

$\max\{x, y\} = \dfrac{|x+y| - |x-y|}{2}$??

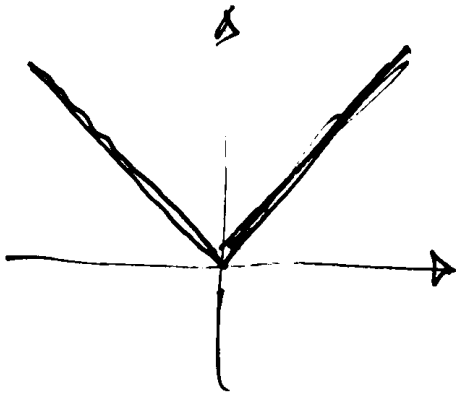
Dato il grafico di una funzione $f(x)$, trovare il grafico di $|f(x)|$

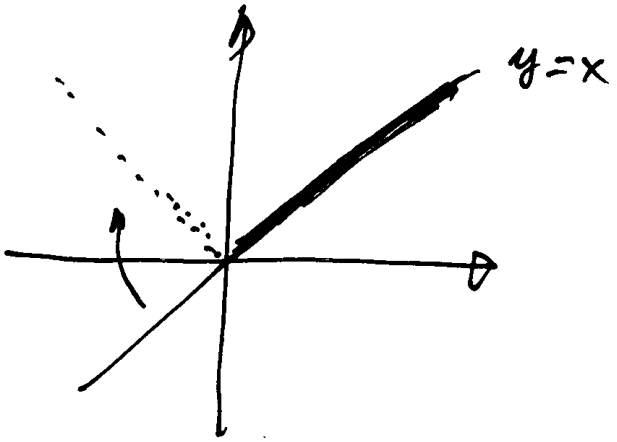


$|f|$?



$$|y| = \begin{cases} y & \text{se } y \geq 0 \\ -y & \text{se } y < 0 \end{cases}$$



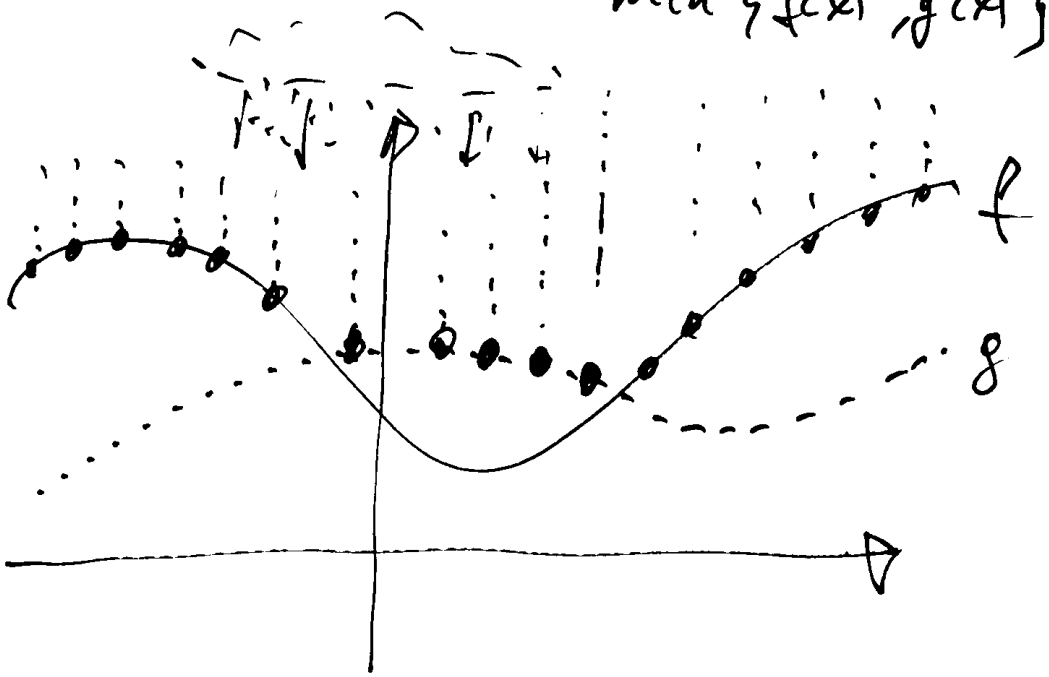


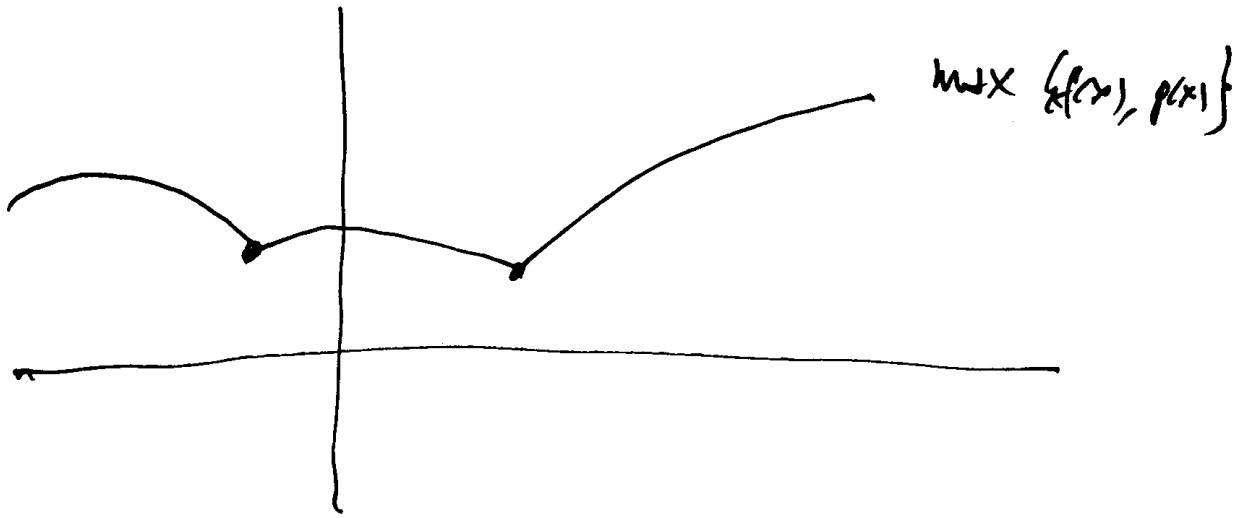
Esercizio: $f \dots f(|x|)$

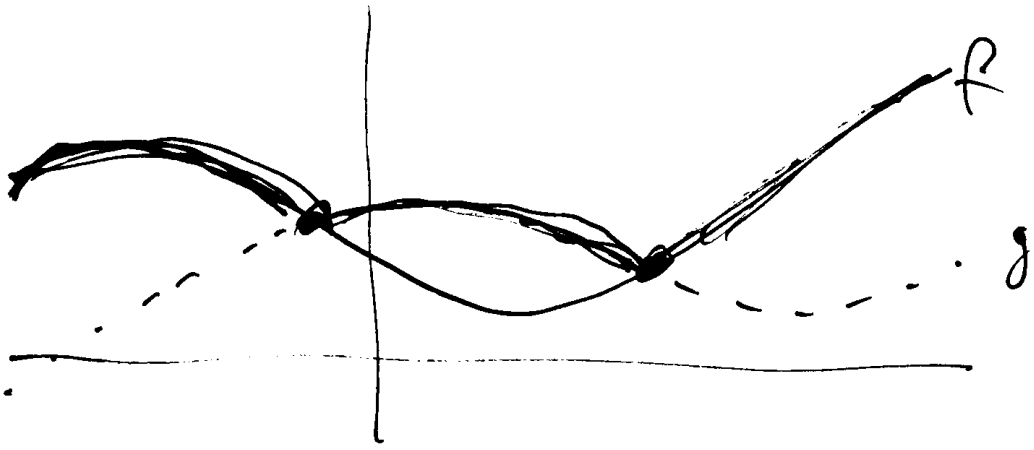
Date due funzioni $f(x)$ $g(x)$ con grafici noti

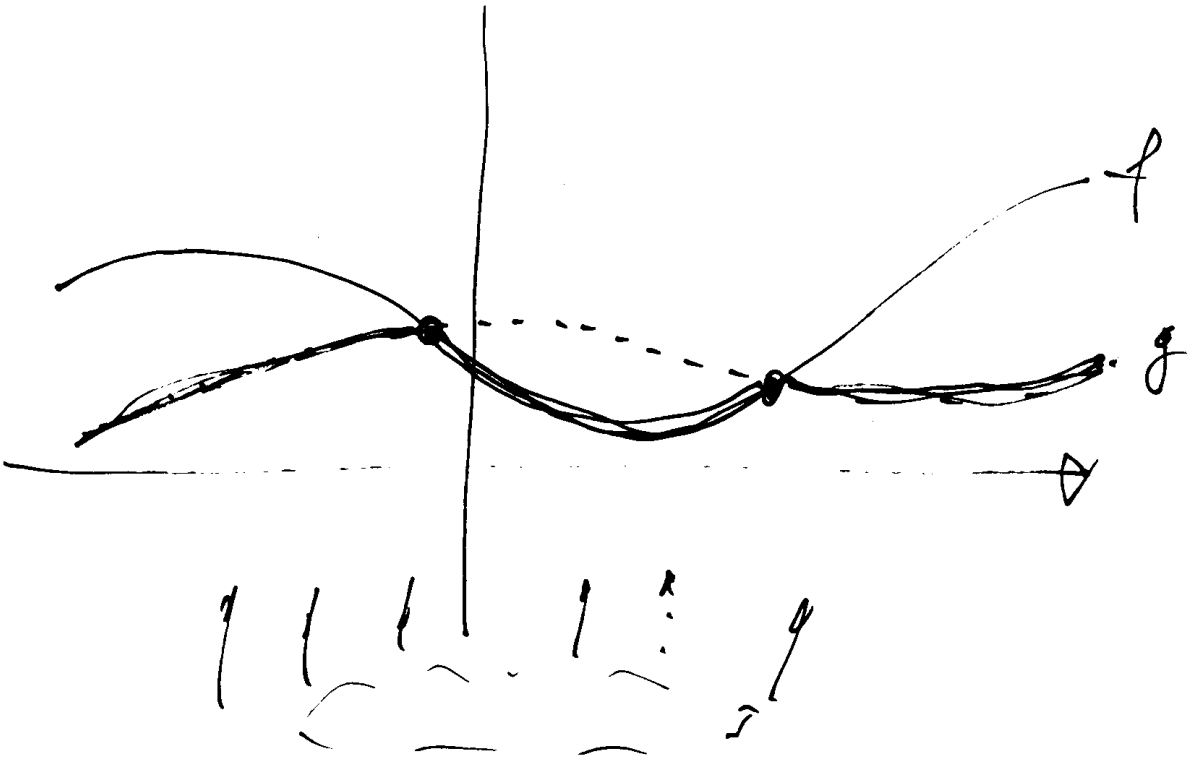
trovare il grafico di $\max\{f(x), g(x)\}$

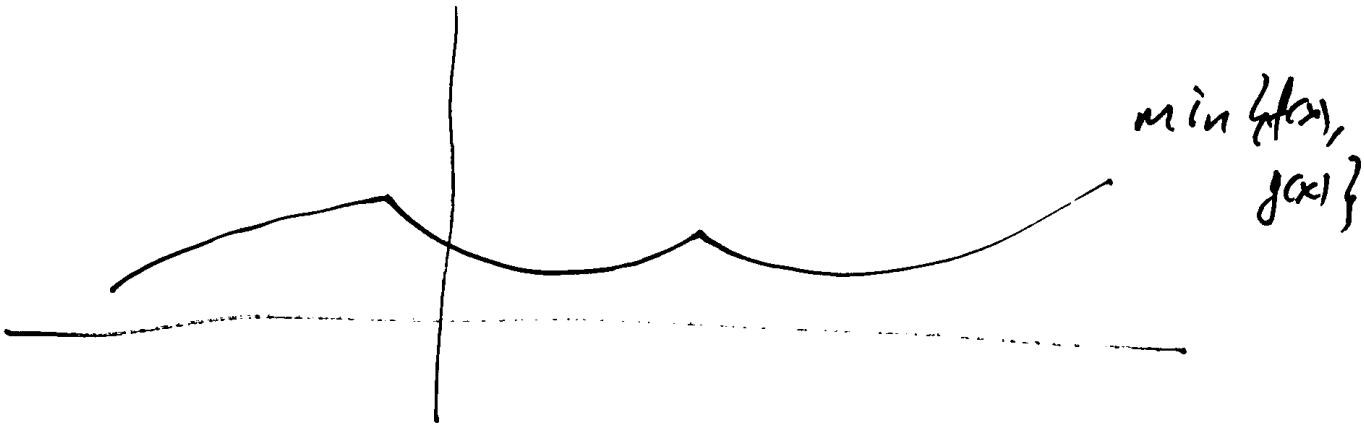
$\min\{f(x), g(x)\}$



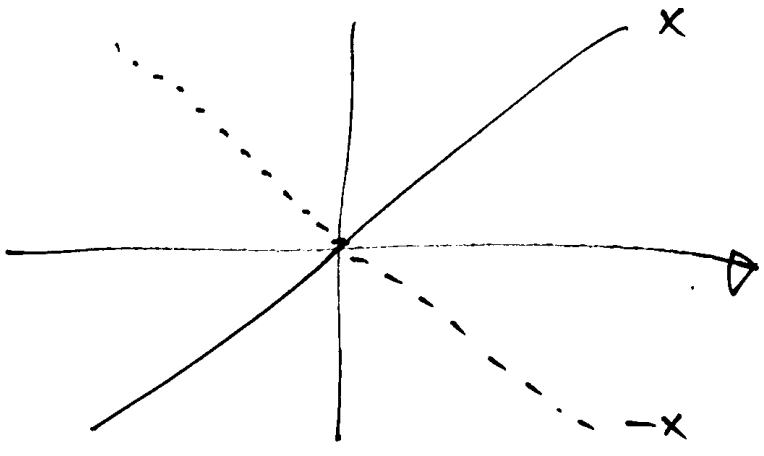


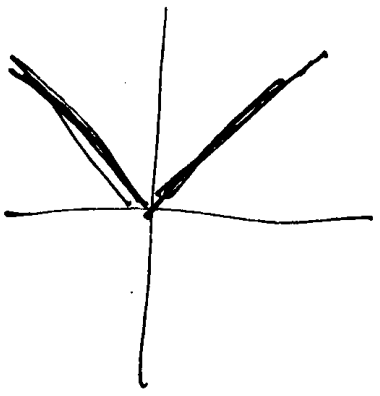




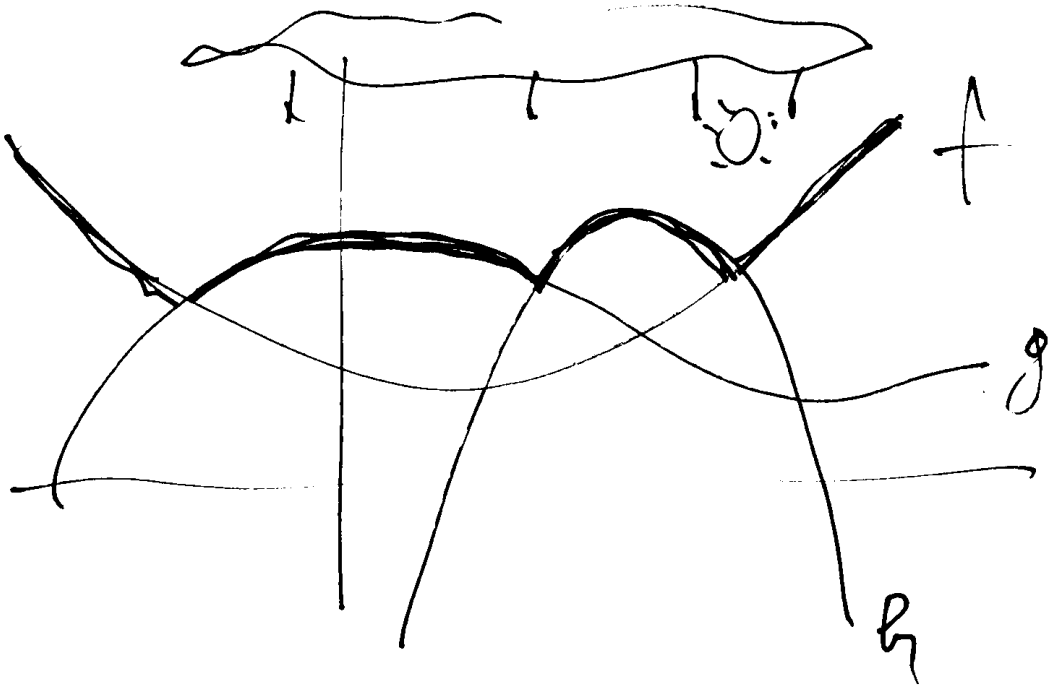


$$|x| = \max\{x, -x\}$$



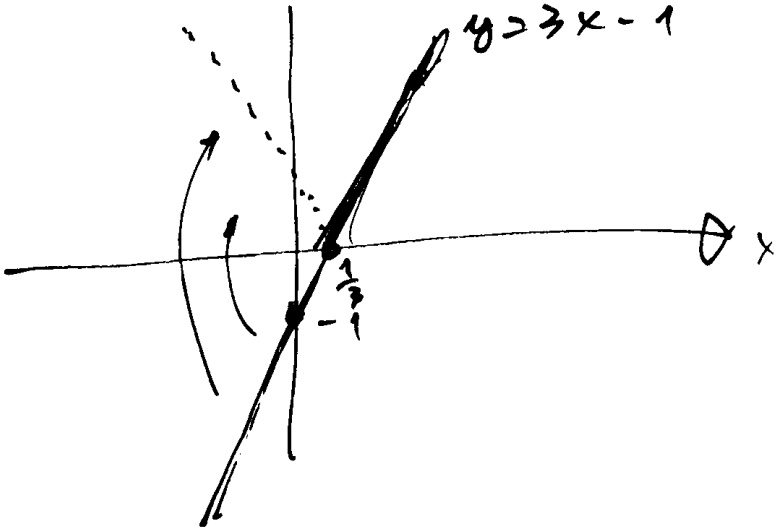


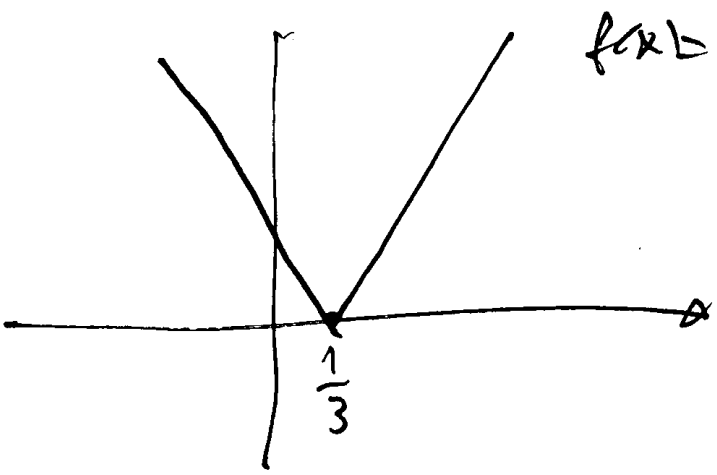
$\max\{f(x), g(x), h(x)\}$



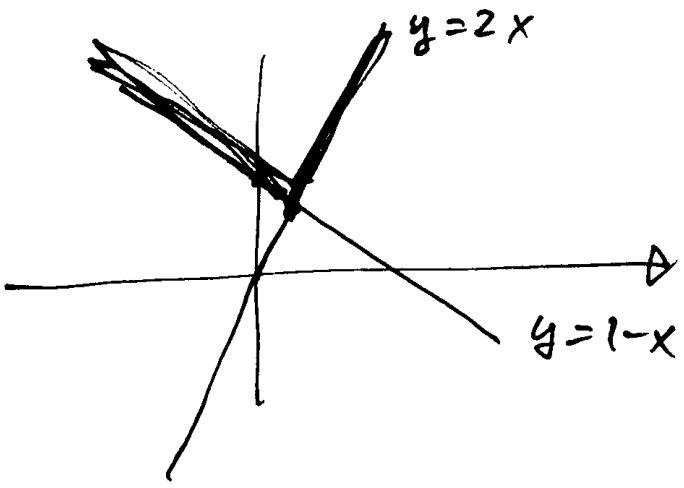
$f(x) = |3x - 1|$

$y = 3x - 1$

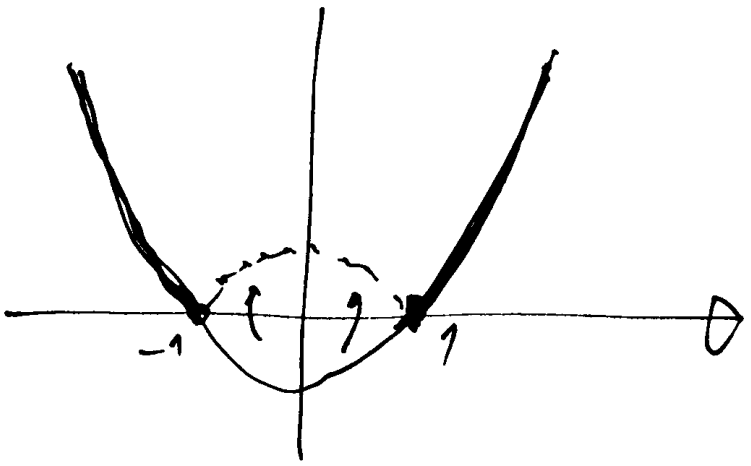




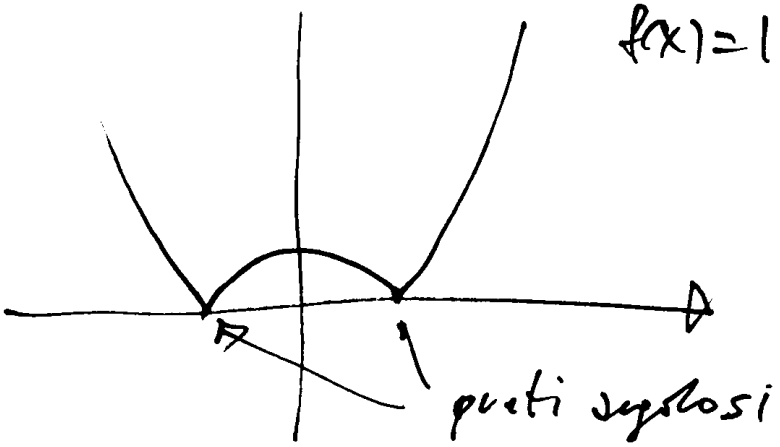
$f(x) = \max\{2x, 1-x\}$



$f(x) = |x^2 - 1|$



$y = x^2 - 1$



$f(x) = |x^2 - 1|$

FUNZIONE SEGNO

$$\operatorname{Sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

← controverso

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

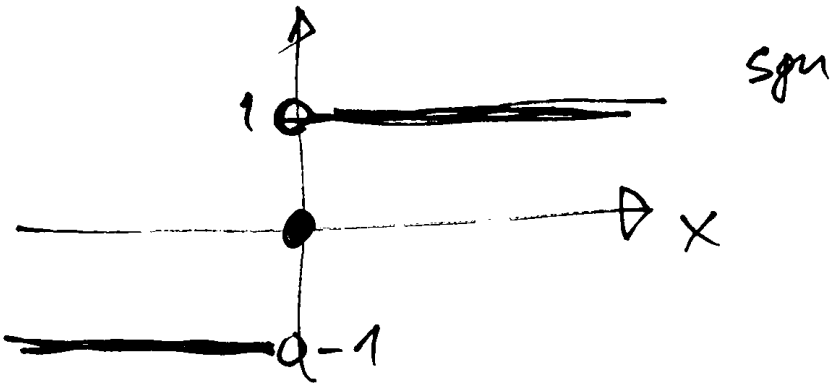
Per me $\operatorname{sgn}(0) = 0$

Per altri $\operatorname{sgn}(0) = 1$

CI SONO TRE SEGNI + − 0

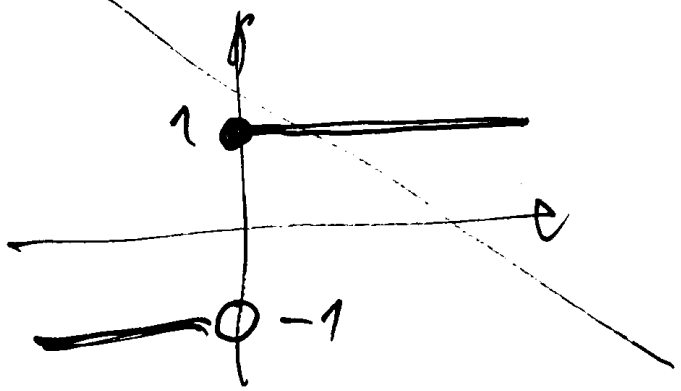
VANNO TENUTI DISTINTI

GRAFICO DEL SEGNO



12 nov. 2020 - p. 9

versione alternativa

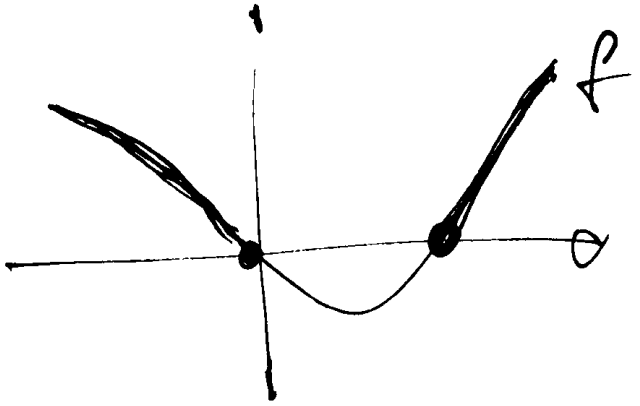


formule notevoli

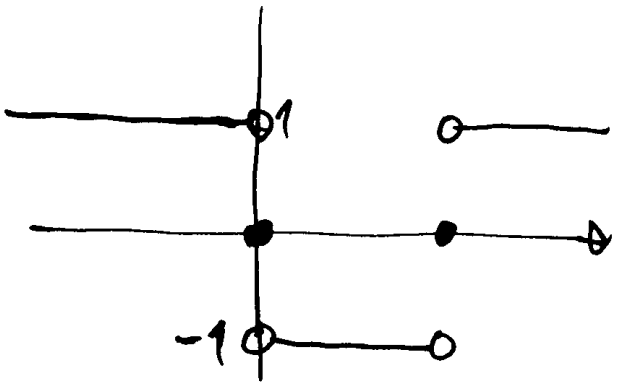
$$|x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} \quad \text{se } x \neq 0$$

$$= \frac{|x|}{x} \quad \text{se } x \neq 0$$



sgn f ?



sgn f

PARTE INTERA (FLOOR)

- CASO DI NUMERI POSITIVI IN FORMA DECIMALE

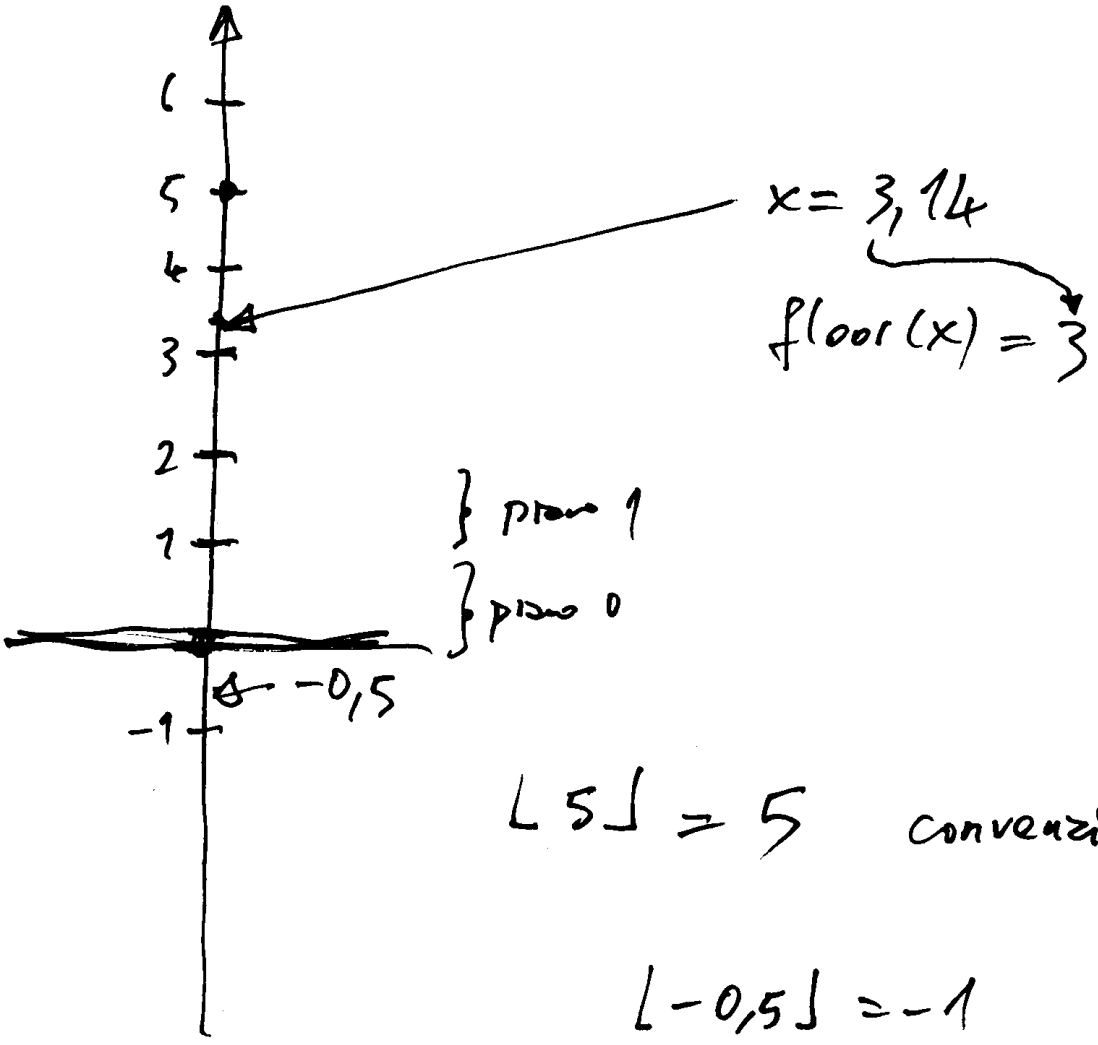
$x = 11,784...$

$\lfloor x \rfloor = 11$

si cancella tutto quello che segue la virgola

tradizione italiana $[x]$

floor(x)



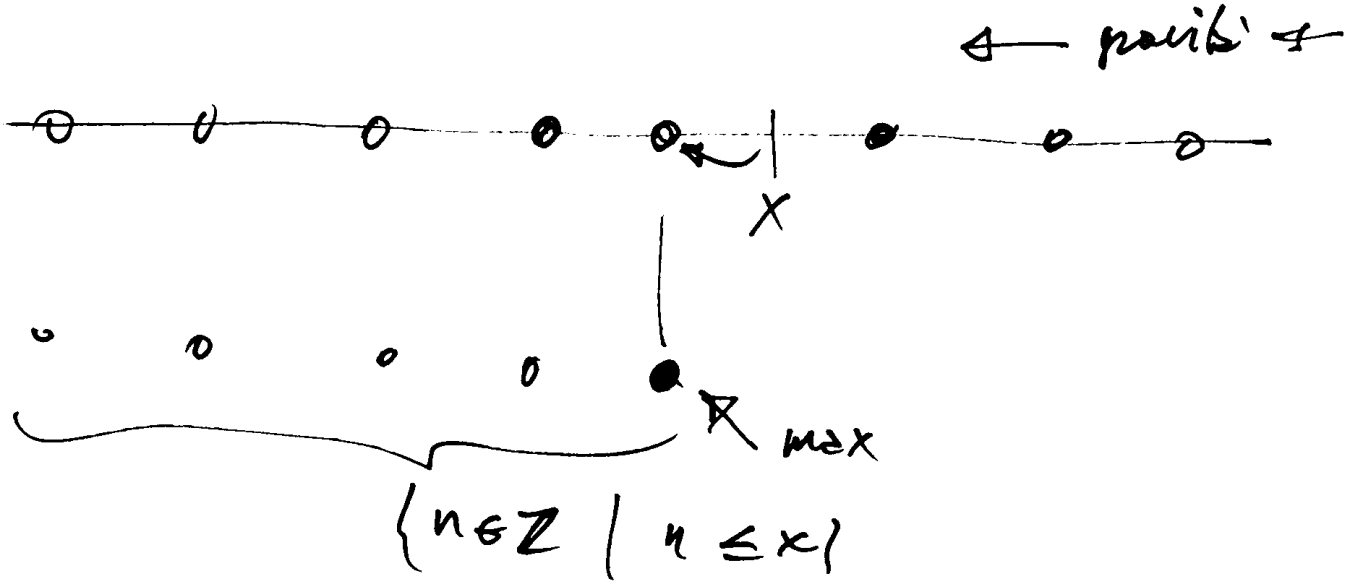
$\lfloor 5 \rfloor = 5$ convenzione

$\lfloor -0,5 \rfloor = -1$

Simbolicamente

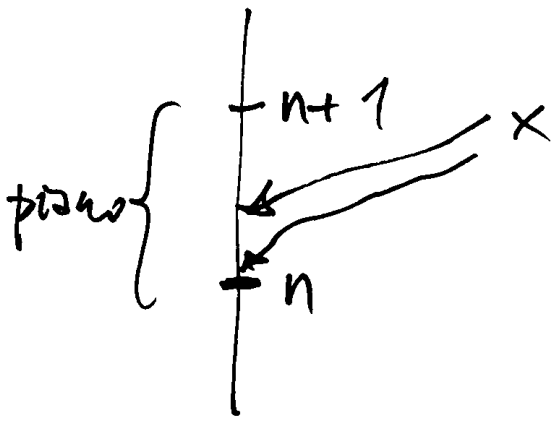
$\lfloor x \rfloor$ è il più grande numero intero ($\mathbb{Z}$) che è $\leq$ di x

$$\lfloor x \rfloor = \max \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \}$$



$\lfloor x \rfloor$ è l'unico $n \in \mathbb{Z}$ tale che

$$n \leq x < n+1$$

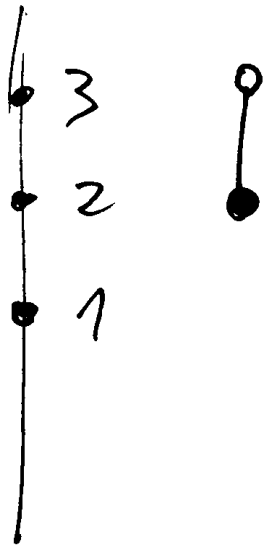


$\lfloor 1 \rfloor$ = il più grande numero in $\mathbb{Z}$ che è $\leq$ di 1

$= 1$

$\lfloor -3 \rfloor = -3$

$\lfloor$ numero intero $\rfloor$ = numero intero stesso



$\lfloor 0,\overline{999} \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$

$\lfloor 1,\overline{000} \rfloor = 1$

Soffitto

$\lceil x \rceil$ = il più piccolo numero intero ($\mathbb{Z}$) che è $\geq$ di x

proprietà notevoli

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$$

$$\lfloor n \rfloor = n = \lceil n \rceil \quad \text{se } n \in \mathbb{Z}$$

Se $x \notin \mathbb{Z}$ $\quad \lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$

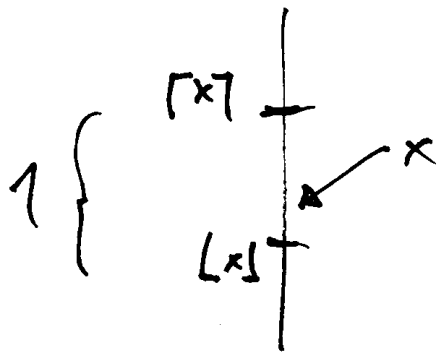
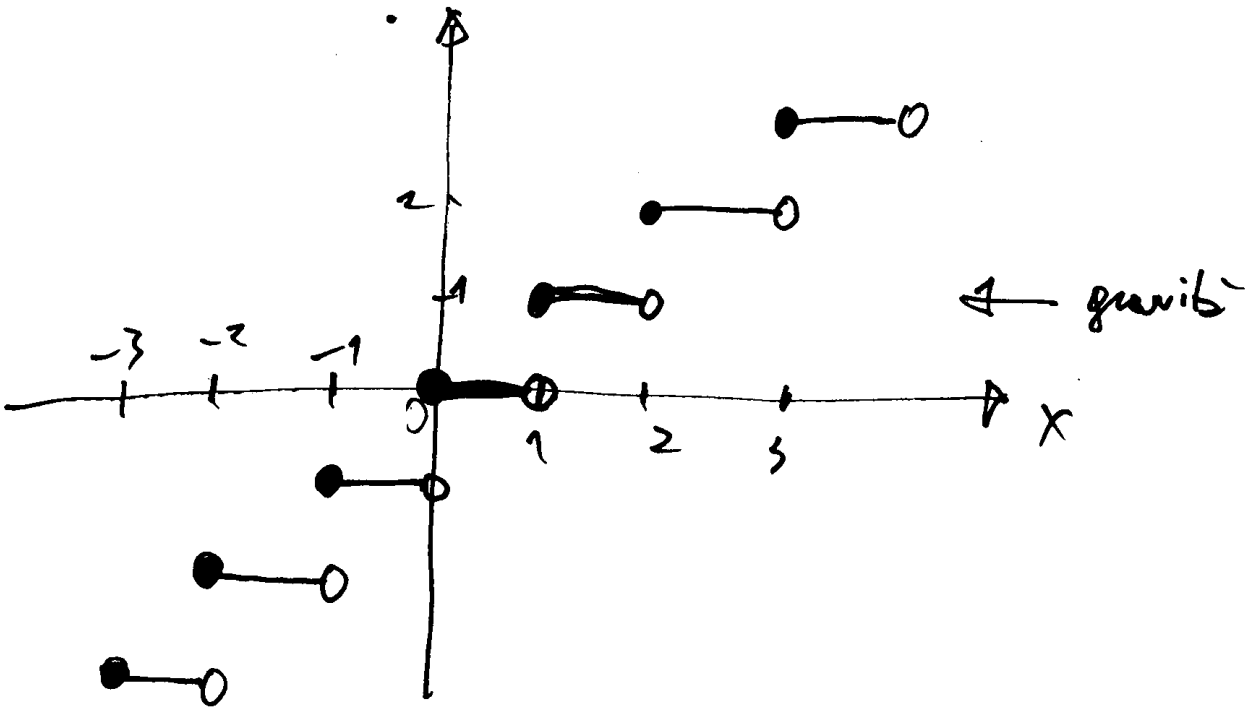
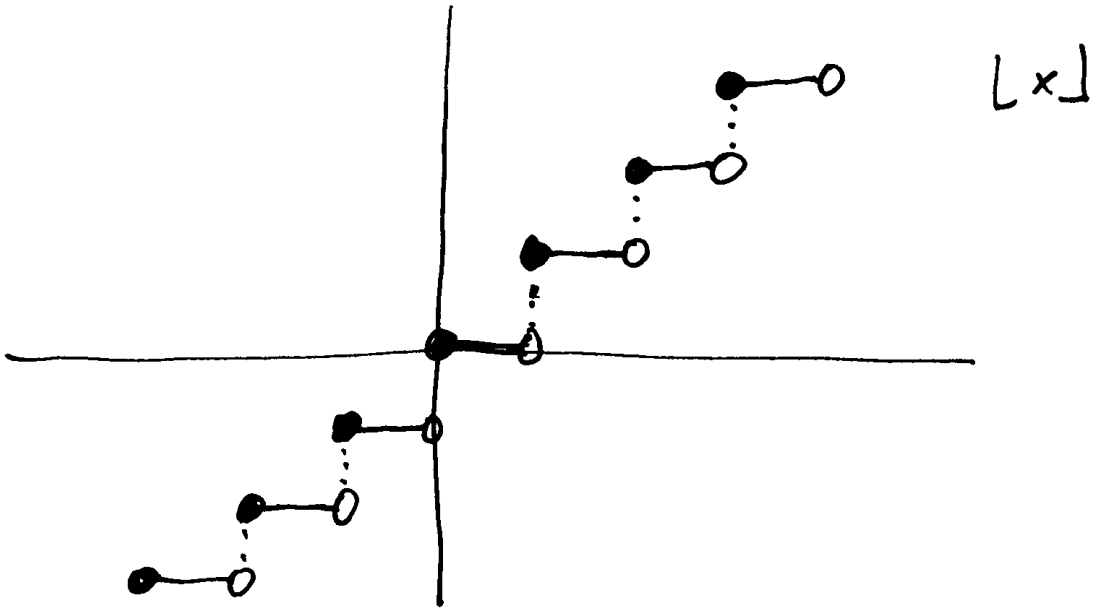


grafico di $\lfloor x \rfloor$





$f(x) \dots \to \lfloor f(x) \rfloor$?

In questo corso spesso $\lfloor x \rfloor$ $\lceil x \rceil$ verranno usate soprattutto come esempi di funzioni discontinue, con discontinuità di salto.

$$\lceil 1{,}31 \rceil = 2$$

$$1 < 1{,}31 \leq 2$$

$$\lceil -3{,}14 \rceil = -3$$

$$-4 < -3{,}14 < -3$$

$$\lfloor x - 1 \rfloor > 2x \quad ?$$

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

dom codom

$\lfloor 1{,}15 \rfloor$ ← float — 1,000

integer ? — 1

(ED ESPONENZIALI)

CASO BASILARE

$(\text{base qualsiasi})^{\text{esponente intero} > 0}$

$x^2 = x \cdot x$

$x^3 = x \cdot x \cdot x$

$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$

$x^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$

$\vdots$

eccetera

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ fattori}}$$

$$\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ volte}}$$

caso particolare $n = 1$

$x^1 = x = x$

un fattore

PROPRIETÀ FONDAMENTALE:

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

prodotto — somma

$\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ fattori}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdots x)}_{m \text{ fattori}} = \underbrace{x \cdots x}_{n+m \text{ fattori}}$

PRIMA ESTENSIONE: ~~$n \neq 0$~~ $n = 0$

$2^5 = 32$ → dividere per 2

$2^4 = 16$ → divisibile per 2

$2^3 = 8$ → divisibile per 2

$2^2 = 4$ → divisibile per 2

$2^1 = 2$ → divisibile per 2

$2^0 = 1$

ESTENSIONE

$x^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$

$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$ ← diviso per x

$x^3 = x \cdot x x$ ← diviso per x

$x^2 = x \cdot x$ ← diviso per x

$x^1 = x$ ← diviso per x

$x^0 = 1$ ← diviso per x

CONVENZIONE $\boxed{x^0 = 1}$

PROBLEMA $x = 0$

$0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

$0^4 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$?

$0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

$0^2 = 0 \cdot 0 = 0$

$0^1 = 0 = 0$

?? $0^1 = 0$??

0^0 ??

>! POTREBBE RINVIARE A DEFINIRE

Ci sono casi in cui converrebbe

porre $0^0 = 1$

Caso del termine noto del polinomio

$$x^2 + 3x + 5$$

$$1 \cdot x^2 + 3 \cdot x^1 + 5 \cdot x^0$$

↑ coefficiente di x^0
anche quando $x=0$

<u>in questi</u> contesti

$$x^0 = 1 \quad \forall x$$

18 nov. 2020 - p.5

Nel calcolo dei limiti

0^0 indeterminata

più precisamente:

$(\text{funzione che tende a } 0)^{(\text{funzione che tende a } 0)}$ → il limite può essere qualsiasi cosa

$(\text{numero secco})^{(\text{numero secco})}$ in diverse situazioni conviene considerarlo 1

Esponenti interi negativi

$x^3 = x \cdot x \cdot x$

$x^2 = x \cdot x$) diviso per x

$x^1 = x$) diviso per x

$x^0 = 1$) diviso per x

$x^{-1} = \frac{1}{x}$) diviso per x

$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

$\vdots$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$(n > 0)$ se $x \neq 0$

PRIMA ESTENSIONE

$(\text{base} \neq 0)^{\text{esponente in } \mathbb{Z}}$

CONTINUA A VALERE LA REGOLA FONDAMENTALE

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

$$\forall x \neq 0 \qquad \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

ESTENSIONE AGLI ESPONENTI RAZIONALI

$$x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^1 = x$$

imponiamo

$x^{1/2} = ?$

$$\left(x^{1/2}\right)^2 = x$$

$x^{1/2}$ deve essere un numero che elevato al quadrato fa x

$$x^{1/2} = \sqrt{x}$$

esistono due radici quadrate algebriche

$x = 4$ $\quad \pm 2$ radici algebriche

$x^{1/2}$ $\begin{cases} 2 & \text{bisogna scegliere} \\ -2 & \text{scegliamo quella positiva} \end{cases}$

$x^{1/2}$ = la radice quadrata aritmetica di x quella ≥ 0

18 nov. 2020 - p.8

Estensione al caso di esponenti razionali

$$(\text{base} > 0)^{\text{numero razionale } \frac{p}{q}} =$$

$$= \sqrt[q]{\text{base}^p}$$ radice aritmetica >0

$$0^{p/q} = 0 \quad \text{se } \frac{p}{q} > 0$$

con questa convenzione continua a valere la regola fondamentale

$$\boxed{x^r \cdot x^s = x^{r+s}}$$

$\forall x > 0 \quad \forall r, s \in \mathbb{Q}$

18 nov. 2020 - p. 90

(base negativa) esponente non intero =

~~1 = 0 dimostrazione~~

ULTERIORE ESTENSIONE

(base > 0) esponente reale

$3^{\sqrt{2}}$ può essere definito per approssimazioni

Si prende una successione di numeri razionali che tende a $\sqrt{2}$, $r_n \in \mathbb{R}$ $r_n \to \sqrt{2}$

$3^{r_n} \longrightarrow$ limite $= 3^{\sqrt{2}}$

il risultato non dipende dalla successione scelta

REGOLE DI CALCOLO CON LE POTENZE

~~REGOLA~~ FONDAMENTALE

$$x^{n+m} = x^n \cdot x^m$$

quando vale?

$\begin{cases} n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ \text{nessuna limitazione su } x \end{cases}$

$\begin{cases} n, m \in \mathbb{Z} \\ x \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} n, m \in \mathbb{Q} \\ x > 0 \end{cases}$

È più facile dire quando <u>non</u> vale:

~~non~~ può non valere quando coinvolge il caso pericoloso:

~~(esponente ≤ 0)~~ (base < 0) non intero

ALTRE REGOLE DI CALCOLO

$$(xy)^z = x^z \cdot y^z$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^z = \frac{x^z}{y^z}$$

$$\left(x^y\right)^z = x^{yz}$$

non confondere con $x^{y^z} = x^{(y^z)}$

esponenti interi > 0

interpretazione semplice

$$(x^n)^m = \underbrace{x^n \cdot x^n \cdot \ldots \cdot x^n}_{m \text{ fattori}} =$$

$$= \overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{n \text{ fattori}} \cdot \left.\begin{array}{l} x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \\ x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \\ \vdots \\ x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \end{array}\right\} m \text{ righe}$$

$$x^{n \cdot m} =$$

$$x^{-y} = \frac{1}{x^y}$$

$1^{\text{qualsiasi cosa}} = 1$

$x^1 = x$ $\qquad$ $x^0 = 1$

caso delicato: 0^0

REGOLE DI CALCOLO
CON L'ORDINAMENTO

RIASSUMENDO

x^y è definita eccetto che
nel caso pericoloso

$(\text{base} < 0)^{\text{esponente non intero}}$

18 nov. 2020 - p. 14

1^{∞} indeterminato

$(\text{qualcosa che tende a } 1)^{\text{qualcosa che tende a } \infty}$

$1^{\text{qualcosa}} = 1$

↑ numero 1 secco

problemi nel caso di base < 0

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

perché $(-2)^3 = -8$

ed è anche l'unico numero reale ~~[illegible]~~ che elevato al cubo fa -8

$$(-8)^{1/3} = -2 \quad ?$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

$$(-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} =$$

$$= \sqrt[6]{64} = 2$$

Quando la base è < 0 non c'è modo di definire $x^{p/q}$ in modo che continuino a valere le regole [illegible]

18 nov. 2020 - p. 16

$\sqrt{4} = \pm 2$ $\qquad$ $\sqrt{4} = +2$

$\sqrt[3]{-8} = \left\{ \right.$ -2 } altre radici complesse

$x^{1/3}$

$\sqrt{4}$

$\sqrt[3]{-8} = -2$

SVRD $\qquad$ surdus

$\sqrt[3]{-8}$ non esiste come radice reale

$(-8)^{1/3}$ non lo definisco

STUDIO DEL SEGNO DI UNA ESPRESSIONE ALGEBRICA

Studiare il segno di una $f(x)$, funzione a valori reali vuol dire scrivere qualcosa di questo tipo:

$$f(x)\begin{cases} >0 & \text{se } \dots \text{ (disequazione in } x) \\ =0 & \text{se } \dots \\ <0 & \text{se } \dots \\ \text{non esiste} & \text{se } \dots \end{cases}$$

o presentare uno schema (di solito grafico) che contenga queste informazioni.
Dallo schema si deve capire per quali x la $f(x)$ è positiva (etc.), negativa (etc.), nulla o non esistente.

I POSSIBILI SEGNI SONO TRE $\boxed{+ \quad - \quad 0}$

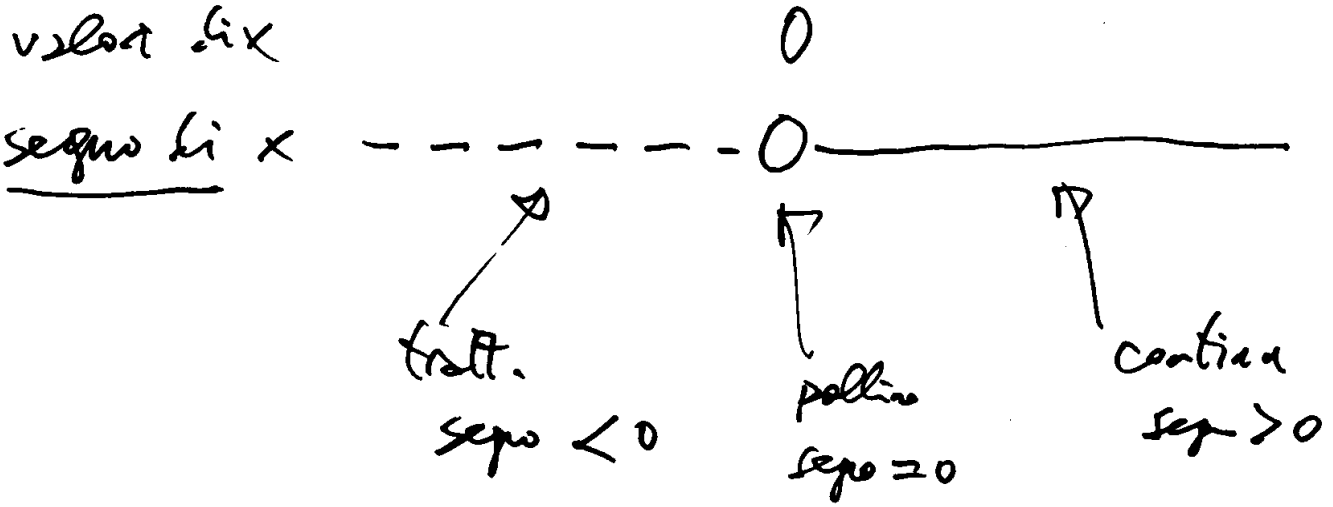
NB Lo zero non va accorpato coi positivi, è un caso a parte.

Esempi di schemi grafici

$f(x) = x$

$$f(x)\begin{cases} >0 & \text{se } x>0 \\ =0 & \text{se } x=0 \\ <0 & \text{se } x<0 \\ \text{non esiste} & \text{mai} \end{cases}$$

Schema grafico

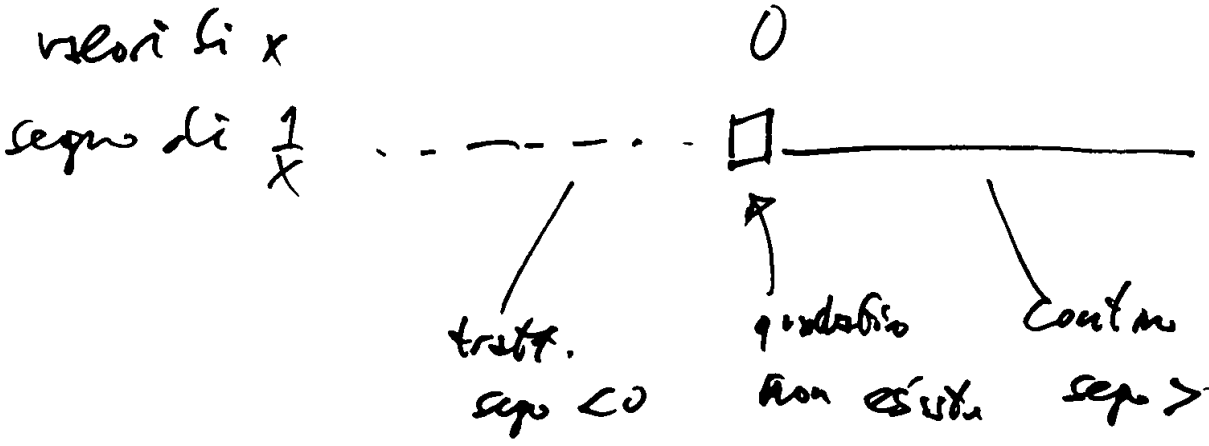


alternativa

$- - - - - - - 0 + + + + + + +$

Esempio $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x > 0 \\ = 0 & \text{mai (se } x \in \emptyset) \\ < 0 & \text{se } x < 0 \\ \text{non esiste} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



Esempio $f(x) = x - 3$

$$f(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x > 3 \\ = 0 & \text{se } x = 3 \\ < 0 & \text{se } x < 3 \\ \text{non esiste} & \text{mai per nessun } x \end{cases}$$

Schema grafico:

valori di x — 3

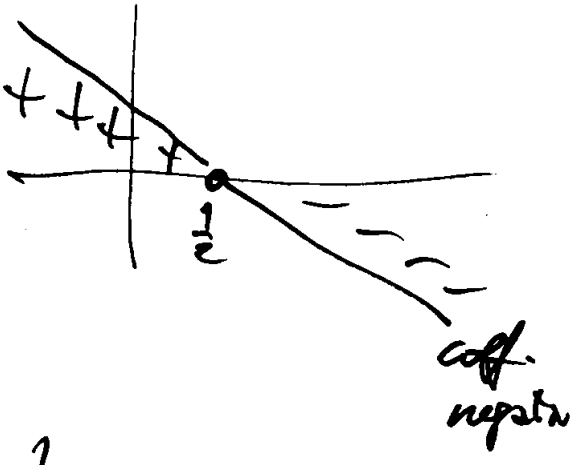
segno di $x-3$ — — — — ○———

Esempio $f(x) = 1 - 2x$

$$f(x) \begin{cases} > 0 & \\ = 0 & \text{se } x = \frac{1}{2} \\ < 0 & \\ \dots & \end{cases}$$

$y = 1 - 2x$

risolv. grafica



Schema grafico

valori di x — $\frac{1}{2}$

segno di $(1-2x)$ ———○- - - - -

Caso dei polinomi di 2° grado

Segno di $f(x) = x^2 + 2x - 1$

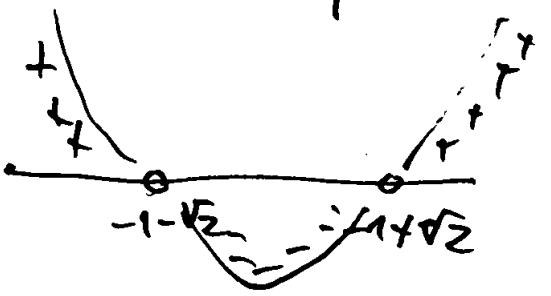
$$f(x) \begin{cases} > 0 \\ = 0 \quad \text{se} \quad x = -1 \pm \sqrt{2} \\ < 0 \end{cases}$$

Comincio con $f(x) = 0$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 + 1 = 2$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{2}}{1}$$ soluz. di $f(x) = 0$



$y = x^2 + 2x - 1$

Schema grafico:

valori di x $\quad -1-\sqrt{2} \quad -1+\sqrt{2}$

segno di x^2+2x-1 $\quad$ ——0- - - - -0—

segno > 0 | segno < 0 | segno > 0

segno 0 $\quad$ segno 0

Esempio

REGOLA DEI SEGNI

Come trovare il segno di un prodotto o un quoziente conoscendo i segni dei fattori

$$+ \cdot + = +$$

$$- \cdot - = +$$

$$+ \cdot - = -$$

$0 \cdot$ qualsiasi cosa $= 0$ che esista

$$\frac{+}{+} = + \qquad \frac{-}{-} = +$$

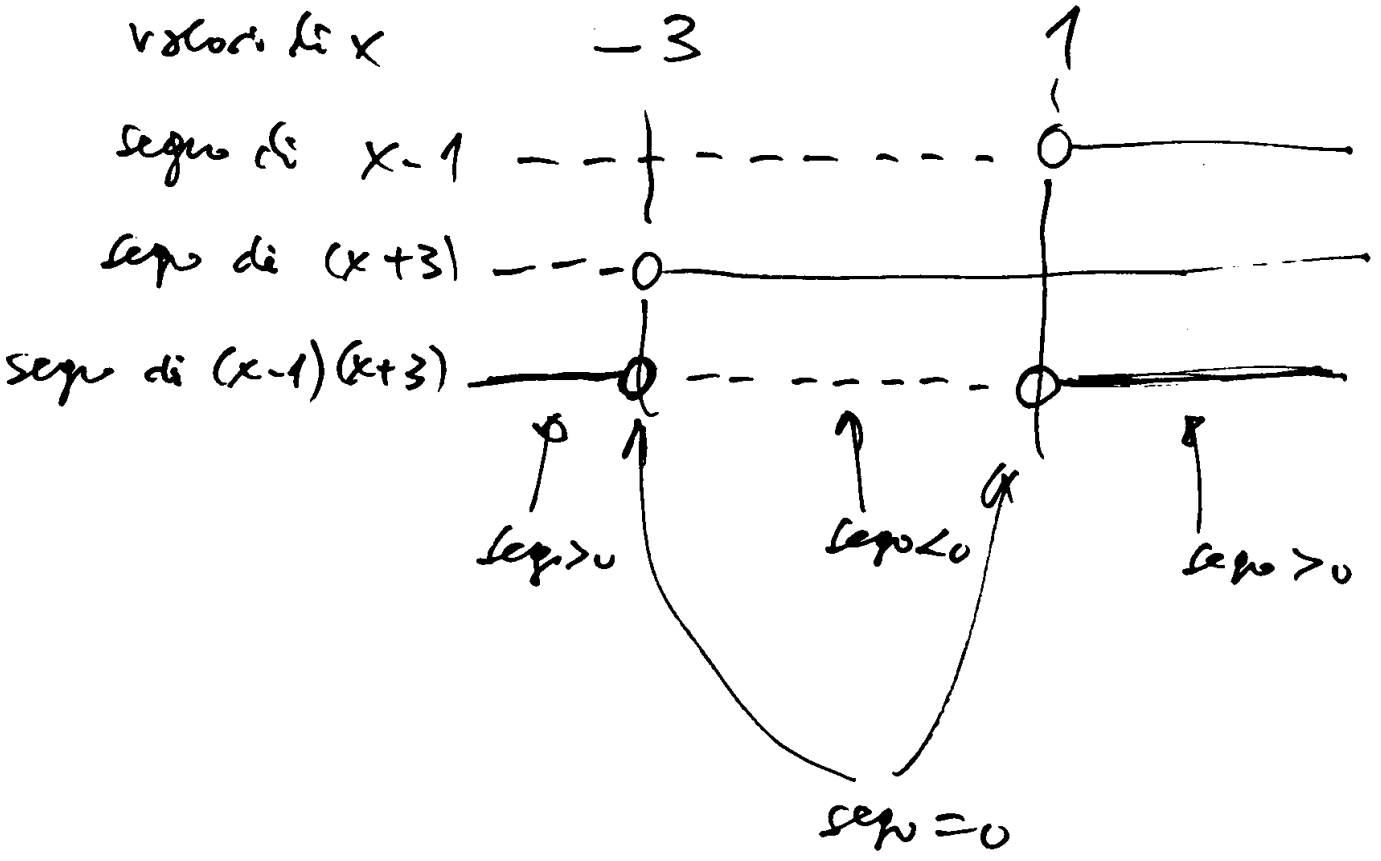
$$\frac{+}{-} = - \qquad \frac{-}{+} = -$$

$$\frac{0}{\neq 0} = 0 \qquad \frac{}{0} \text{ non esiste}$$

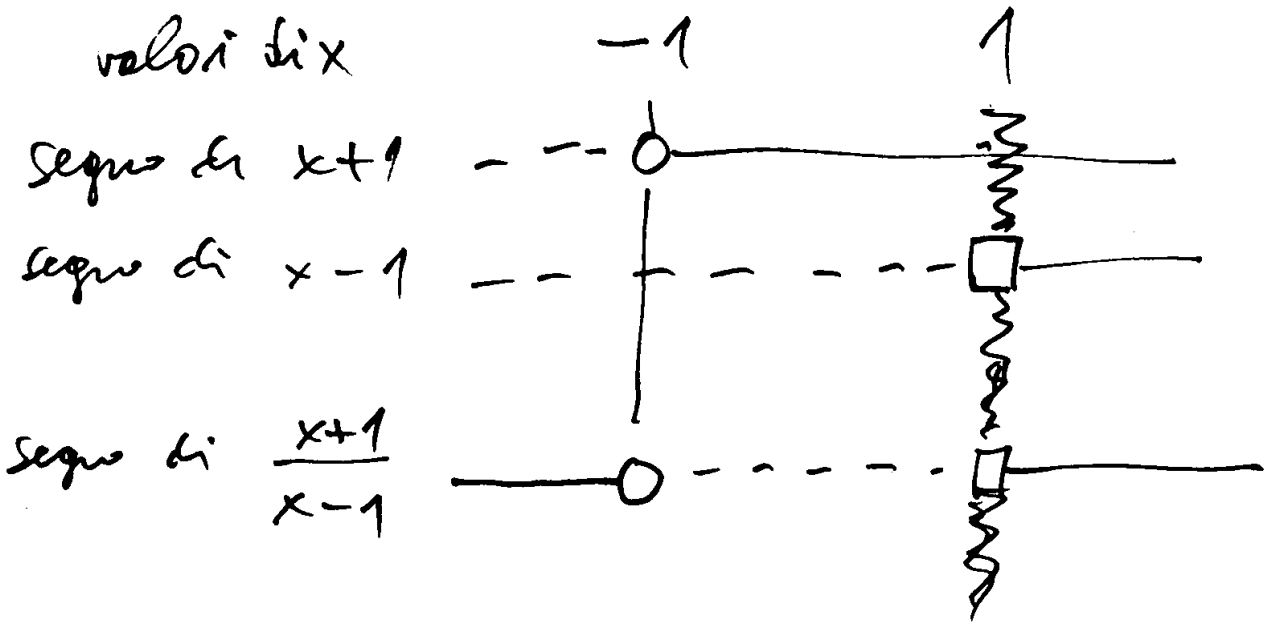
Esempio $f(x) = (x-1)(x+3)$

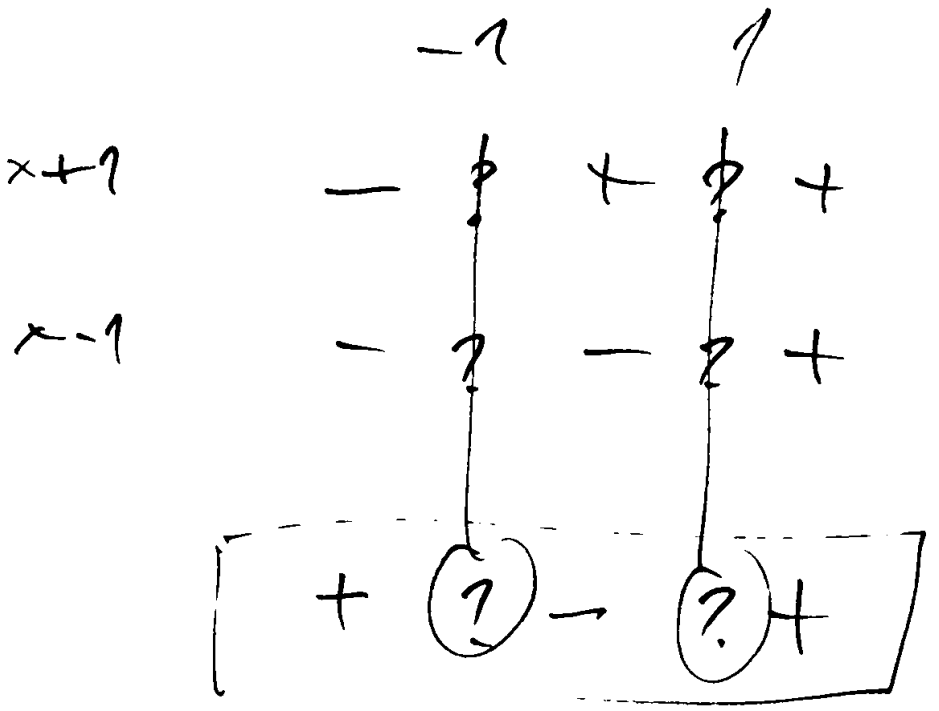
applico la regola dei segni

gli zeri sono 1 e -3



Esempio $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$





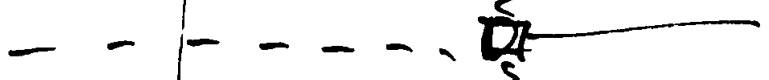
questo schema non dice cosa succede nei casi critici

Esempio $\dfrac{(x+1)^2}{x-1}$ $\qquad$ $\dfrac{(x+1)(x+1)}{x-1}$

i fattori si annullano -1 $\quad$ 1

valori di x $\quad -1 \quad 1$

segno di $(x+1)^2$ $\quad$

segno di $x+1$ $\quad$ 

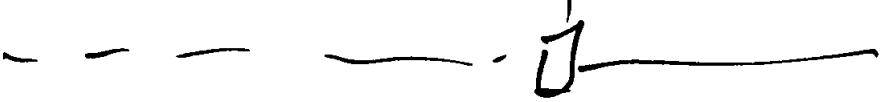
segno di $\dfrac{(x+1)^2}{x-1}$ $\quad$

ERRORE: mangiarsi il -1

$(x+1)^2 \geq 0 \iff$ VERO

$(x+1)^2$ $\quad$ sbagliato $\quad 1$

$x-1$

$\dfrac{(x+1)^2}{x-1}$ 

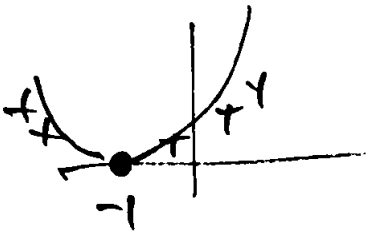
Disequazione $\frac{(x+1)^2}{x-1} \geq 0$

risoluzione sbagliata:

risposta $x > 1$ sbagliata

Risposta giusta: $x = -1 \vee x > 1$

$y = (x+1)^2$



Problem $\dfrac{(x+1)^2}{x-1} \geq 0$

$(x+1)^2 \geq 0 \quad \forall x$

$x - 1 > 0 \quad x > 1$

AND

POTENZE

x^y

situazione pericolose

(base non positiva)$^{\text{esponente non intero}}$

$= \sqrt[3]{-8} = -2$ (unica radice reale)

$= (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} =$

$= \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$

± 2

0^0

caso tranquillo

(base > 0)$^{\text{esponente qualsiasi}}$

Caso notevole di base negativa molto usata:

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

n intero

$$(-2)^n = (-1)^n 2^n$$

$$(xy)^z = x^z \cdot y^z \qquad x\ z \in \mathbb{Z}$$

$$(x\,y)^n = x^n y^n \qquad x\ n \in \mathbb{Z}$$

ORDINAMENTO

ORDINAMENTO

$x < y \Rightarrow x^z \; ? \; y^z$ (stessi z)

$? \;\; \leq$

La situazione è complicata, non dà una regola semplice

Casi notevoli

$z = 2$

$x < y \Rightarrow x^2 \; (?) \; y^2$

Senza altre condizioni non si può dire niente

$x = 1, \; y = 2$

$1 < 2 \Rightarrow 1^2 < 2^2$

la diseg. si mantiene

$x = -2, \; y = -1$

$-2 < -1$ la diseg. si ribalta $(-2)^2 > (-1)^2$

$4 > 1$

situazione in cui si può dedurre l'ordinamento

da ricordare: $0 \leq x < y \Longrightarrow x^2 < y^2$

si mantiene, nella condizione che x e y siano positivi o nulli

nell'altra sit.

$x < y \leq 0 \Longrightarrow x^2 > y^2$

si ribalta

Dim

$$x^2 < y^2 \iff 0 < y^2 - x^2$$

$$\iff 0 < (y-x)(y+x)$$

$y+x \geq 0$ se $0 \leq x < y$

$$\iff 0 < y - x$$

$$\iff x < y$$

15 nov. 2020 – 12 h

Da ricordare:

fra numeri positivi (o nulli)

una disug. si può elevare al quadrato, oppure si possono togliere i quadrati in modo reversibile

$$x \leq y \iff x^2 \leq y^2$$

$$x > y \iff x^2 > y^2$$

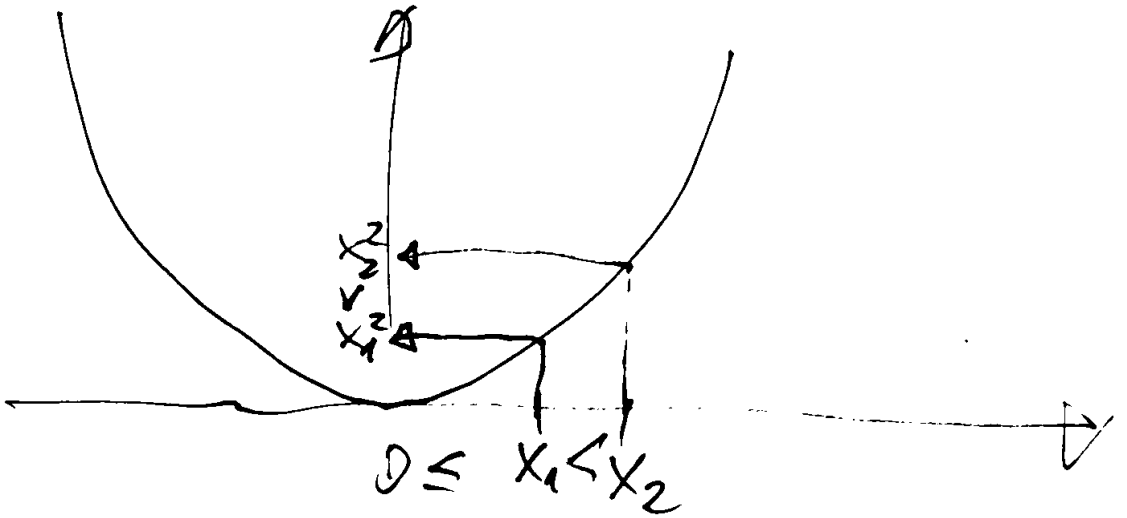
se posso dire per esempio che $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Varianti con doppia implicazione

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x < y \end{array}\right\} \text{AND} \iff \left\{\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x^2 < y^2 \end{array}\right. \text{AND}$$

A parole: fra numeri ≥ 0, la disug. sui numeri equivale alla stessa disug. fra i quadrati.

INTERPRETAZIONE GRAFICA

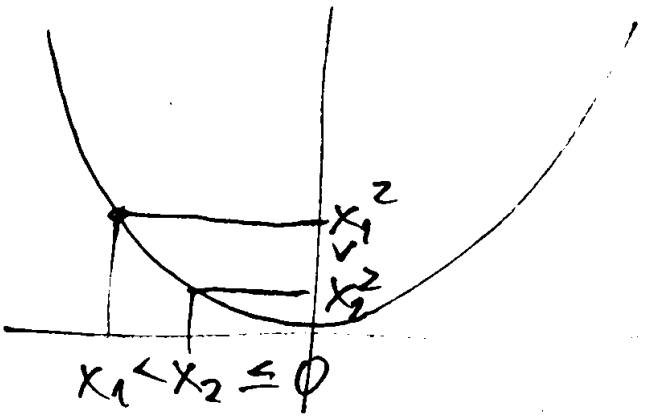


Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$

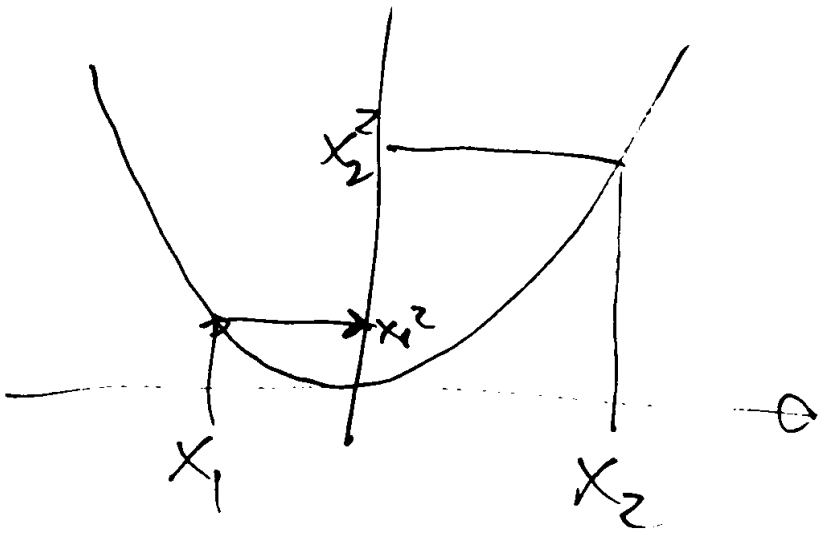
$$x \; \square \; y \iff x^2 \; \square \; y^2$$

stessa disug.

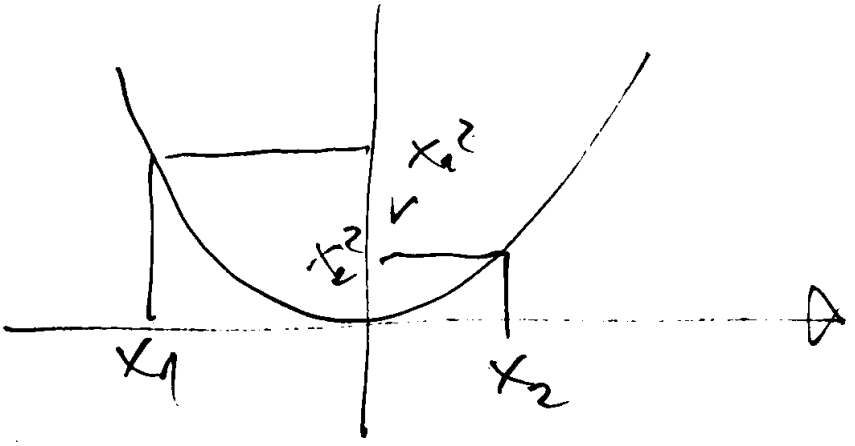
19 nov. 2020 - p 7



fra numeri negativi (o nulli)
i quadrati stanno nella relazione
inversa rispetto ai numeri di
partenza



la disug.
si inverte



la disug.
si ribalta

$x_1 < 0 < x_2 \not\Rightarrow x_1^2 \;?\; x_2^2$

Caso del cubo

$$x < y \implies x^3 \;?\; y^3$$

Risposta semplice e pulita

$$x \;(<)\; y \iff x^3 \;(<)\; y^3$$

stessa relazione

Nessuna restrizione

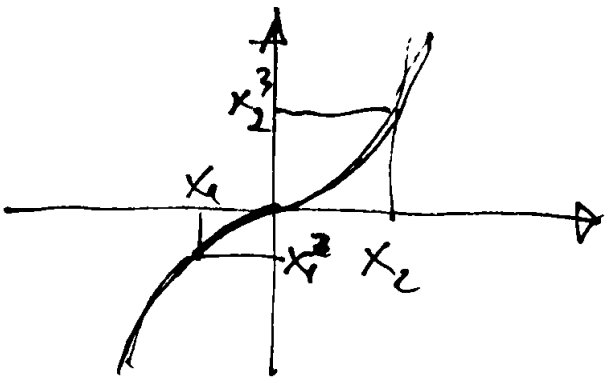
Come si dim.

$$x^3 < y^3 \iff 0 < y^3 - x^3$$

$$\iff 0 < (y-x)(y^2 + xy + x^2)$$

≥ 0 sempre

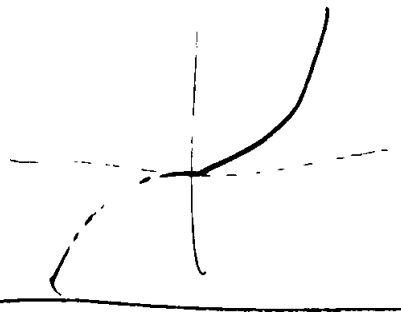
INTERPRETAZIONE GRAFICA



la disug. fra x_1 e x_2 è la stessa che c'è fra x_1^3 e x_2^3

La funzione $f(x) = x^2$ non è né decrescente né crescente

La funzione $f(x) = x^3$ è <u>crescente</u>



GENERALIZZAZIONI

La situazione di x^2 è la stessa che per tutte le <u>potenze pari</u> ($\exp > 0$)

x^2 x^4 x^6 x^8 ...

Per queste le disug. si conservano <u>sui positivi</u>

La situazione di x^3 è la stessa che per tutte le potenze <u>dispari</u> ($\exp > 0$)

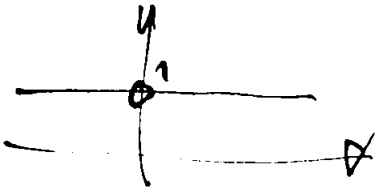
x^1 x^3 x^5 x^7 ...

tutte conservano le disug. senza restrizioni

GRAFICI DELLE POTENZE

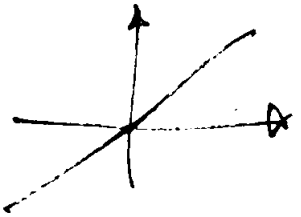
$$f(x) = x^n$$

$n = 0$

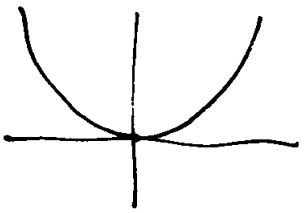


0^0 ?

$n = 1$

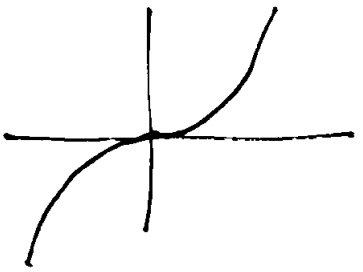


n pari > 0



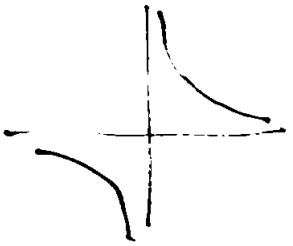
x^2
x^4
x^6
⋮

n dispari ≥ 3



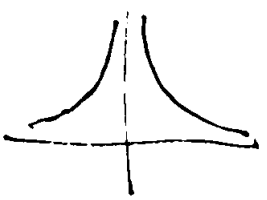
x^3
x^5
x^7
⋮

$n = -1$



x^{-3} x^{-1}
x^{-5}
⋮

$n = -2$



x^{-2}
x^{-4}
⋮

POTENZE A ESPONENTE NEGATIVO

$n = -1$

$$x < y \implies x^{-1} \; ? \; y^{-1}$$

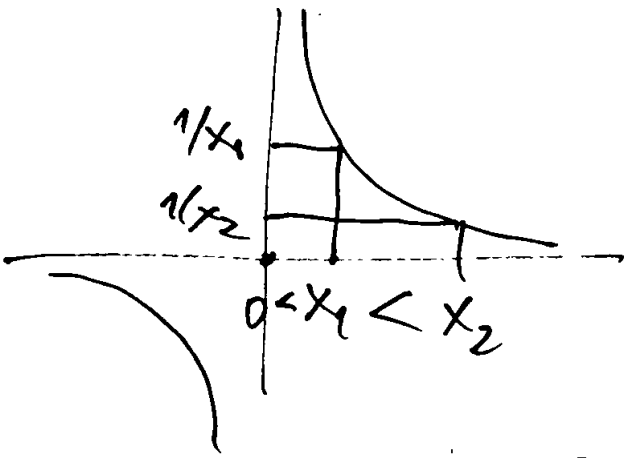
$$x < y \implies \frac{1}{x} \; ? \; \frac{1}{y}$$

Sappiamo già che

$$0 < x < y \implies \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$$

si ribalta

l'interpretazione grafica



Passando ai reciproci, fra numeri positivi le disug. si ribaltano

APPLICAZIONE

Disequazioni con radice quadrata

CASI CHE TRATTEREMO

$$\sqrt{A} \geq B$$

$$\sqrt{A} \leq B$$

A, B espressioni letterali nella variabile x

$$\sqrt{A} > B$$

$$\sqrt{A} < B$$

COME SI IMPOSTANO

COMINCIAMO DA $\sqrt{A} \geq B$

Strategia: trasformare la disug. con $\sqrt{\ }$ in una combinazione logica di disug. senza radici quadrate

1° passo esplicitare le condizioni di esistenza della radice

$$\sqrt{A} \geq B \iff \begin{cases} A \geq 0 \\ \sqrt{A} \geq B \end{cases}$$

Vorremmo elevare al quadrato la radice, in modo da eliminarla

$$\left(\sqrt{A}\right)^2 = A \quad \text{se } A \geq 0$$

ATTENZIONE

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad \text{se } x \geq 0$$

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$\sqrt{x^2} = x$ spesso sbagliato

$\sqrt{x}$ implicitamente suppongo che $x \geq 0$ se no non ha senso (fa i reali)

$\sqrt{\text{qualche cosa}} \geq 0$ ognuno ha senso

non confondere il segno di x col segno di $\sqrt{x}$

$\sqrt{x^2-3x+5} \geq 0$ ogni ha senso senza fare calcoli

richiede calcoli stabilire quando ha senso

ELEVAMENTO AL QUADRATO E DISUGUAGLIANZE

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x < y \\ \leq \\ \geq \\ \vdots \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x^2 < y^2 \\ \leq \\ \geq \\ \vdots \end{cases}$$

APPLICAZIONE ALLE DISEQUAZIONI CON RADICALI

$$\sqrt{A} \geq B \qquad \sqrt{A} \leq B$$

PRIMO CASO

$$\sqrt{A} \geq B$$

strategia: "elevare al quadrato" per togliere la radice quadrata.

Possiamo farlo se i due membri sono ≥ 0 altrimenti no.

La radice di A, quando esiste, è ≥ 0

Prima occorre conviene esplicitare le condizioni di esistenza delle radici

$$\sqrt{A} \geq B \iff \begin{cases} A \geq 0 \text{ esplicita} \\ \sqrt{A} \geq B \end{cases}$$

$\sqrt{A} \geq B \iff \begin{cases} A \geq 0 \\ \sqrt{A} \geq B \\ \text{è} \geq 0 \end{cases} \iff$?

distinguo i due casi $B \geq 0 \quad \vee \quad B < 0$

$\iff \begin{cases} A \geq 0 \\ \sqrt{A} \geq B \\ B \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A \geq 0 \\ \sqrt{A} \geq B \\ B < 0 \end{cases}$

entrambi i membri sono ≥ 0 quindi posso elevare al quadrato!

positivo $\geq$ negativo è sempre vero

$\iff \begin{cases} A \geq 0 \\ (\sqrt{A})^2 \geq B^2 \\ B \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A \geq 0 \\ \text{VERO} \\ B < 0 \end{cases} \implies$

tutto

$\iff \begin{cases} A \geq 0 \\ A \geq B^2 \\ B \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases} \iff$

è conseguenza di

tutto

tutto

essendo un quadrato ≥ 0

25 nov. 2020 - p. 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \geq B^2 \\ B \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases}$$

RIASSUMENDO

$$\sqrt{A} \geq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq B^2 \\ B \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases}$$

Quando $A < 0$ la diseq. iniziale non ha senso invece il sistema ha senso, ed è falso

I ripor di termini i due membri hanno gli stessi valori di verità

Il secondo comprende tra i falsi gli elementi che il primo membro come senza senso.

Esempio

$$\sqrt{x-1} \geq x \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 & \text{esistenza} \\ \sqrt{x-1} \geq x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x-1} \geq x \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x < 0 \\ \sqrt{x-1} \geq x \end{cases}$$

Unica possibilità il secondo membro

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{x-1 \geq 0} \\ x \geq 0 \\ x-1 \geq x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x < 0 \\ \cancel{\text{VERO}} \end{cases}$$

$$\sqrt{x-1} \geq x \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 \geq x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

L'ALTRO CASO

$$\sqrt{A} \leq B \iff \begin{cases} A \geq 0 & \text{cond. di esistenza} \\ \sqrt{A} \leq B \end{cases}$$

↑ pos o neg?

$$\iff \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ \sqrt{A} \leq B \\ \text{pos} \quad \text{pos} \end{cases} \vee \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \\ \sqrt{A} \leq B \\ \text{pos} \leq \text{neg} \ \text{FALSO} \end{cases}$$

(Si sarebbero semplificate incompatibili fra loro)

$$\iff \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \leq B^2 \end{cases}$$

non si può semplificare ulteriormente in generale

RIASSUMENDO:

$$\sqrt{A} \leq B \iff \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \leq B^2 \end{cases}$$

ESEMPIO

$$\sqrt{x-1} \leq x$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \sqrt{x-1} \leq x \end{cases} \quad \text{estriction}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \\ \underset{\text{pos}}{\sqrt{x-1}} \leq \underset{\text{pos}}{x} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ x < 0 \\ \sqrt{x-1} \leq x \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x \geqslant 0 \\ x-1 \leqslant x^2 \end{cases}$$

25 nov. 2020 - p 6

VARIANTI

$$\sqrt{A} > B$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} A \geq 0 \\ \sqrt{A} > B \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ \sqrt{A} > B \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \\ \underbrace{\sqrt{A}}_{\geq 0} > \underbrace{B}_{< 0} \end{cases} \text{ VERA}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \cancel{A \geq 0} \\ B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases}$$

25 nov. 2020 - p. 7

VARIANTE

$$A\sqrt{B} \geq C$$

$$\Leftrightarrow$$

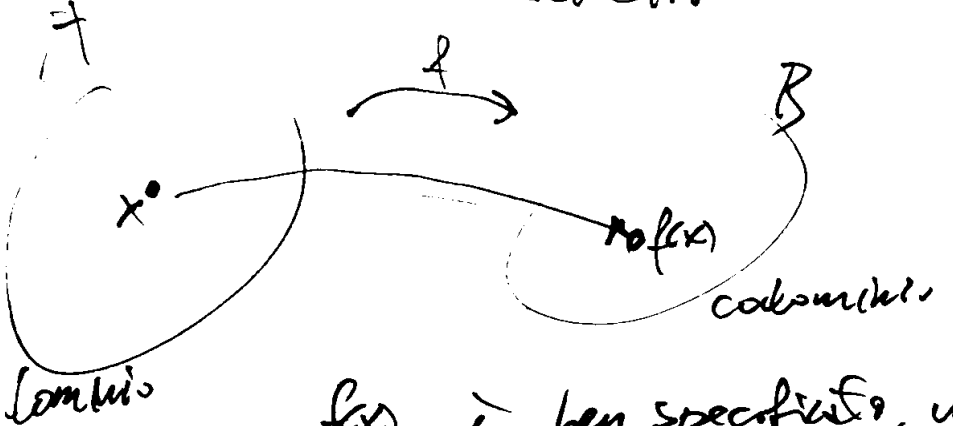
$$\begin{cases} B \\ A\sqrt{B} \geq C \\ A > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A\sqrt{B} \geq C \\ A < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A\sqrt{B} \geq C \\ A = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{B} \geq \frac{C}{A} \\ A > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt{B} \leq \frac{C}{A} \\ A < C \end{cases} \vee \begin{cases} 0 \geq C \\ A = 0 \end{cases}$$

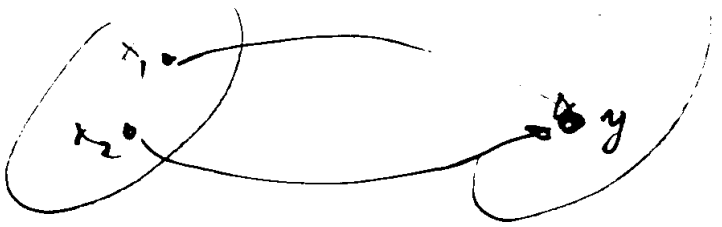
FUNZIONE E FUNZIONE INVERSA

Concetto insiemistico di funzione astratto



$f(x)$ è ben specificato, unico, in B

A è chiamato dominio della funzione (insieme di definizione)



Non è vietato che $x_1 \neq x_2$ ma $f(x_1) = f(x_2)$

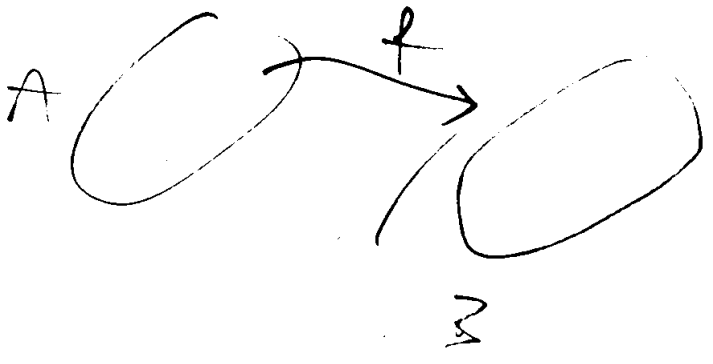
È interessante la situazione in cui questo non succede, cioè che punti distinti in partenza rimangono distinti anche in arrivo

Si dice in tale caso che la funzione è iniettiva

Un'altra situazione interessante è quella in cui tutti gli elementi di B sono raggiunti da (almeno) una freccia

Si dice anche in tal caso che la funzione è suriettiva

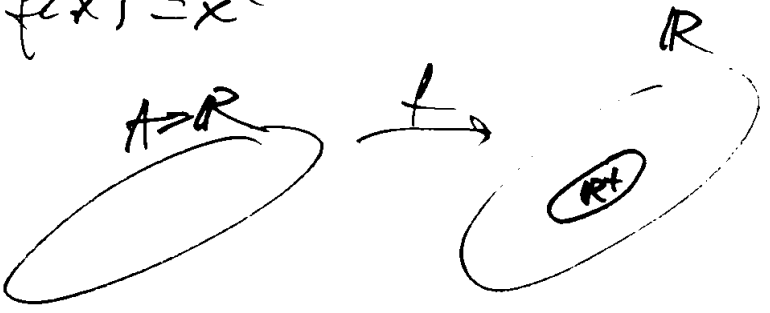
Il concetto di suriettività richiede di dire l'accordo sul codominio esplicito



La stessa funzione f può essere descritta con diversi codomini.

La suriettività dipende dalla scelta del codominio, e quindi è meglio specificare "suriettiva su quel particolare codominio"

$f(x) = x^2$



La stessa f è suriettiva o no a seconda della scelta del codominio.

L'immagine di una funzione è l'insieme di tutti i valori che assume

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$$

↑ dominio — l'insieme dei valori $f(x)$ al variare di $x \in A$

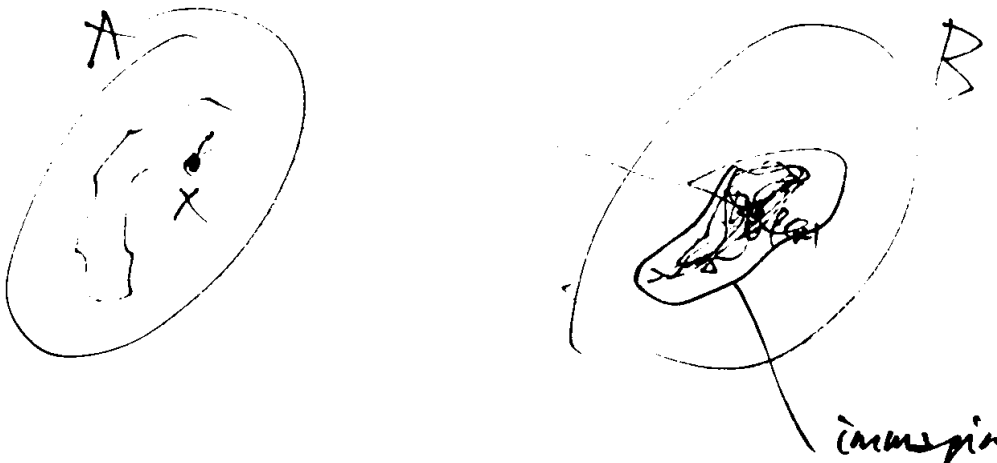


immagine di A tramite la funzione

Quando una funzione diventa suriettiva

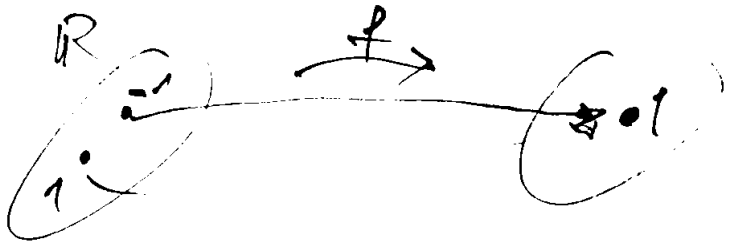
se prendiamo come suo codominio l'immagine

Spesso l'immagine è difficile da trovare

L'iniettività è più intrinseca a una funzione, non basta cambiare il codominio per far diventare iniettiva una funzione

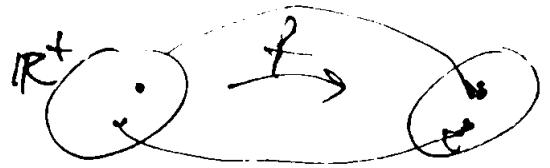
Bisognerà eventualmente cambiare il dominio

$$f(x) = x^2 \qquad \text{dom } f = \mathbb{R}$$



non è iniettiva

Se restringo f ai reali positivi (o nulli) diventa iniettiva



invertibili

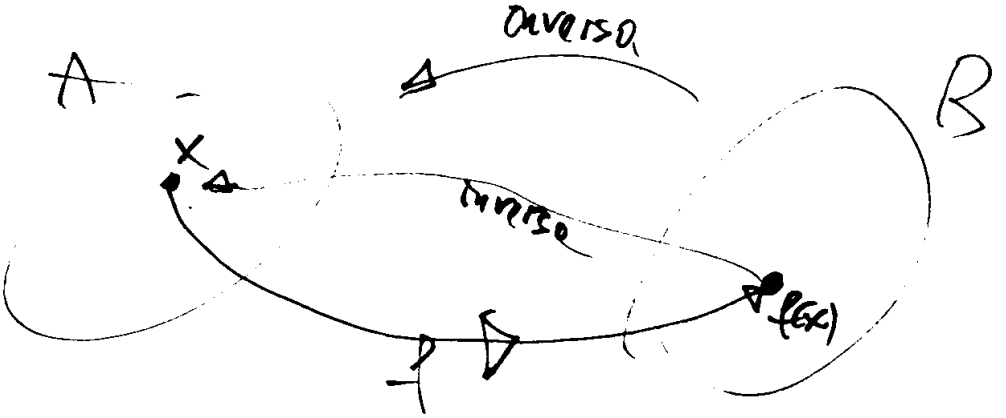
Funzione inversa

Data una funzione $f: A \to B$

f va da A a B

funzione : dominio $\longrightarrow$ codominio

La funzione inversa di f è una nuova funzione che fa tornare il punto di partenza



Notazione per la funzione inversa

$$f^{-1}$$

$\sin^{-1} x = \frac{1}{\sin x}$

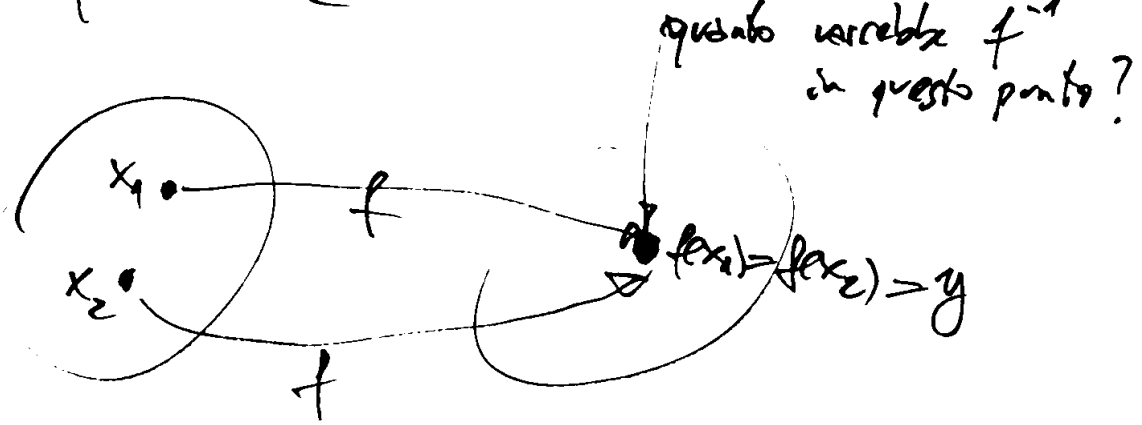
pericolosa perché si presta a confusione col reciproco. Alcuni libri scrivono

$f^{\triangleleft}$

PROPRIETÀ DI BASE DELLA FUNZIONE INVERSA

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

Perché ci sia una funzione inversa bisogna che f sia iniettiva

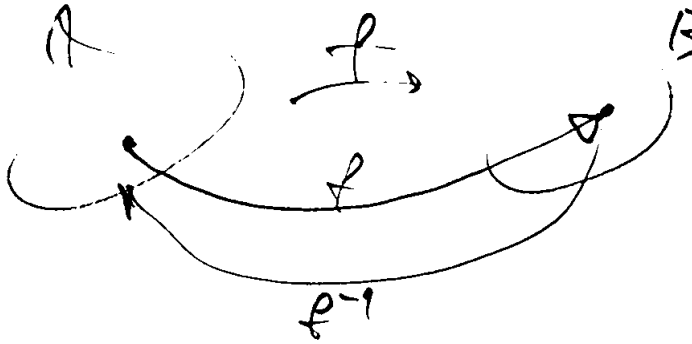


f non iniettiva

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} f^{-1}(f(x_1)) = x_1 \\ \text{oppure} \\ f^{-1}(f(x_2)) = x_2 \end{cases}$$

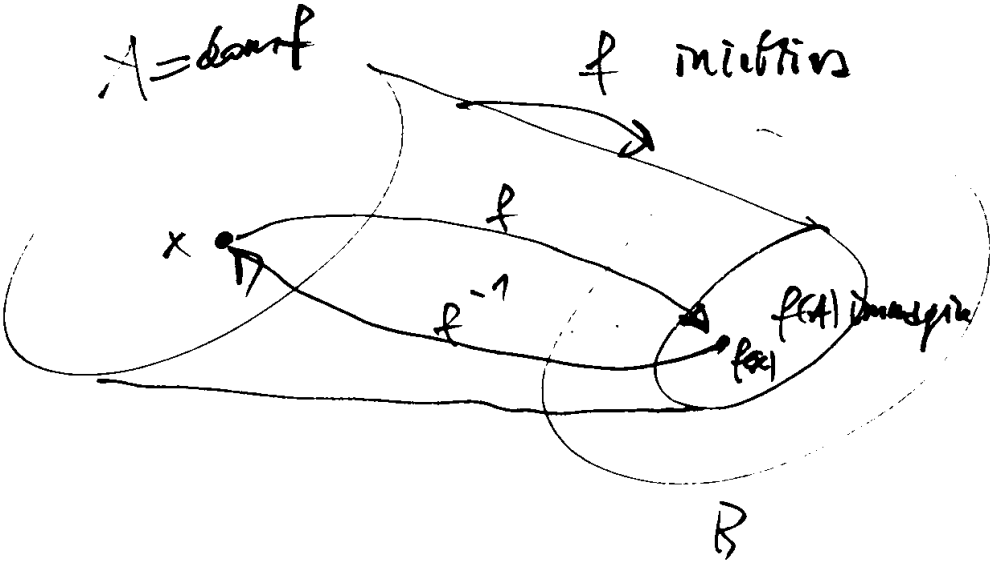
Spesso le funzioni iniettive sono dette anche INVERTIBILI

Quali il dominio della funzione inversa?



26 nov. 2020 - 26

$$\operatorname{dom} f^{-1} = f(A) = f(\operatorname{dom} f)$$



Formule notevoli

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in \operatorname{dom} f$$

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in f(A)$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad f(f^{-1}(x)) = x$$

quando si incontrano una funzione e la sua inversa, le due si eliminano a vicenda, e rimane solo x

26 nov. 2020 — p. 7

NOTAZIONE COI CERCHIETTI

$$f \circ g\,(x) = f(g(x))$$

$f \circledcirc g$ composizione di funzioni

$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1} \circ f\,(x) &= x \\ f \circ f^{-1}\,(x) &= x \end{aligned}}$$

Spariscono

tangente — tan
arcotangente — arctan → sono una l'inversa dell'altra (nei domini opportuni)

$$\tan \circ \arctan\,(x) = x$$

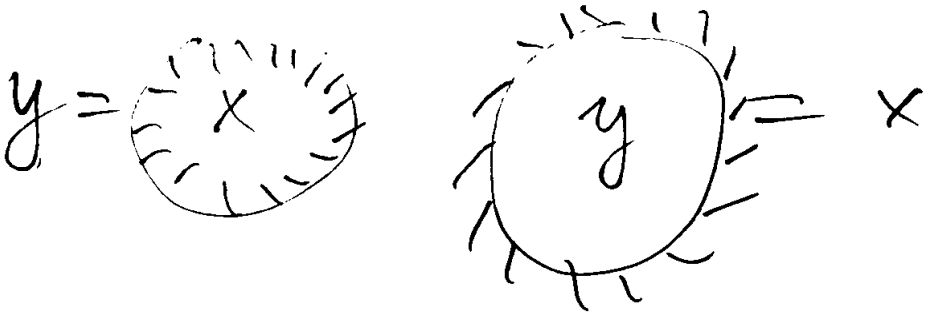
$$\arctan \circ \tan\,(x) = x$$

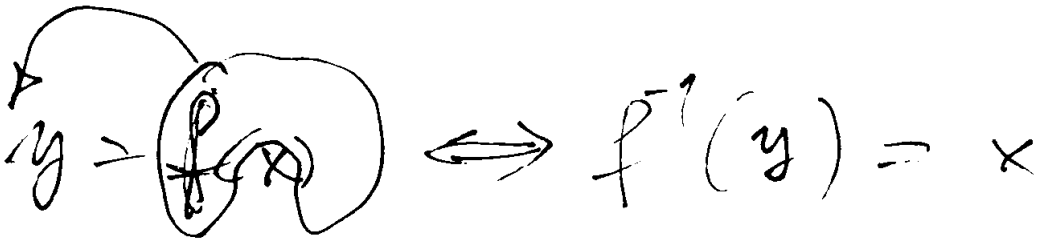
$f^{-1} \circ f$ = identità su $\mathrm{dom} f$

$f \circ f^{-1}$ = identità su $\mathrm{dom} f^{-1}$

$f \circ f^{-1}$ e $f^{-1} \circ f$ sono le funzioni identità

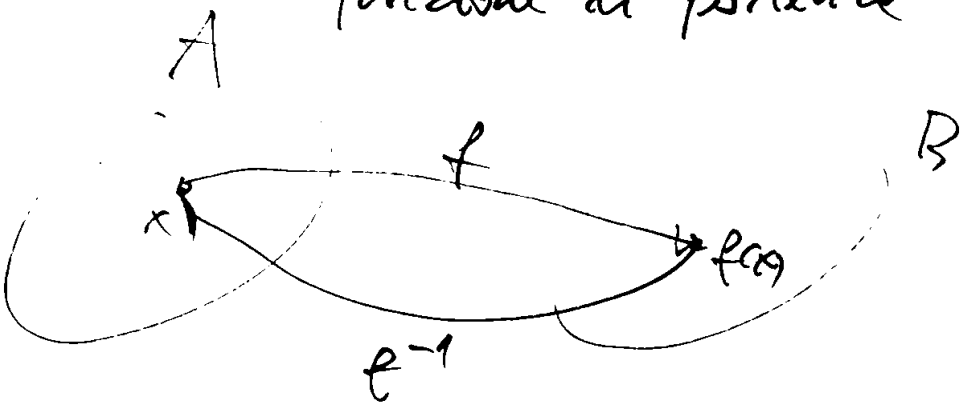
$$y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$$





$$(f^{-1})^{-1} = f$$

l'inversa dell'inversa è la funzione di partenza



da non confondere con $f^{-1}(f(x)) = x$

L'inversione agisce sulla funzione, non sui singoli elementi

$f^{-1}(x)$ $\qquad$ ~~$f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$~~

~~tutta un'altra cosa~~

RIASSUMENDO: FORMULE NOTEVOLI

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$$y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$$

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$$

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

valgono sempre in astratto non appena la funzione è invertibile, cioè iniettiva.

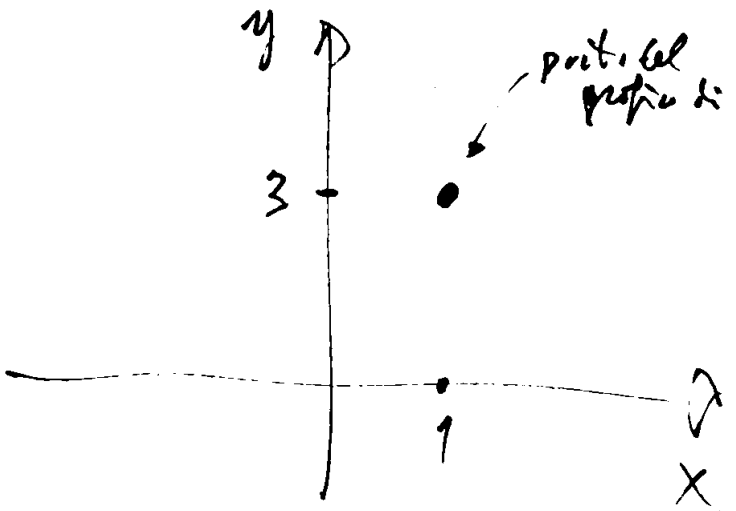
SITUAZIONE CHE INTERESSA IN PRINCIPIO QUESTO CORSO:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f : (\text{sottoinsieme di } \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

C'è una struttura ulteriore: il grafico di f

L'invertibilità ha una interpretazione grafica abbastanza semplice



f sia mostra

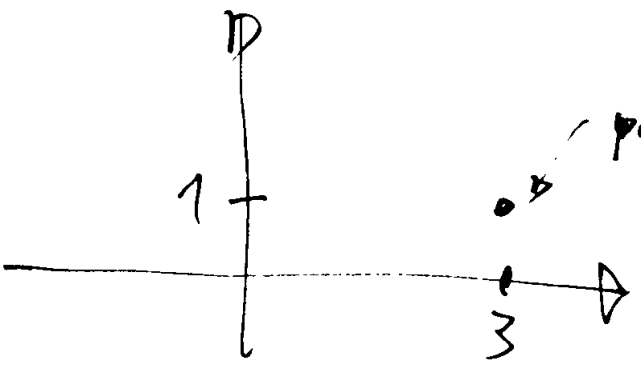
$f(1) = 3$

partenza arrivo

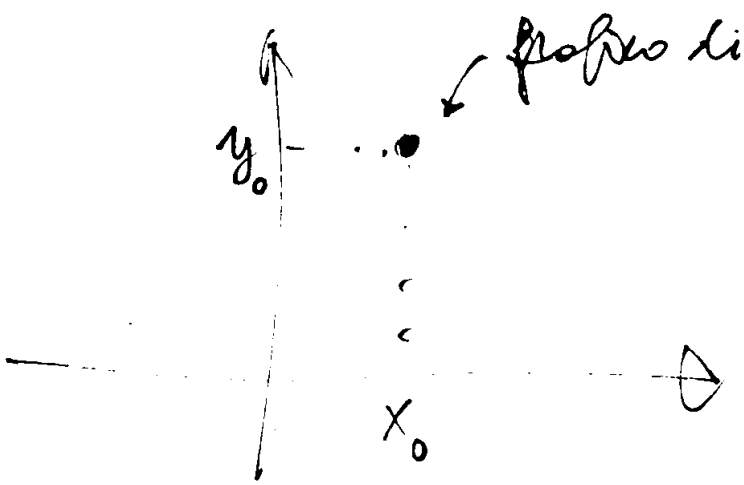
che dice di f^{-1} ?

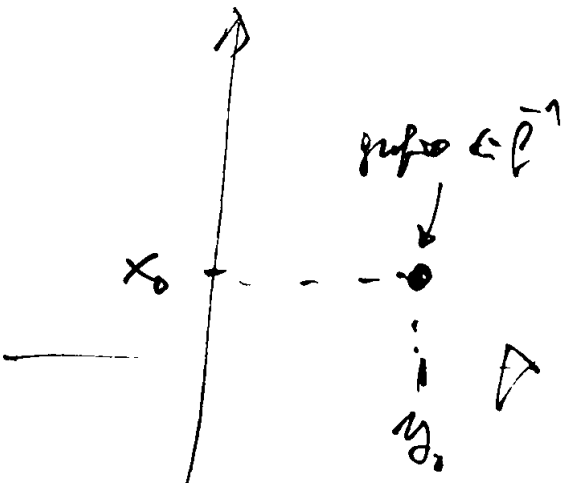
La funzione inversa fa tornare indietro

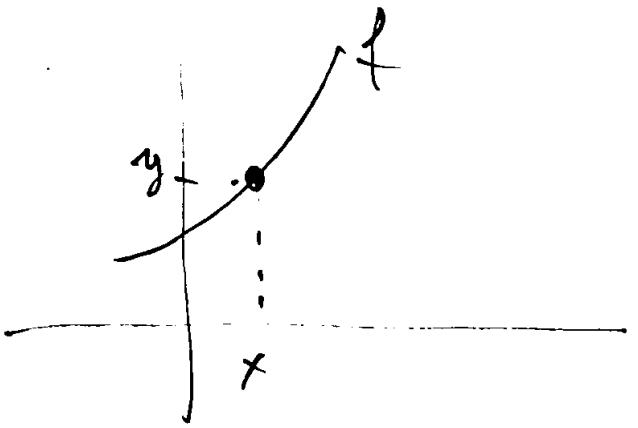
fa tornare 3 in 1

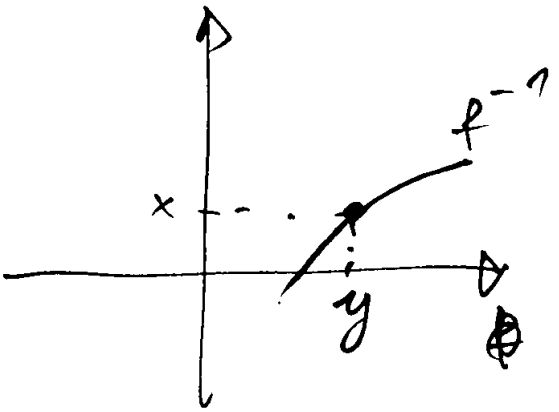


questo è un fatto generale

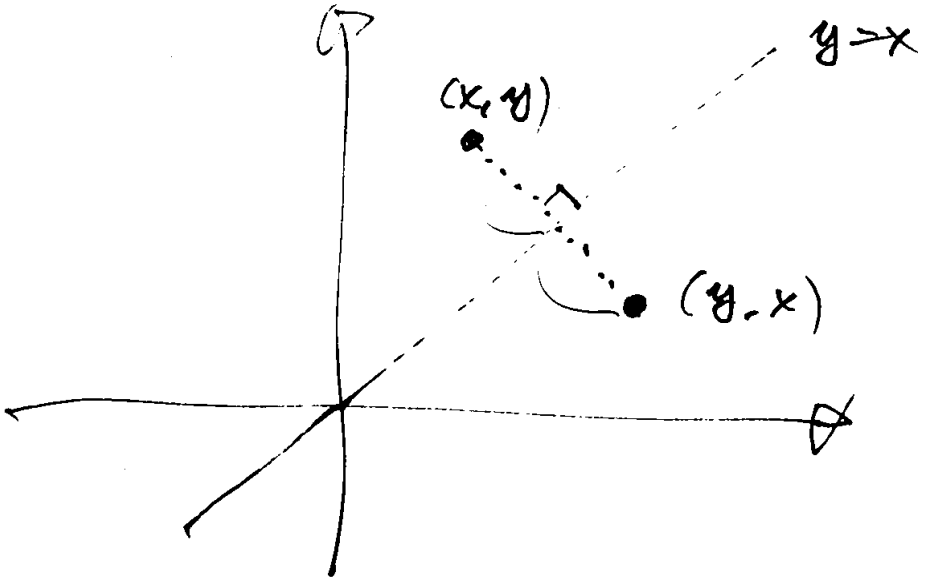




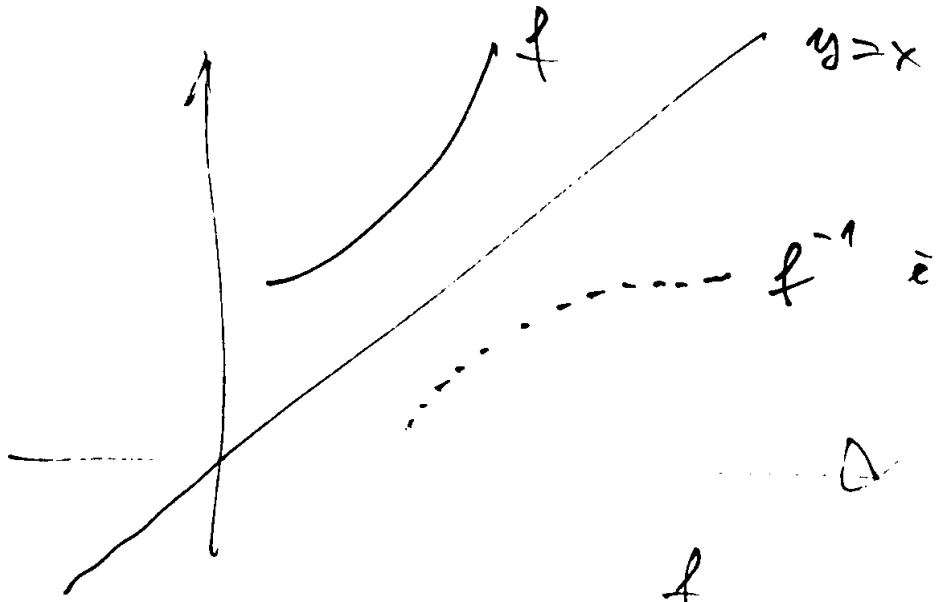




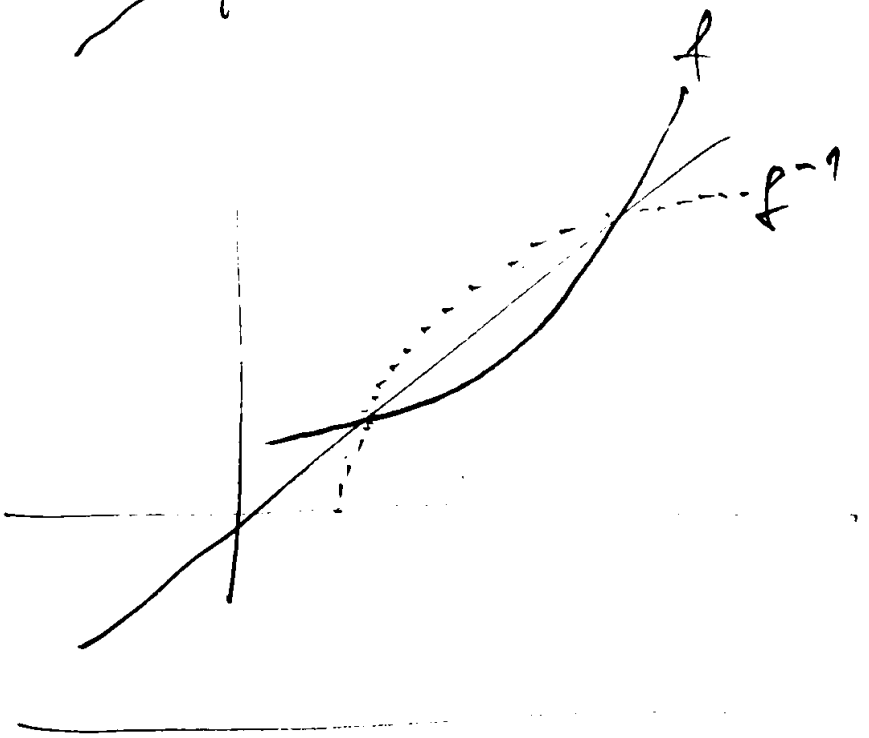
simmetria rispetto alla bisettrice

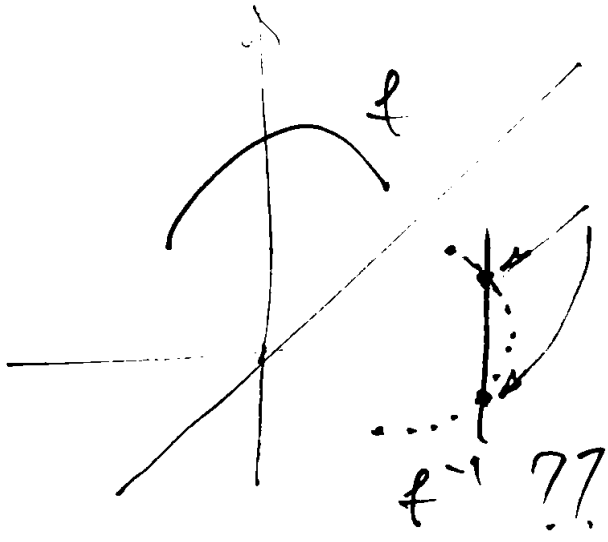


(y,x) è lo <u>specchio</u> di (x,y) rispetto allo specchio che è la bisettrice



è lo specchio del grafico di f



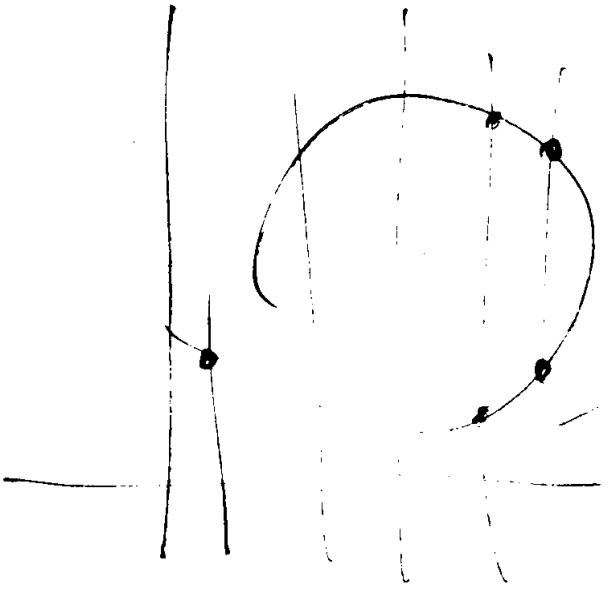


la retta verticale in cui il grafico in 2 punti violato dalla def. di funz.

non è una funzione

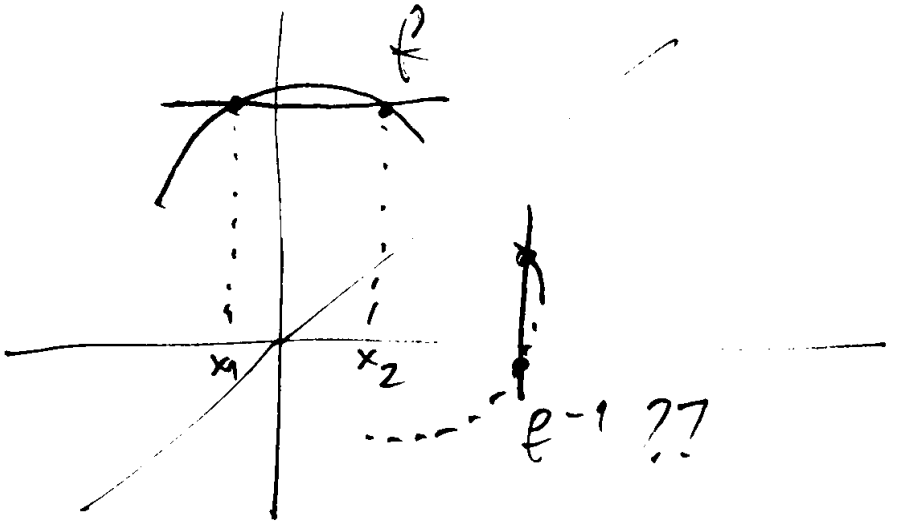
per essere una funzione, un grafico deve incontrare ogni retta verticale in <u>al più un</u> punto (uno o nessuno)

26 nov. 2020 - r.13



non è una funzione

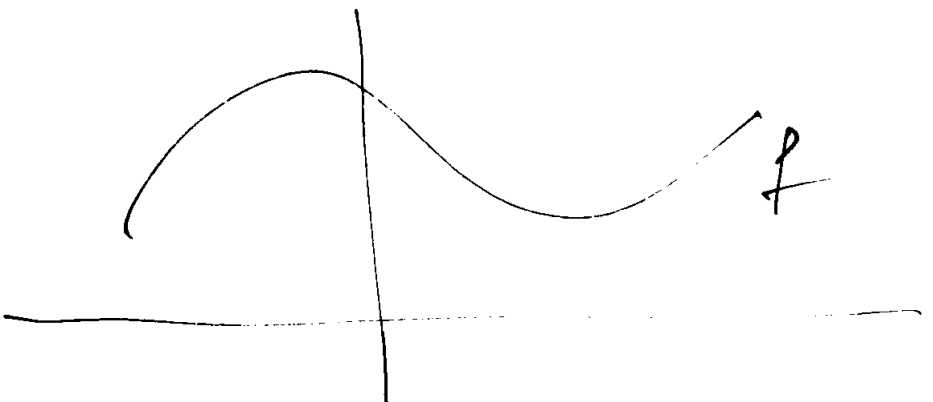
- rette verticali



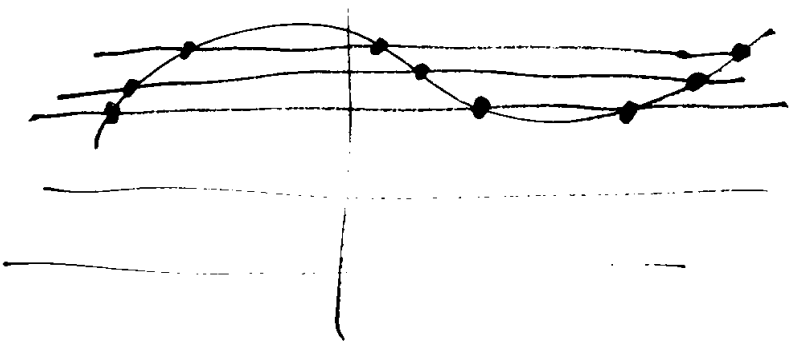
$f(x_1) = f(x_2)$ $\quad x_1 \neq x_2$

f non è iniettiva

criterio geometrico di iniettività



intersechiamo il grafico con rette orizzontali



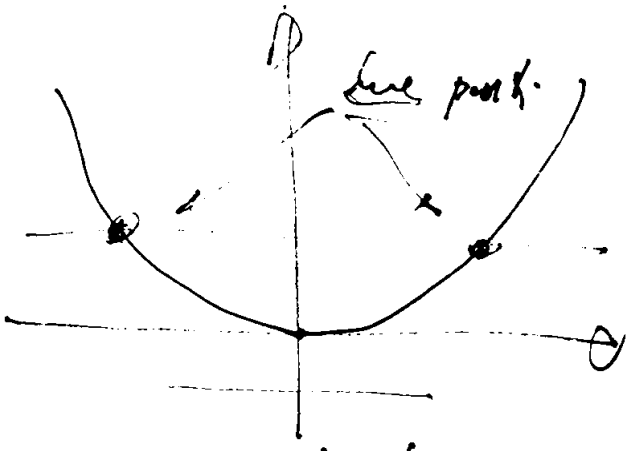
guardiamo quanti punti di intersezione
ci sono col grafico

Se ci sono rette che hanno più di una intersezione, la funzione non è iniettiva

Se tutte le rette orizzontali intersecano in al più un punto il grafico, la funzione è iniettiva

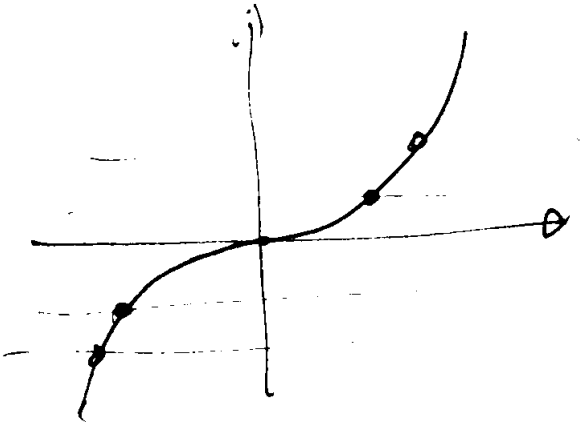
Esempio concreti

$f(x) = x^2$



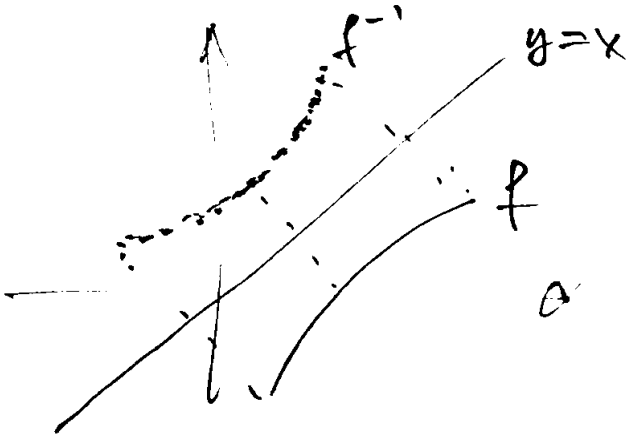
non iniettiva

$f(x) = x^3$



iniettiva

FUNZIONI INVERSE SIMBOLICHE ≡ GEOMETRICHE

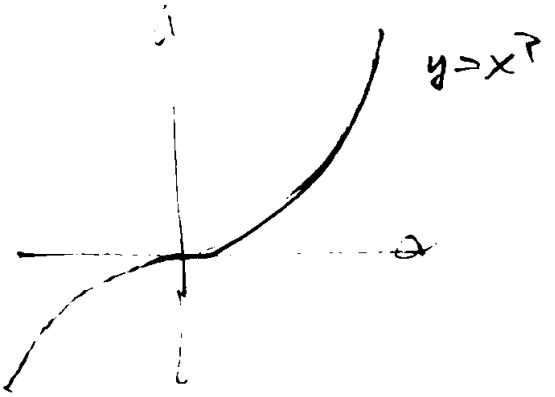


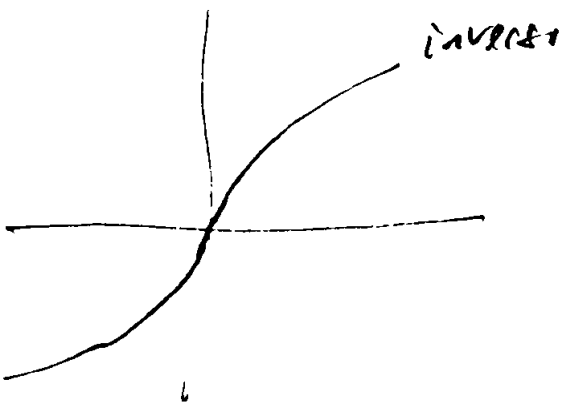
$$y = f(x) \rightsquigarrow f^{-1}(y) = x$$

trovare una formula

$$y = x^3 = f(x)$$

$$f^{-1}(y) = ?$$





$y = x^3 \iff x = \sqrt[3]{y}$ radice cubica reale

$\sqrt[3]{-8} = -2$

surd

$(-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} \dots$

Più in generale

$y = \text{forma}(x)$

$x = \text{forma inversa}(y)$

Il Problema è risolvere una equazione nell'incognita y

può essere difficile

Esempio

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

equazione $y = f(x)$ (incognita)

x è incognita

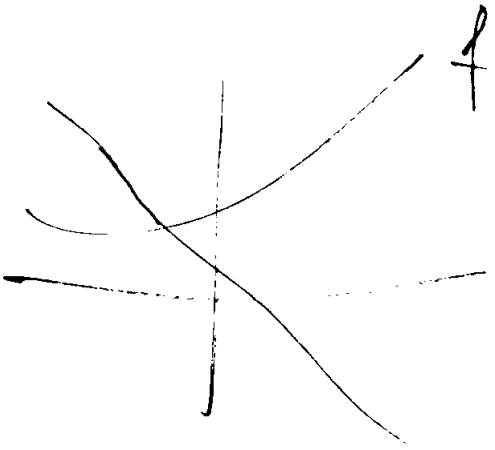
$y = \frac{x}{x-1}$ va risolta rispetto a x

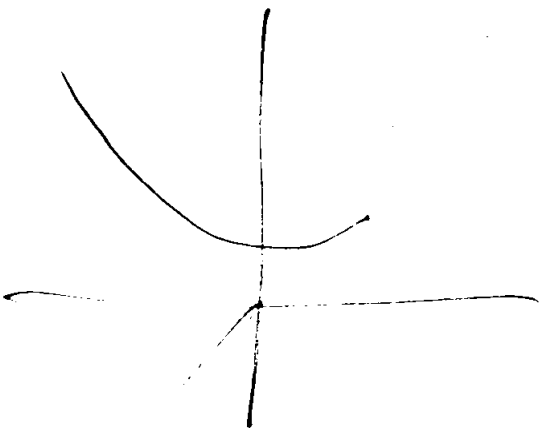
$(x-1)y = x$

$xy - y = x$

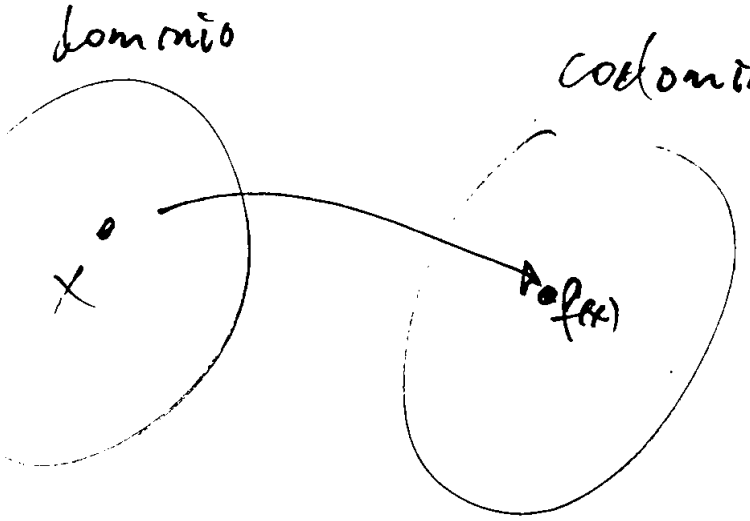
$x(y-1) = y$

Ho la formula della funzione inversa $\boxed{x = \frac{y}{y-1}} = f^{-1}(y)$





funziona?
inverso?



$y = x^2$ $\qquad$ $x = \pm\sqrt{y}$

due soluzioni

FUNZIONI INVERSE

in ambito puramente insiemistico

$f \qquad f^{-1}$

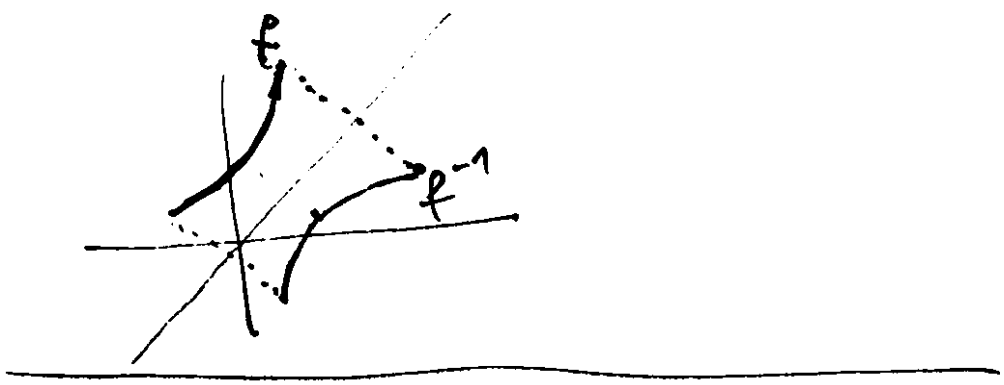
$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

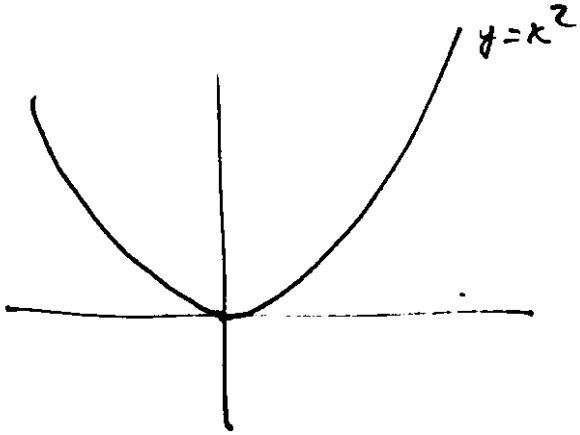
$\forall x$ negli insiemi opportuni

nel caso di funzioni dei reali nei reali c'è una interpretazione geometrica semplice



CASI NOTEVOLI

$f(x) = x^2$



non è iniettiva

non c'è inversa

$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \geq 0$

$\sqrt{(x^2)} = x \quad \forall x \geq 0$

$f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall x \geq 0$

$(\sqrt{x})^2 = x \quad \forall x \geq 0$

$\sqrt{x^2} = |x|$ vera $\forall x \in \mathbb{R}$

Quadrato e radice sono una l'inverso dell'altro

$sqr(x) = \sqrt{x}$

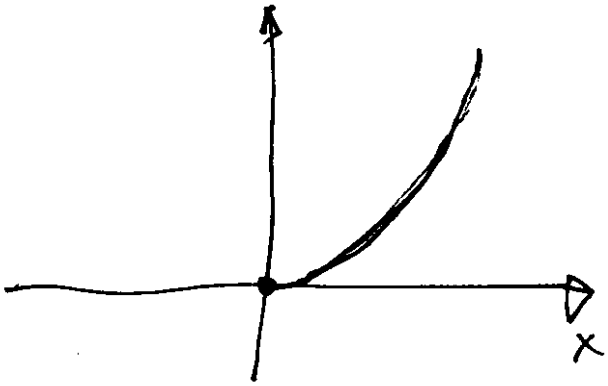
$sq(x) = x^2 \quad \forall x \geq 0$

$sqr = sq^{-1} \qquad sq = sqr^{-1}$

$sqr \circ sq\,(x) = x$

$sq \circ sqr\,(x) = x$

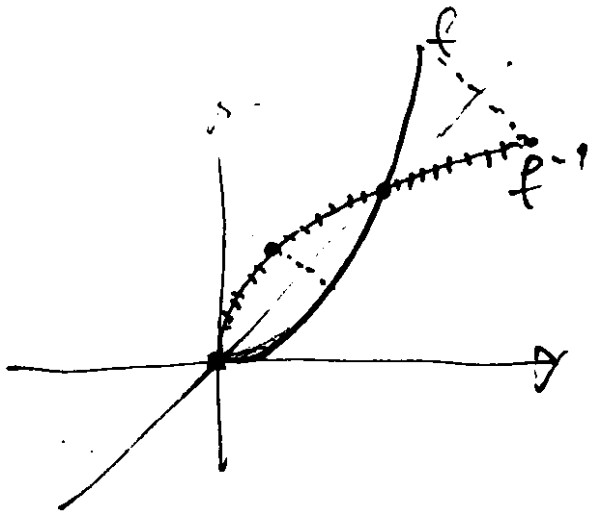
RESTRINGIAMO IL DOMINIO



Consideriamo la f solo sugli $x \geq 0$

(A rigore dovremmo usare un nome diverso)

Questa restrizione è invertibile



Simbolicamente dobbiamo risolvere l'equazione

$y = f(x)$

(dato, incognita)

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$x = f^{-1}(y)$

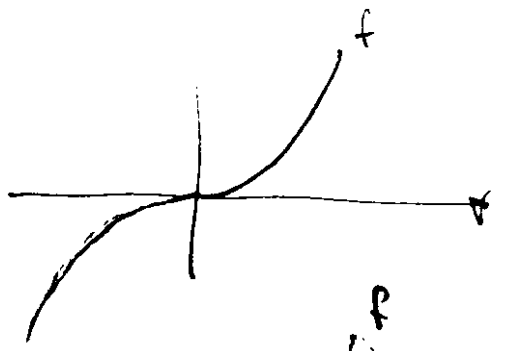
(dipendente, variabile indep.)

$$\boxed{f^{-1}(x) = \sqrt{x}}$$

formula della funzione inversa

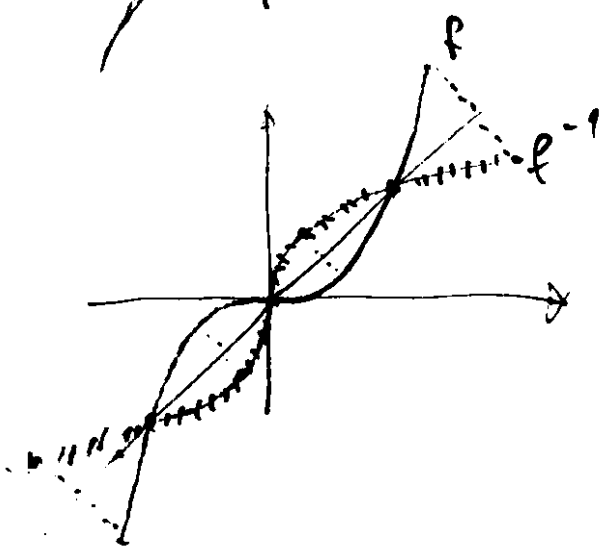
2 dic. 2020 - p.4

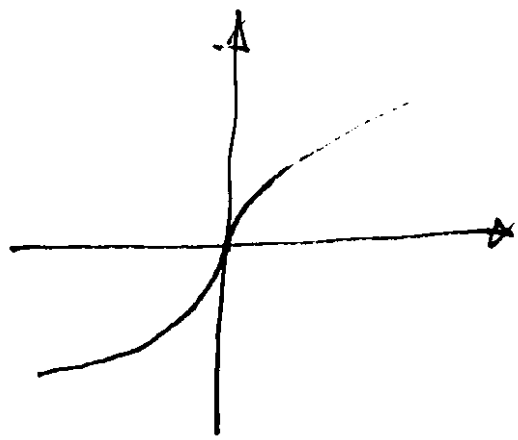
CUBO



$f(x) = x^3$

è iniettiva, quindi invertibile





PER VIA SIMBOLICA

Risolvere $y = x^3$ rispetto a $x \in \mathbb{R}$

$x = \sqrt[3]{y}$ è pericolosa quando $y < 0$

$$\boxed{\sqrt[3]{y}} = y^{1/3} = y^{2/6} \dots$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

il cubo e la radice cubica
sono uno l'inverso dell'altro

$$\sqrt[3]{y^3} = y$$

$$\sqrt[3]{x^3} = x \qquad \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Più in generale $f(x) = x^\alpha$ $(x \geq 0)$

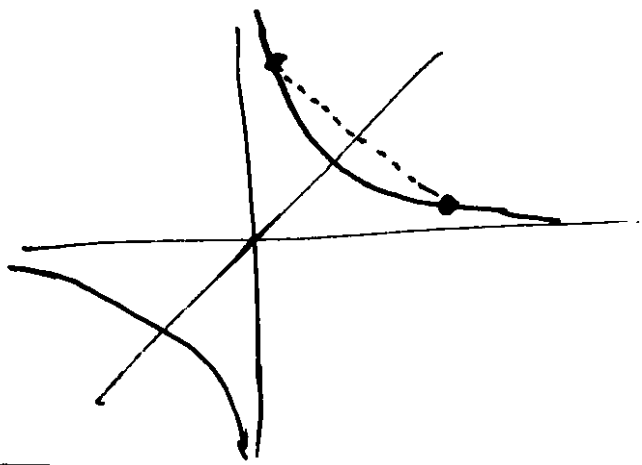
$$f^{-1}(x) = x^{1/\alpha}$$

$$f^{-1}(f(x)) = (x^\alpha)^{1/\alpha} = x^{\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}} = x^1 = x$$

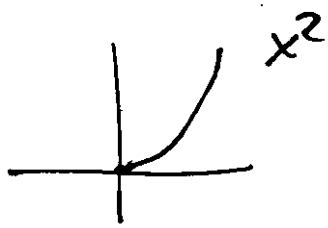
$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

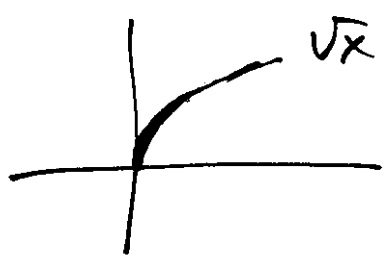
$$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x} = f(x)$$

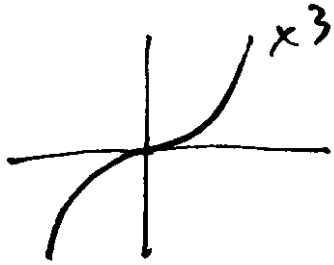
Questa funzione coincide con la propria inversa (caso raro)

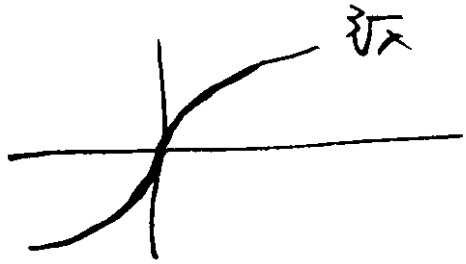


GRAFICI DELLE POTENZE









2 dic. 2020 - p. 6

ESPONENZIALI

3^7

x^2 ← esponente

↑ base

vista come funzione, la base è variabile e l'esponente è fisso // POTENZE

ESPONENZIALI

2^x ← esponente variabile

↑ base fissa

$$2^{x+1} = 2^x \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^x =$$

$= \text{doppio di } 2^x$

---

x^x base ed esponente variano entrambi

non è né potenza né esponenziale

Ci interessano gli esponenziali in base >0

$\left((-1)^n \text{ ci serve solo per } n \in \mathbb{Z}\right)$

Caso banale : base $=1$

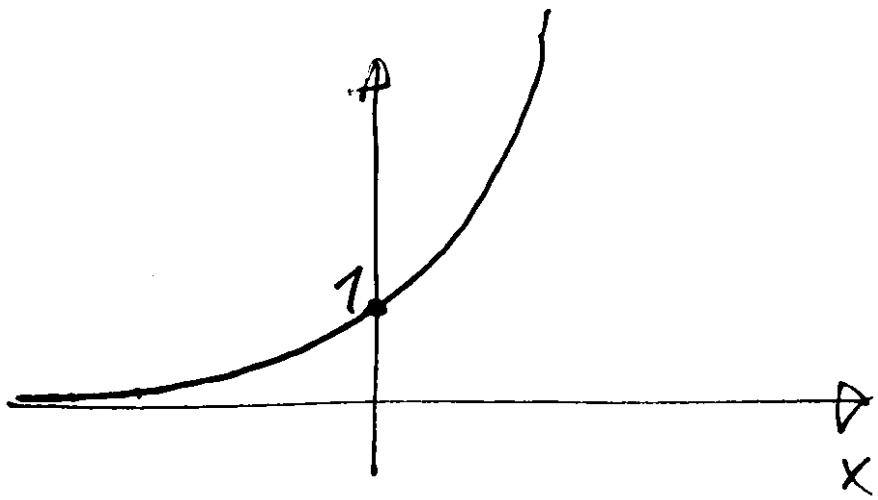
$1^x = 1$ sempre

Il caso base $=1$ divide gli esponenziali in 2 categorie

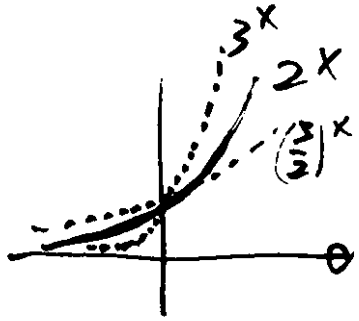
base >1 : esponenziali crescenti

$2^x \quad 3^x \quad 4^x \quad 10^x \quad e^x \quad \left(\frac{3}{2}\right)^x$

GRAFICO



DA RICORDARE



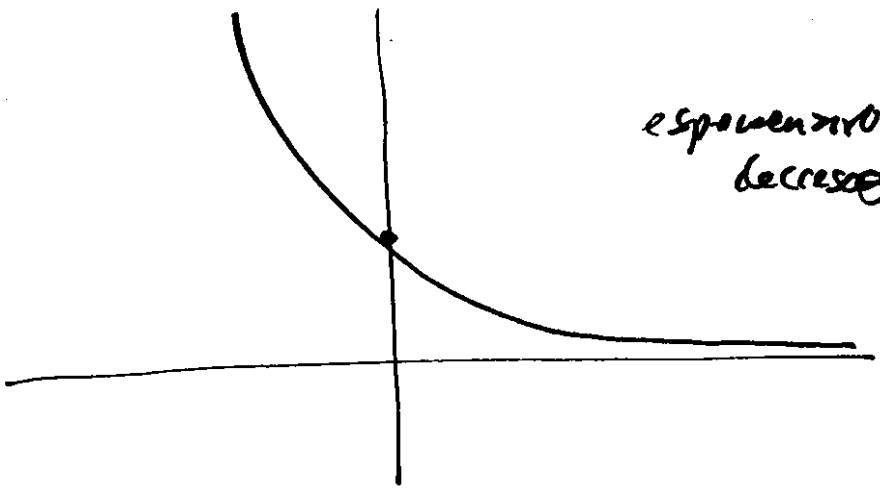
$0 < \text{base} < 1$ esponenziali decrescenti

decadimento esponenziale

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \neq \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $e^{x \cdot \text{negativo}}$

e^{-x} e^{-2x}

$(e^{\text{numero negativo}})^x$



esponenziale decrescente

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ trovare il tempo di dimezzamento

$= 3^{-x} = e^{-x \ln 3}$

$= \frac{1}{3^x}$

PROPRIETÀ ~~ALGEBRICA~~ DEGLI ESPONENZIALI

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

Notazione alternativa per gli esponenziali che useremo spesso tanto

$$a^x = \exp_a x$$

sotto $\sin x$ $\cos x$

$$e^x = \exp(x) = \exp x$$

$$e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

quando l'esponente è grosso può esser preferibile la forma exp

$$= \exp\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}$$

COMPORTAMENTO DEGLI ESPONENZIALI RISPETTO ALL'ORDINAMENTO cioè rispetto alle disuguaglianze

ESPONENZIALI CRESCENTI

$a^x > 1$

$$x < y \iff a^x < a^y$$

$$\begin{array}{ll} > & > \\ \leq & \leq \\ \geq & \geq \\ = & = \\ \neq & \neq \end{array}$$

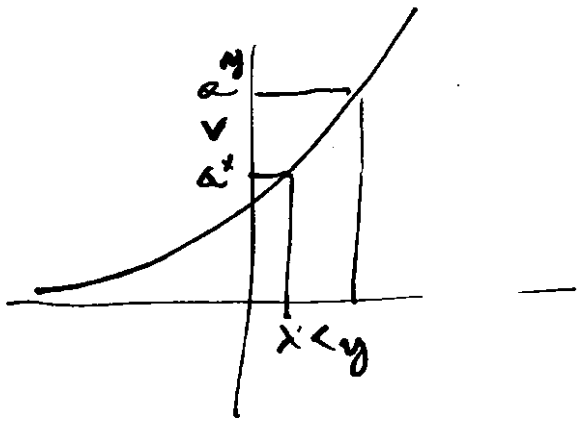
con la notazione $\exp$

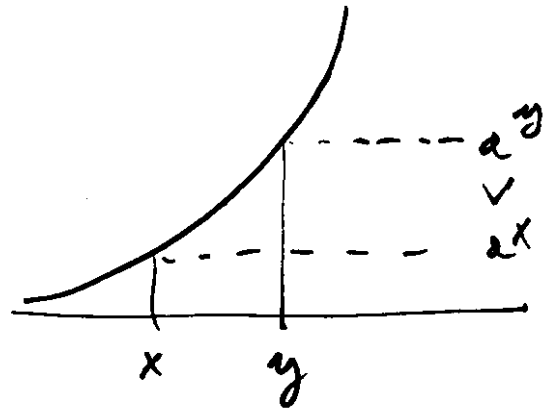
$$x < y \iff \exp_a x < \exp_a y$$

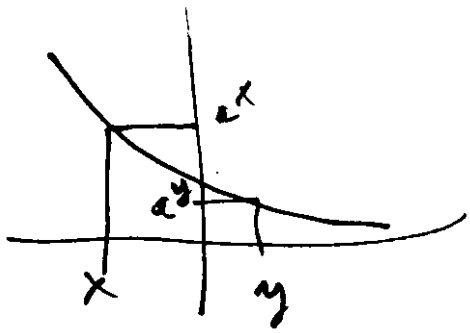
Con gli ESPONENZIALI DECRESC. le disug. ci invertono $\boxed{0 < a < 1}$

$$x < y \iff a^x > a^y$$

GEOMETRICAMENTE







⊗ l'ordinamento si inverte

Esempio

disequazioni con esponenziali

$$3^x > 9^{x+1} \quad ?$$

basi diverse

1° passo: riportarsi alla stessa base scegliamo 3

$$3^x > \left(3^2\right)^{x+1} \qquad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$3^x > 3^{2(x+1)} \iff x > 2(x+1) \dots$$

stessa base >1 esp. cresc

$$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}}(2(x+1))$$

$$\Updownarrow$$

$$x > 2(x+1)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{1+3x}$$ esp decr

$$\Updownarrow$$

$$x < 1+3x$$

$$\Rightarrow$$

alternativa

$$(2^{-1})^x > (2^{-1})^{1+3x}$$

$$2^{-x} > 2^{-1-3x}$$ esp. cresc.

$$\Updownarrow$$

$$-x > -1-3x$$

DISEQ. TRASCENDENTI

$x > 2^x$ non è risolubile con metodi algebrici

LOGARITMI

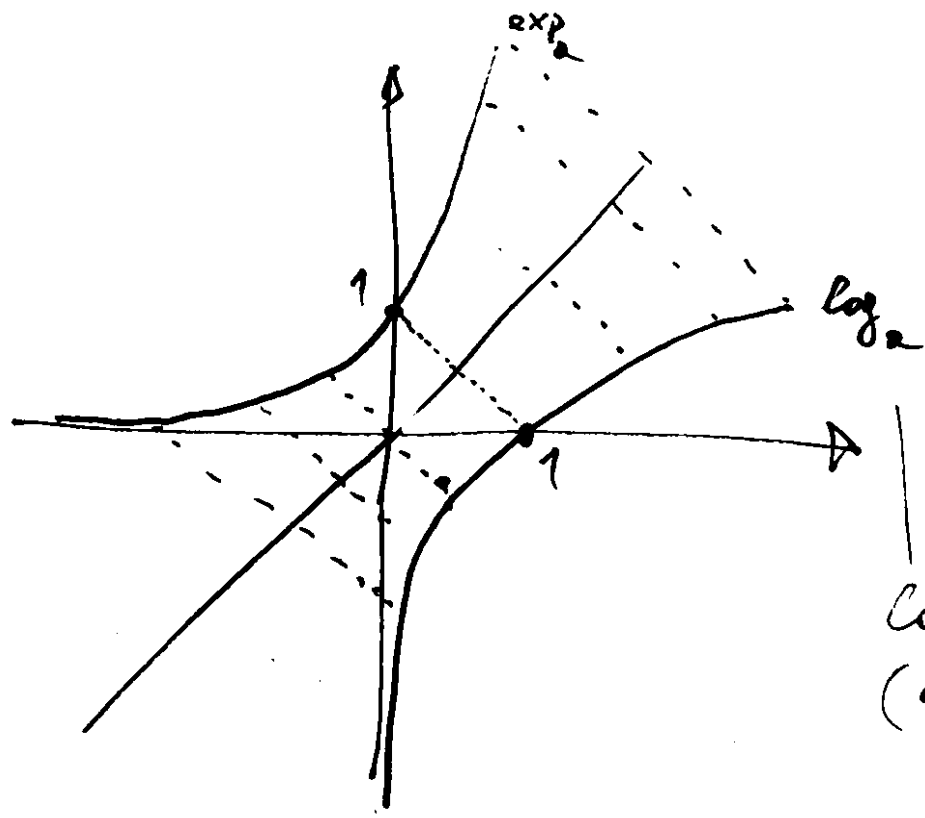
IL LOGARITMO È LA FUNZIONE INVERSA DELL'ESPONENZIALE

(analogia: la radice è la funzione inversa della potenza)

GEOM

esponenziale crescente

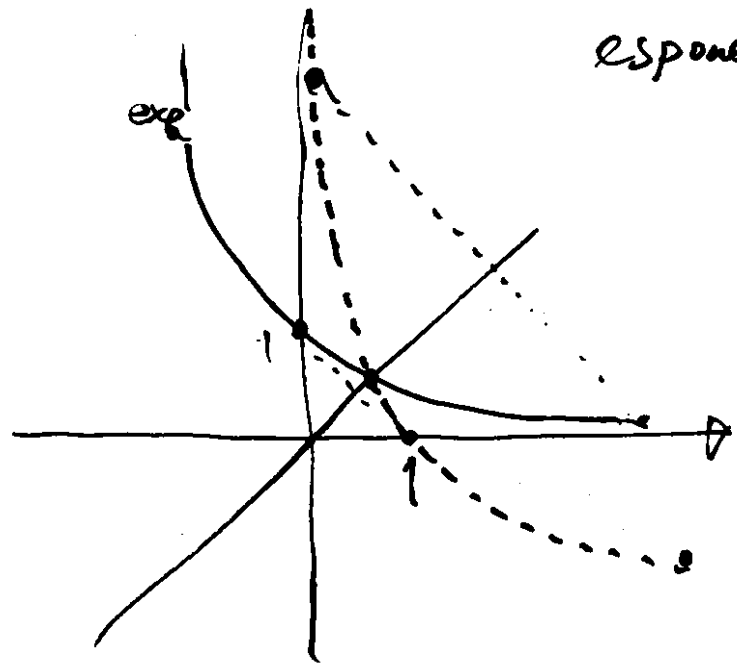
e^x $(a>1)$

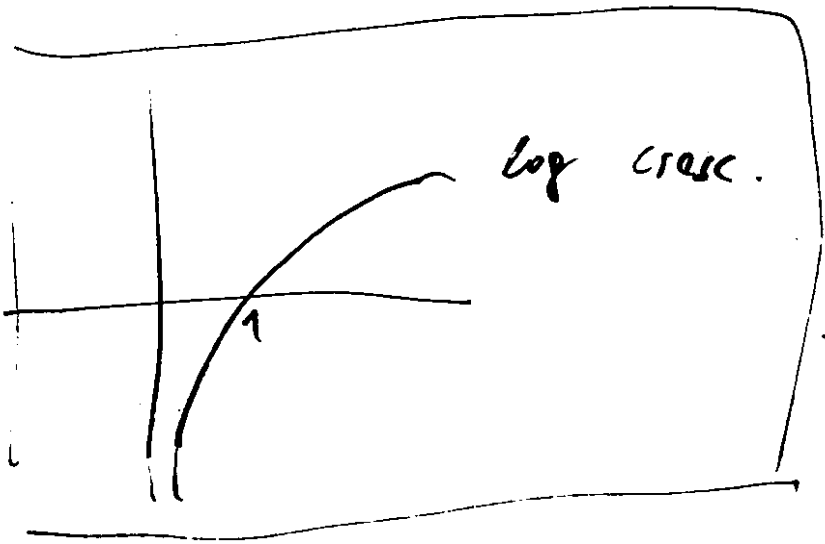


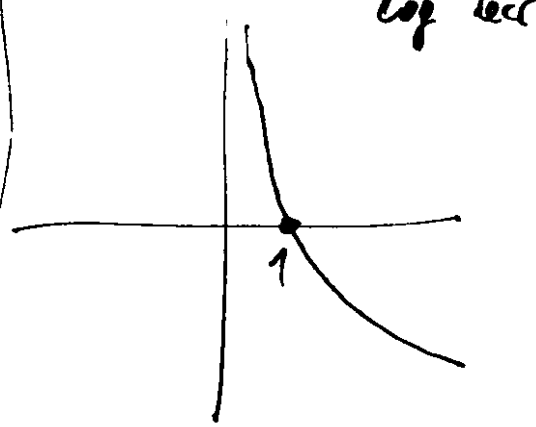
Logaritmo (crescente)

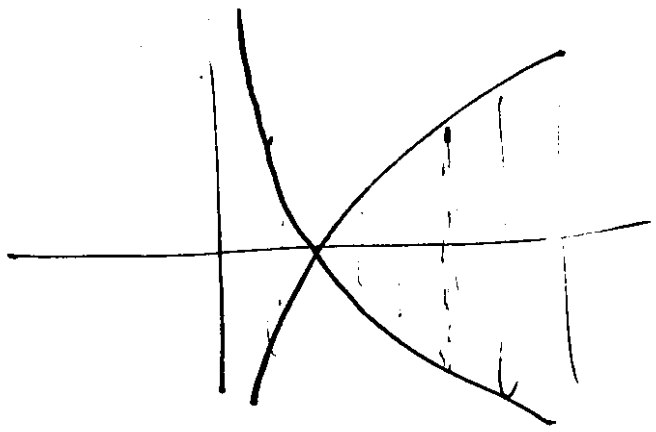
esponenziale decresc.

$0<a<1$









SIMBOLI

$\log_a x$ Simbolo per disteso

$\lg_a x$ Abbreviato

caso $a = e$ si può sottintendere

$\log x$ $\lg x$ base e sottintesa

In alcuni testi $\log$ è usato per il logaritmo in base 10. Non in questo corso.

2 dic. 2020 — p. 15

LOGARITMO NATURALE in base e

Notazione inglosassone

$\log_{10} x$

$$\ln x = \log_e x = \log x = lg\, x$$

$\ln x$ l minuscola, non I maiuscola

PROPRIETÀ ALGEBRICHE DEI LOGARITMI

Dominio

$$\text{dom}\, \log_a =]0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$\log_a x$ ha senso solo per $x > 0$

$\log_a 0$ non esiste ($= -\infty$)

($\sqrt{x}$ esiste per $x \geq 0$)

$\log_a = (\exp_a)^{-1}$

$f^{-1}(f(x)) = x$

$$\boxed{\log_a(\exp_a x) = x}$$

$f(f^{-1}(x)) = x$

$$\boxed{\exp_a(\log_a x) = x}$$

$\exp_a$ e $\log_a$ si cancellano a vicenda

insieme

$$\exp_a \circ \log_a (\dots) = (\dots)$$

composizione

$a = e$ caso 'naturale'

$$\exp \circ \log (x) = x$$

Notazione più tradizionale $\exp_a x = a^x$

$$\exp_a (\log_a x) = x$$

$$\boxed{a^{\log_a x} = x}$$

$$\log_a (\exp_a (x)) = x$$

$$\boxed{\log_a (a^x) = x}$$

PROPRIETÀ ALGEBRICA FONDAMENTALE

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

(prodotto → somma)

il logaritmo trasforma prodotti in somme

conseguenza della proprietà degli esponenziali

$$\exp_a(x+y) = (\exp_a x)(\exp_a y)$$

(somma → prodotto)

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

ALTRE FORMULE

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$$

$$\log \frac{1}{x} = -\log x$$

$$\log x^\alpha = \alpha \log x \qquad x > 0$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

il log trasforma divisioni in sottrazioni

$$\log(x+y) = ?$$

$$= \log\left(x \cdot \left(1 + \frac{y}{x}\right)\right) =$$

prodotto

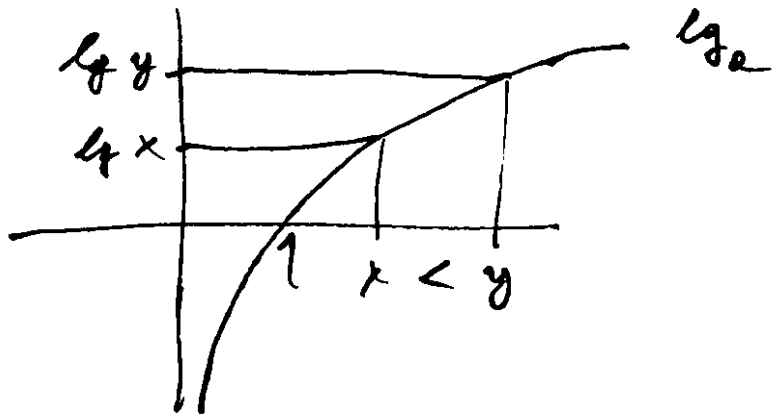
$$= \log x + \log\left(1 + \frac{y}{x}\right)$$

IL LOGARITMO E L'ORDINAMENTO

Caso di riferimento: logaritmo crescente (base > 1)

$$(0 <)\ x < y \iff \log_a x < \log_a y$$

stesso disug.



DISEQ. CON LOG

$$\log_{\frac{1}{2}}(8-x^2) \geq -1 = \log_{\frac{1}{2}} \exp_{\frac{1}{2}}(-1)$$

condizione di esistenza

l'argomento del log deve essere >0

conviene esplicitarla, non dimenticarla

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(8-x^2) \geq -1 \\ 8-x^2 > 0 \qquad (\cancel{x>0}) \end{cases}$$

$\exp_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{2}}$ si cancellano quando s'incontrano

è decr.

$$\begin{cases} \cancel{\exp_{\frac{1}{2}}}\left(\cancel{\log_{\frac{1}{2}}}(8-x^2)\right) \leq \exp_{\frac{1}{2}}(-1) \\ 8-x^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 8-x^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \\ 8-x^2 > 0 \end{cases}$$

...

2 dic. 2020 - p. 20

Altro modo

$$\log_{\frac{1}{2}}(8-x^2) \geq -1 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\exp_{\frac{1}{2}}(-1)\right)$$

$$8-x^2 \leq \exp_{\frac{1}{2}}(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

ESPONENZIALI E LOGARITMI

VALORI NOTEVOLI $\quad a > 0$

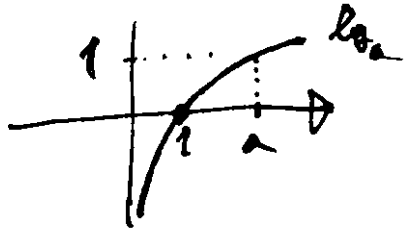
$a^0 = 1 \qquad a^1 = a$

$a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad 1^x = 1$

$a \neq 1$

$\log_a 0$ non esiste $\qquad \log_1$ non ha senso

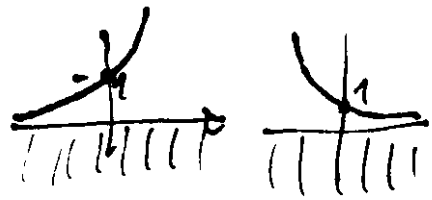
$\log_a 1 = 0$



$\log_a a = 1$

Disuguaglianze notevoli $\quad (a > 0)$

$a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



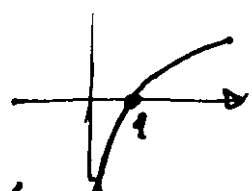
se $a > 1$ (esponenziale crescente)

$x > 0 \iff a^x > 1$

$x < 0 \iff a^x < 1$

$\log_a x$ ha senso solo per $x > 0$

$\log_a x$ può essere positivo o negativo



caso crescente:

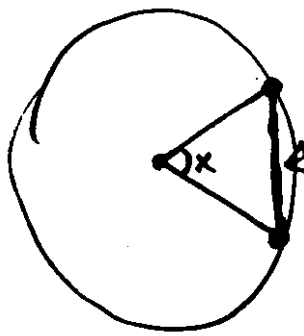
$\log_a x > 0 \iff x > 1$

$\log_a x < 0 \iff 0 < x < 1$

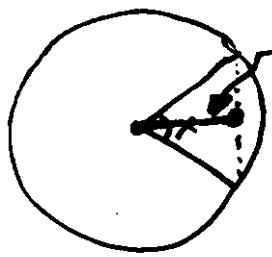
3 Lic. 2020 - P 2

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

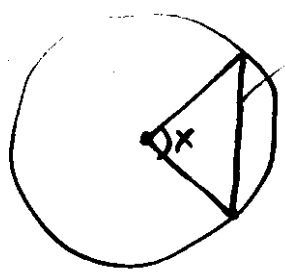
sen cos

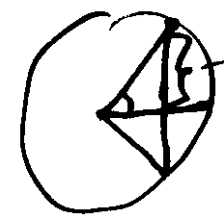


corda (x) = lunghezza del segmento



saetta (x) = lunghezza del





corda (x) = 2 sen $\frac{x}{2}$

$\text{sen}\frac{x}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)$ corda (x)

saetta (x) = ?

metà

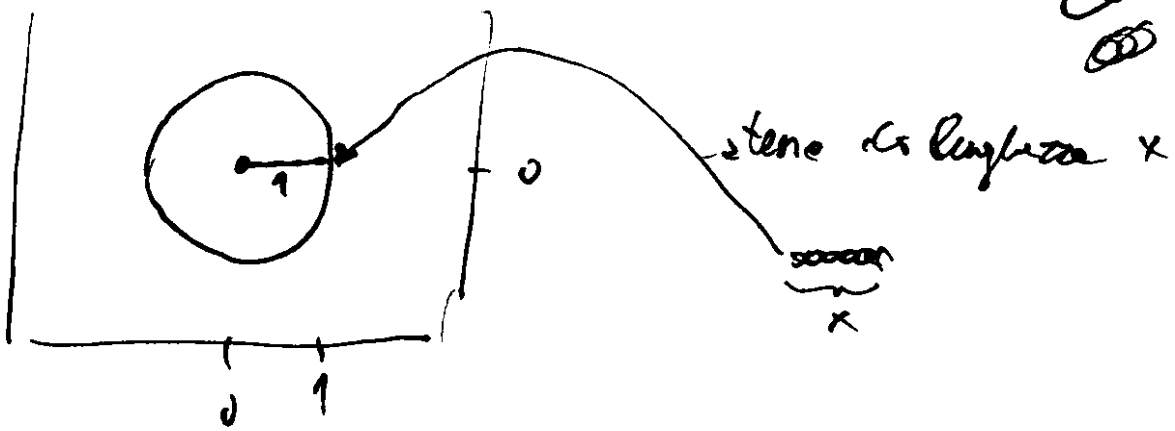
$\text{sen} = \frac{\text{metà}}{\text{corda}}$

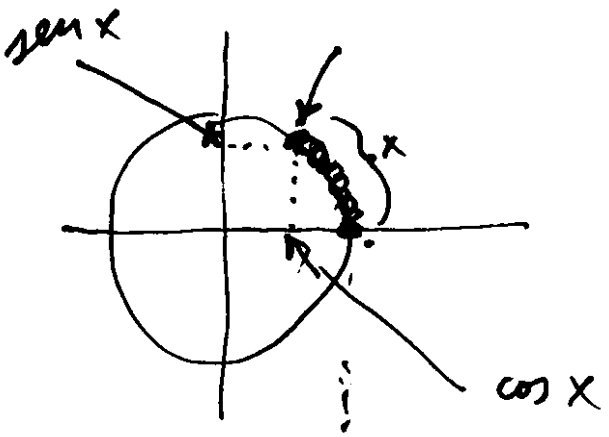
Seno da dove viene?

metà in latino

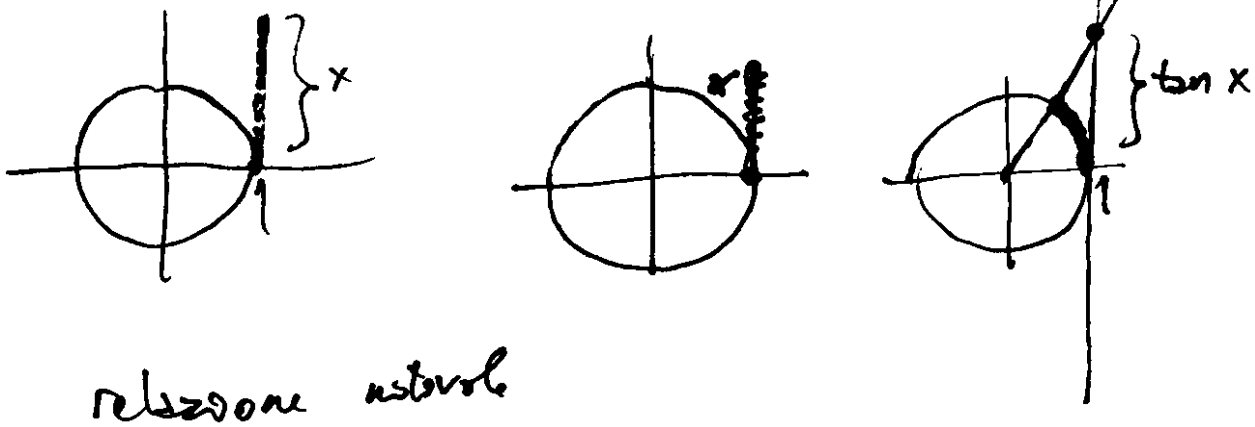
in arabo scrivono con gobba, mezzaluna

catena per bicicletta





tangente



relazione notevole

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

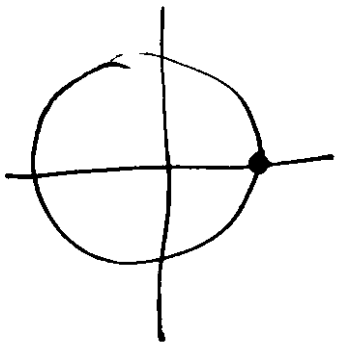
uso occasionale

Cotangente $\cot x = \frac{1}{\tg x} = \frac{\cos x}{\sen x}$

sen	cos	tan
		tg

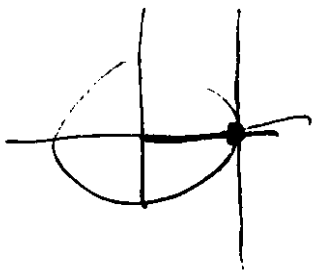
VALORI NOTEVOLI

~~angolo~~ angolo $= 0$



ascissa $= 1$
ordinata $= 0$

$\cos 0 = 1$
$\sen 0 = 0$



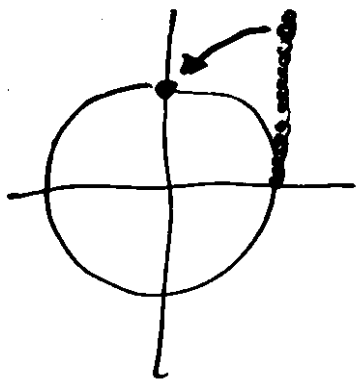
$\tan 0 = \tg 0 = 0$

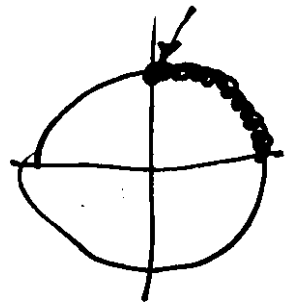
$= \frac{\sen 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$

3 dic. 2020 - p. 5

ALTRI VALORI NOTEVOLI

angolo retto 90°, in radianti $\frac{\pi}{2}$





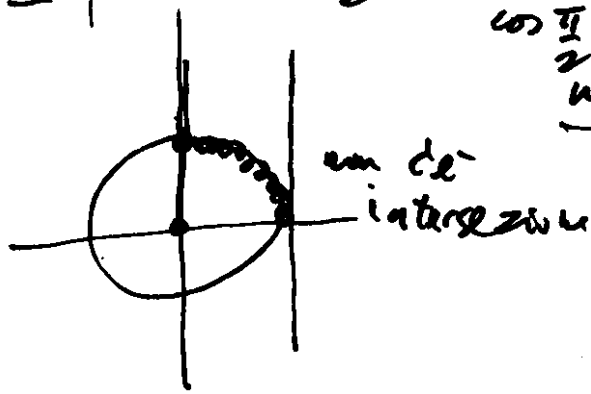
ascissa = 0
ordinata = 1

$\cos \frac{\pi}{2} = 0$

$\sin \frac{\pi}{2} = 1$

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$

non esiste

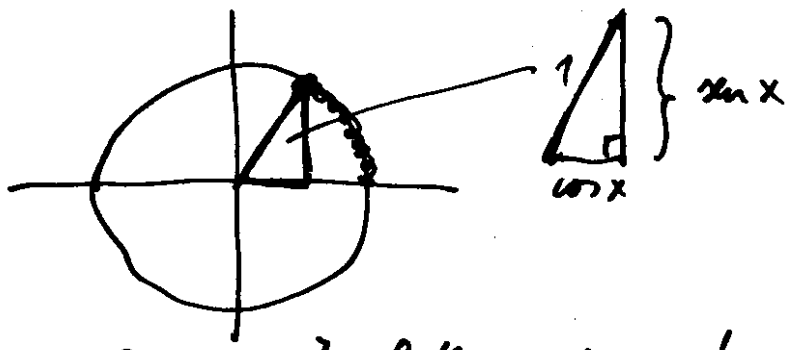


angolo piatto	30°
tre angoli retti	60°
angolo giro	45°

3 dic. 2020 – p. 6

FORMULE NOTEVOLI

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \forall x$$



riflette il fatto che il punto $(\cos x, \sin x)$ sta sul cerchio di raggio 1, col teorema di Pitagora

formule di addizione

$\sin(x+y)$
$\cos(x+y)$ non sono cruciali da ricordare

formule di "prostaferesi"

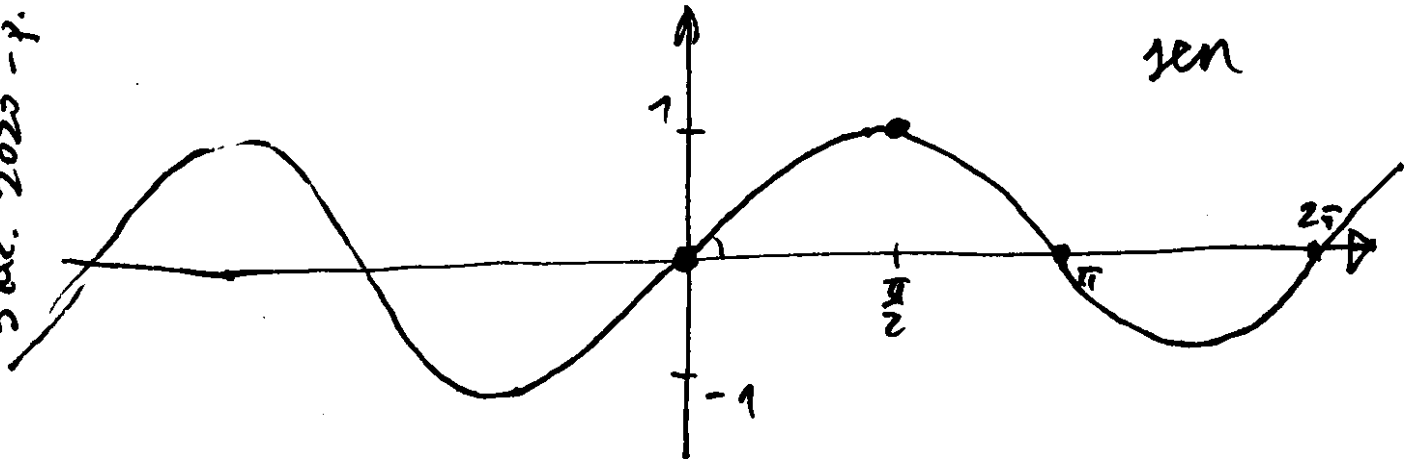
le tireremo fuori al momento di usarle

Formule di duplicazione

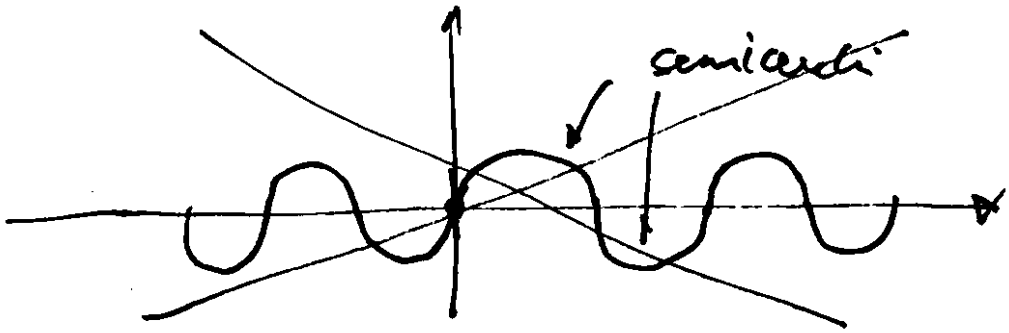
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

GRAFICI delle funzioni trigonometriche

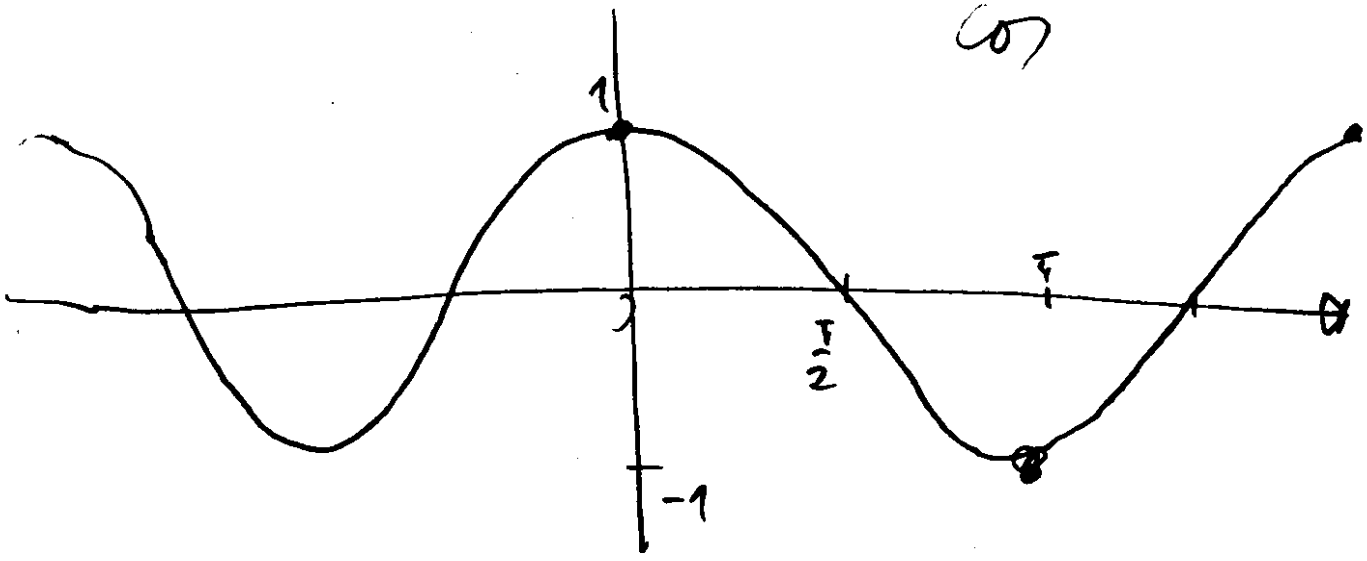
sen



sinusoide

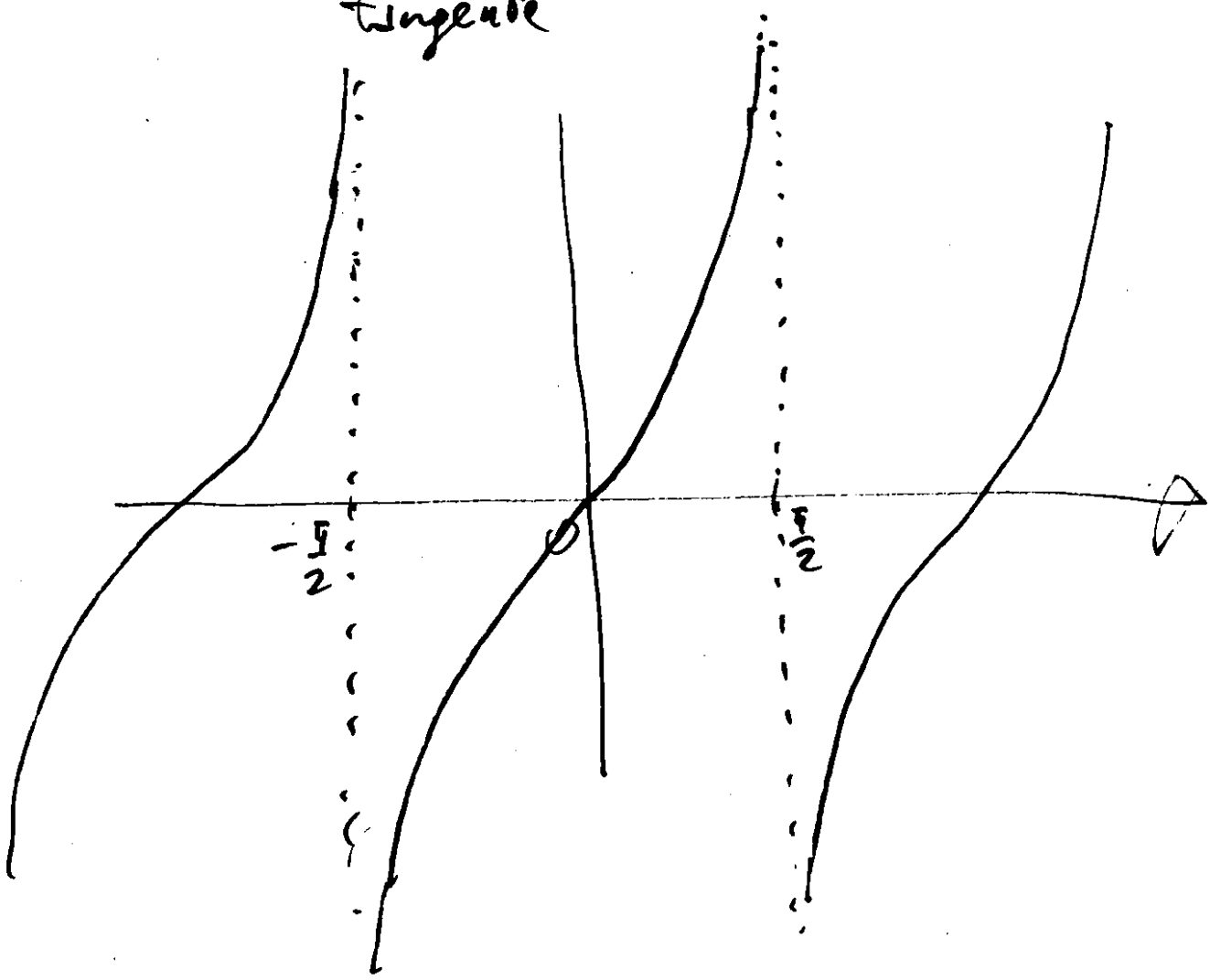


cos



3 déc. 2020 - p. 8

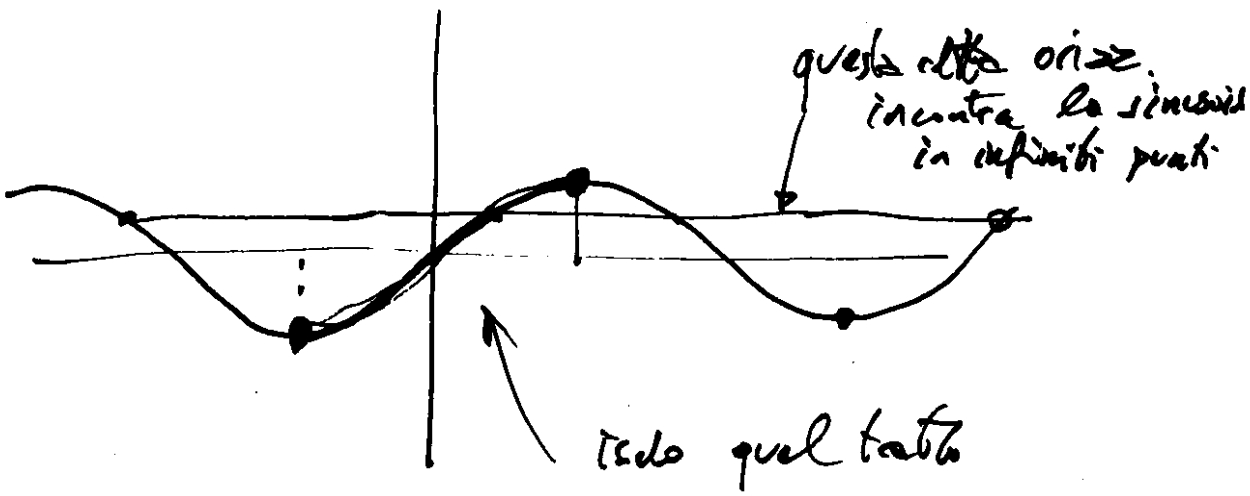
tangente

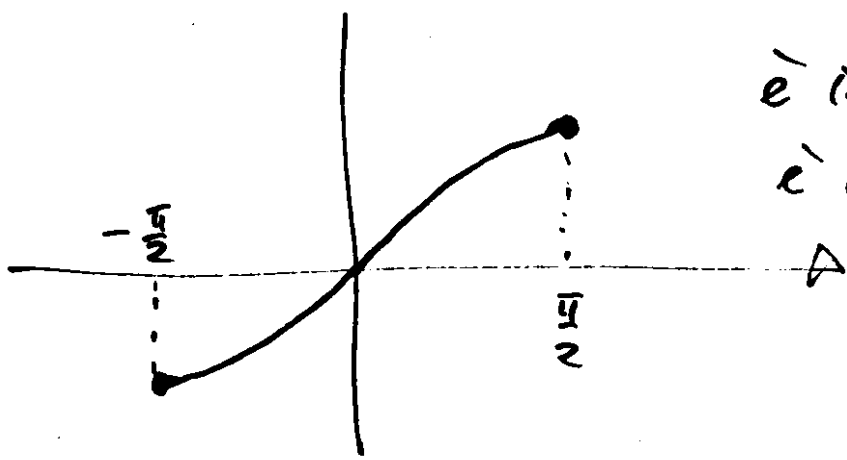


FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE GONIOMETRICHE

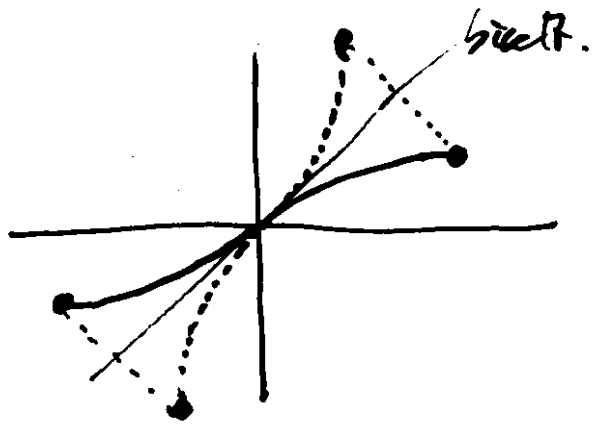
sen cos tg non sono biiettive quindi non sono invertibili

si prendono restrizioni





è biiettiva!
è invertibile



ARCOSENO

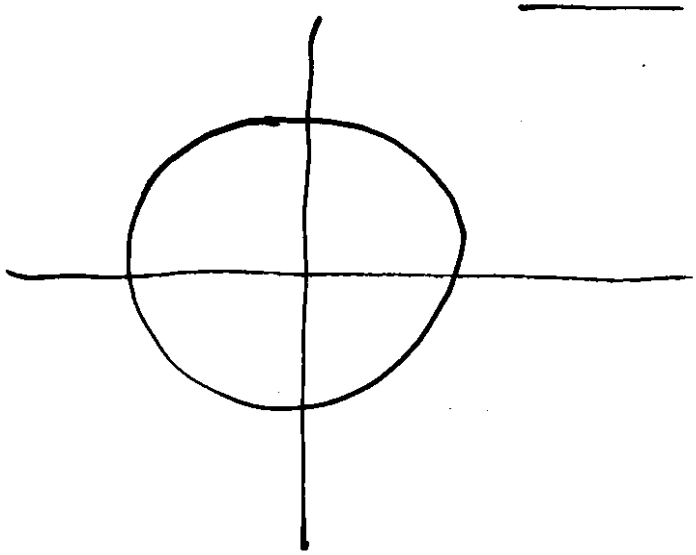
$\arcsin x$ = l'arco il cui seno è x

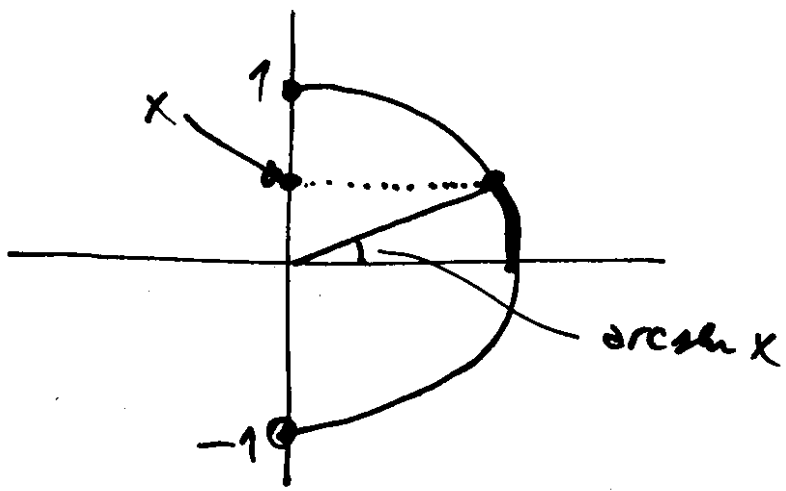
è descrizione corretta dell'oggetto

Arcsen

una sigla parola

$\arcsin(\sin x)$ **NO!!!**

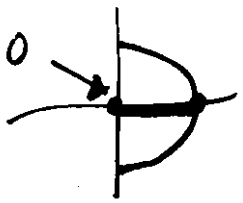




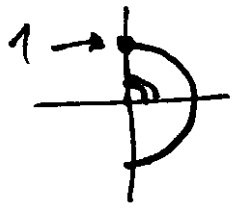
$\arcsin x$ ha senso solo se $-1 \leq x \leq 1$

Valori notevoli

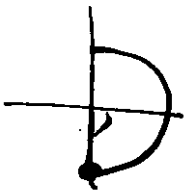
$\arcsen 0 = 0$



$\arcsen 1 = \frac{\pi}{2}$

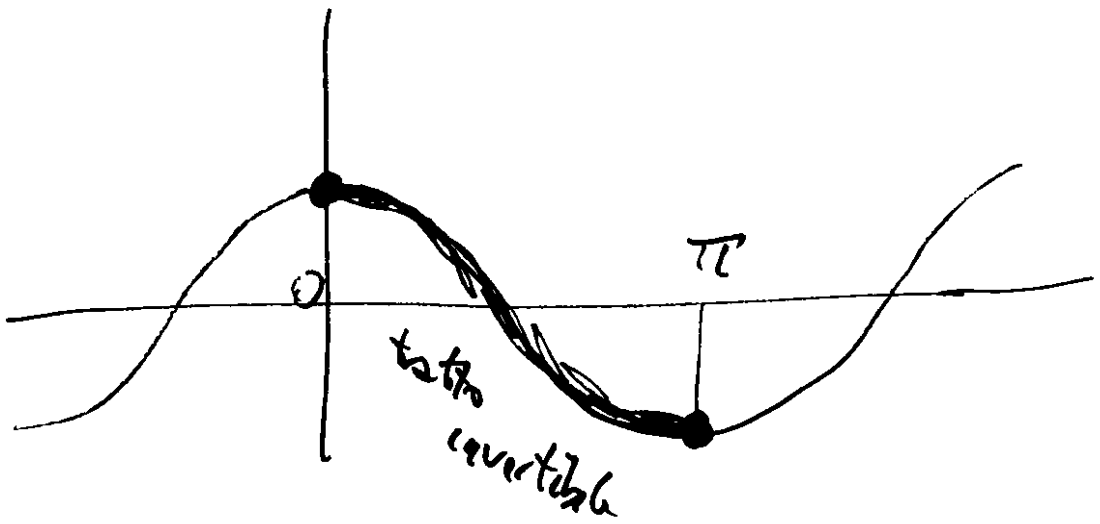


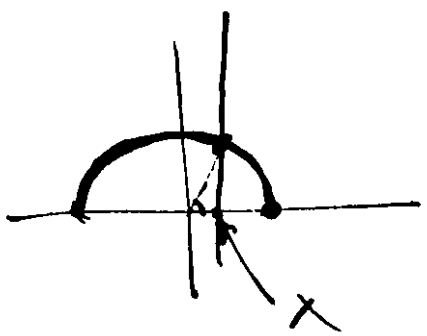
$\arcsen(-1) = -\frac{\pi}{2}$



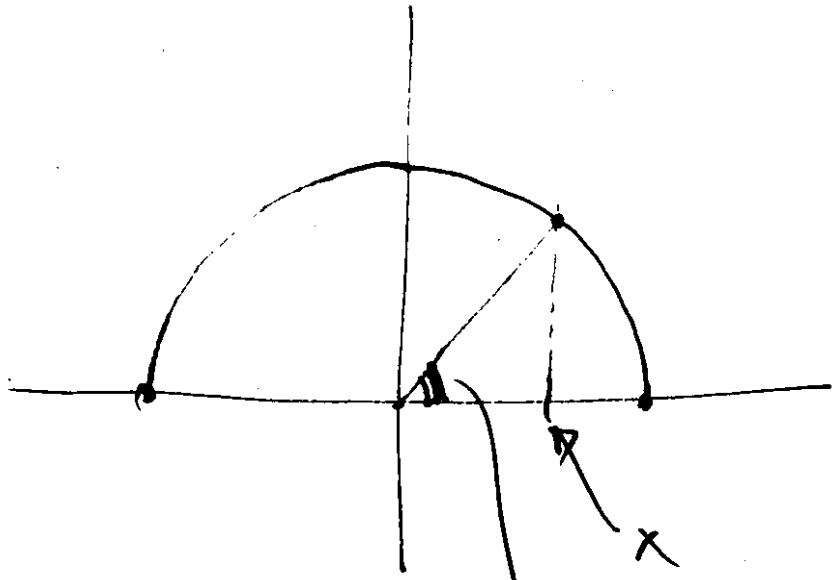
$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsen x \leq \frac{\pi}{2}$

ARCOSENO





3 dic. 2020 — p. 12

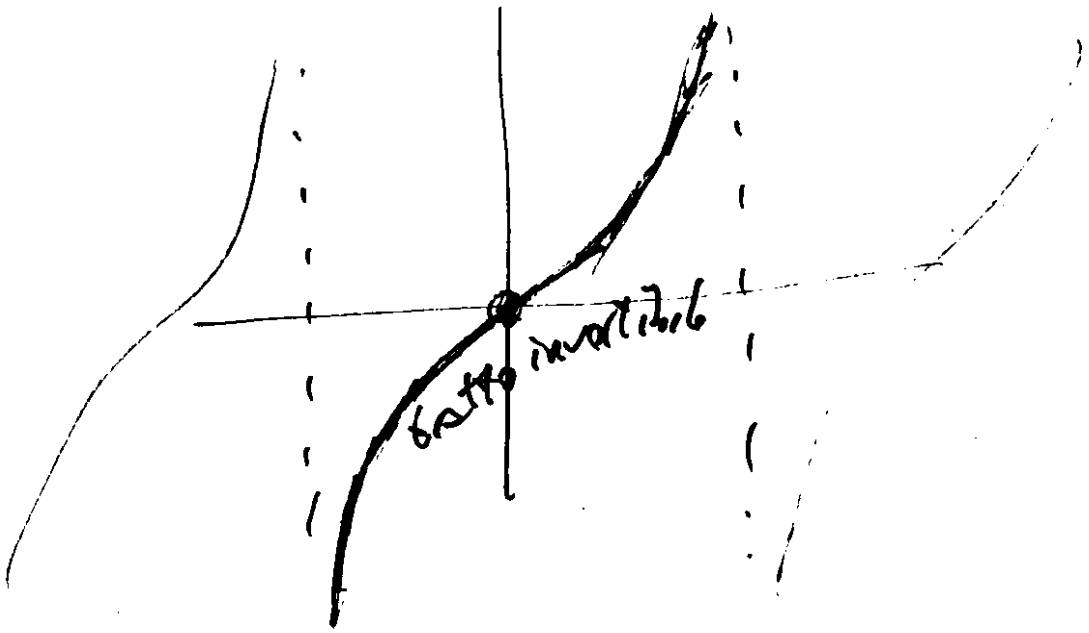


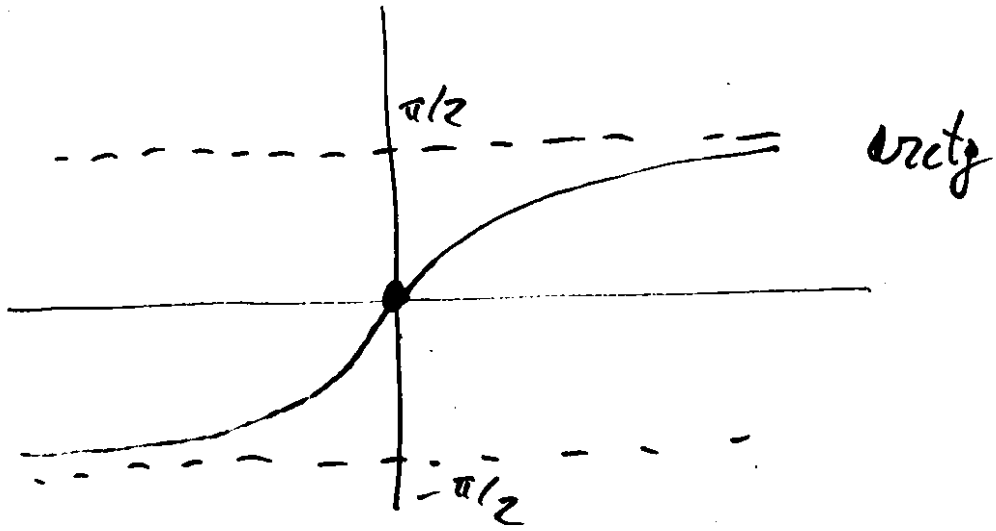
$\arccos x$ in radianti

$$0 \leq \arccos x \leq \pi$$

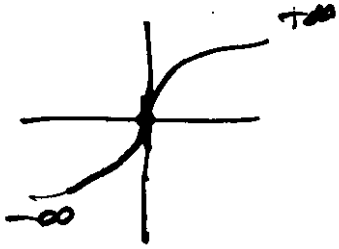
$$-1 \leq x \leq 1$$ campo di esistenza (insieme di definizione)

ARCTAN

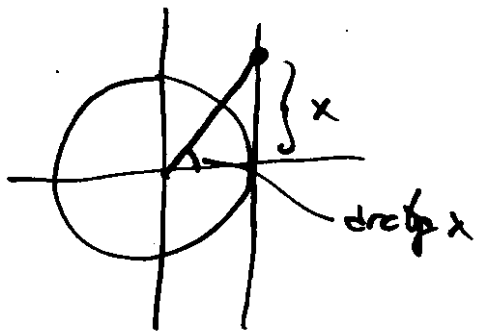




$\sqrt[3]{x}$



$\arctg 0 = 0$



IL PRINCIPIO DI INDUZIONE

ESEMPIO INTRODUTTIVO

disuguaglianza $2^n \geq n$

n variabile intera ≥ 0

Vista come disequazione nell'incognita n, non è risolvibile con metodi algebrici.

$2^n \geq n$ (n all'esponente; n alla base)

$2^x \geq 2^y \iff x \geq y$

Cambiamo l'impostazione.

Iniziamo con una tabella

2^n	n	$2^n \geq n$	
1	0	vero	
2	1	vero	aumenta di 1
4	2	vero	raddoppia, aumenta di 1
8	3	vero	raddoppia, aumenta di 1
16	4	vero	
32	5	vero	raddoppia, ...
⋮	⋮		

sospetto: tutti veri

Idea vaga: quando una riga dà vero, la successiva darà vero e magari ragione

percorso per formalizzare questa idea

2^n	n	$2^n \geq n$
1	0	⋮
2	1	⋮
⋮	⋮	
2^n	n	vero → $2^n \geq n$
2^{n+1}	$n+1$	$2^{n+1} \geq n+1$

↓ la verità si propaga

IMPLICAZIONE

$P \Rightarrow Q$

il predicato alla riga n-esima implica il predicato alla riga (n+1)-esima?

Se la risposta è sì, la verità si propaga.

obiettivo: $(2^n \geq n) \overset{?}{\Longrightarrow} (2^{n+1} \geq n+1)$

come si fa a stabilire una implicazione?

strumenti: logici e matematici (disug. facili numeri)

PRINCIPI sulle disug.

$x \leq y \iff x+z \leq y+z$ invariata per trasl.

$\begin{cases} x \leq y \\ z > 0 \end{cases} \Longrightarrow xz \leq yz$ invariata per omotetie

$x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z$ transitiva

$x \leq y \Rightarrow x \leq y \leq z$ aggiungo in coda disug. vera se so che $y \leq z$ è vero

potenza

$2^n \geq n \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad 2^{n+1} \geq n+1$ tagliando

principi base

? $\Rightarrow$? $\Rightarrow$?

princ. base

princ. base

princ. base

problema collatz

potenza

$2^n \geq n$

moltiplichiamo per 2 ambo i membri

$2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n$

$2^{n+1} \geq 2n$

?

$2^{n+1} \geq 2n \geq n+1$

arriv.

$2^{n+1} \geq n+1$

transitiva

Sì, se $2n \geq n+1$ è vera

$p \wedge vero \Leftrightarrow p$

problema laterale: $2n \geq n+1$ è vera?

vorremmo dimostrarla

Il problema laterale è di tipo algebrico facilmente risolubile

$$2n \geq n+1 \iff n \geq 1$$

La disug. $2n \geq n+1$ è vera per $n \geq 1$
falsa per $n = 0$

Restringiamoci [agli $n \geq 1$]

la catena di implicazioni è valida:

$2^n \geq n$ ⇕ molt. per 2, sotto i membri

$2^{n+1} \geq 2n$ ⟹ applicare la coda una disug. vera

$2^{n+1} \geq n+1$ ⇑ transitiva

$2^{n+1} \geq 2n \geq n+1$ ↑ vera

schema

$2^n \geq n$ ⟹ $2^{n+1} \geq n+1$

⇓ ⇑

$\ldots$ ⟹ $\ldots$

3 Dic. 2020 - p.5

2^n	n	$2^n \geq n$
1	0	vero
2	1	vero
4	2	vero
8	3	vero
16	4	vero
32	5	vero
⋮	⋮	⋮
2^n	n	$2^n \geq n$
2^{n+1}	$n+1$	$2^{n+1} \geq n+1$

] tra queste 2 righe l'implicazione non è garantita dai conti fatti è vera, ma per altri motivi:

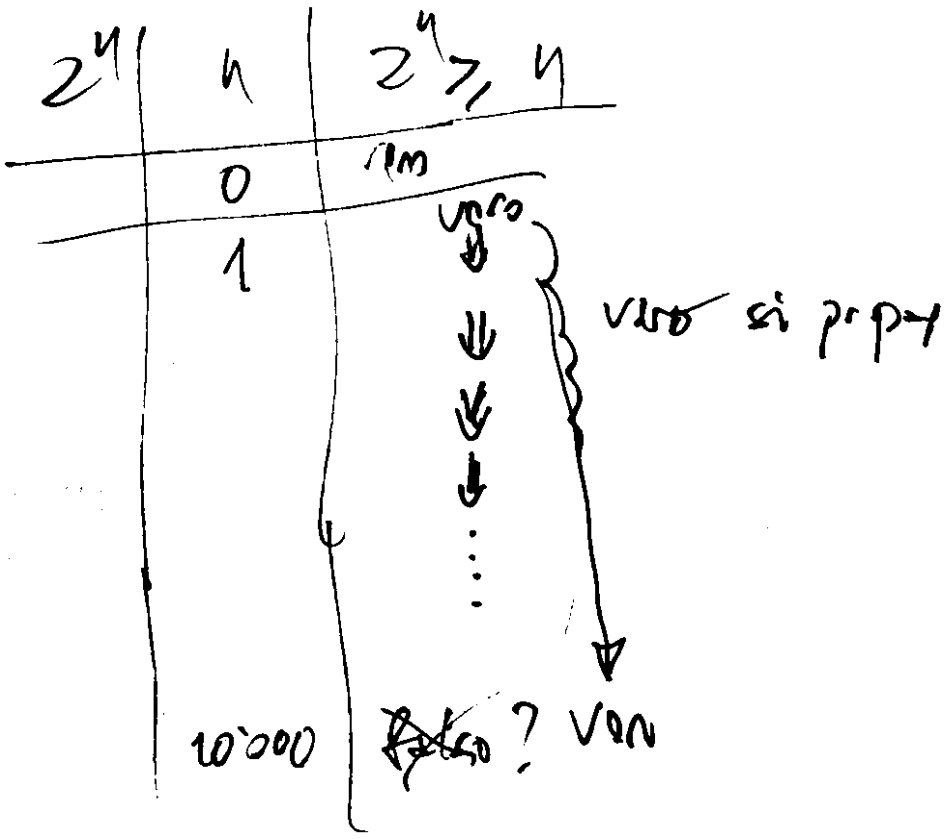
$\forall\, n \geq 1$

il predicato alla riga n implica il predicato successivo

la verità si propaga lungo le implicazioni

CONCLUSIONE: TUTTE VERE

9 dic. 2020 - p. 6



CONCLUSIONE: $2^n \geq n$ è VON $\forall n \geq 0$

ALTRI PRINCIPI DA AGGIUNGERE AL REPERTORIO

$$\left.\begin{array}{l} x \leq y \\ z \leq t \end{array}\right\} \Longrightarrow x+z \leq y+t$$

sommare membro a membro disuguaglianze

$$x \leq y \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leq y \\ z \leq t \end{array}\right.$$

VON ← se su qlc quesito è vero

9 dic. 2020 — p. 7

Partenza

$2^n \geq n$

? ok per $n \geq 0$

$2^n \geq n$ $\Longrightarrow$ somma membro a membro

$2^n \geq 1$ vera

problema laterale: $2^n \geq 1$ è vera!

$\Updownarrow$

$2^n \geq 2^0$

$\Updownarrow$

$n \geq 0$

stop

$2^{n+1} \geq n+1$

$\Updownarrow$

$2^n \cdot 2^1 \geq n+1$

$\Downarrow$

$2^n + 2^n \geq n+1$

con questo nuovo ragionamento

2^n	n	$2^n \geq n$
1	0	vero
2	1	vero
4	2	vero
	3	
	4	
	⋮	
	n	$2^n \geq n$
	$n+1$	$2^{n+1} \geq n+1$
	⋮	

valida per $n \geq 0$

conclusione: la stessa di prima

9 dic. 2020 – p. 9

NUOVO ESEMPIO

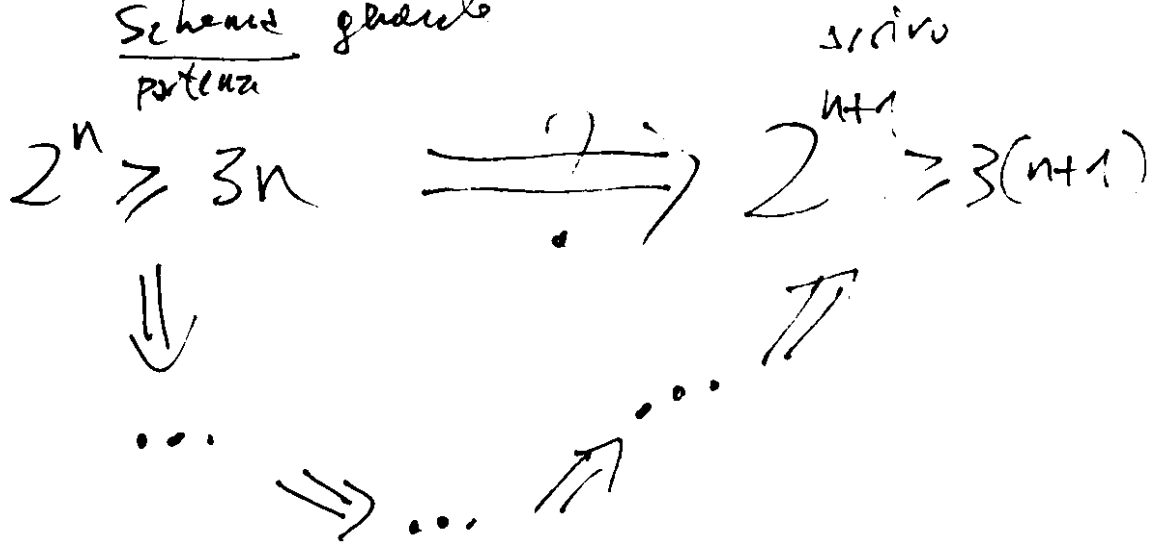
$$2^n \geq 3n \qquad n \in \mathbb{N}$$

Tabella

n	2^n	$3n$	$2^n \geq 3n$
0	1	0	vero
1	2	3	falso
2	4	6	falso
3	8	9	falso
4	16	12	vero
5	32	15	vero
6	64	18	vero
n	2^n	$3n$	$2^n \geq 3n$
$n+1$	2^{n+1}	$3(n+1)$	$2^{n+1} \geq 3(n+1)$

veri tutti dopo previsione

Schema generale partenza



9 Dic. 2020 - p 10

$2^n \geq 3n$.

$\Updownarrow$ moltip. per 2 entro i membri

$2^{n+1} \geq 3n \cdot 2$

$\Updownarrow$

$2^{n+1} \geq 6n$ $\Rightarrow$.

$2^{n+1} \geq 3(n+1)$

$\Uparrow$ transit.

$2^{n+1} \geq \dots \geq 3(n+1)$

$2^{n+1} \geq 6n \geq 3(n+1)$

$\uparrow$

$n \geq 0$

problema laterale

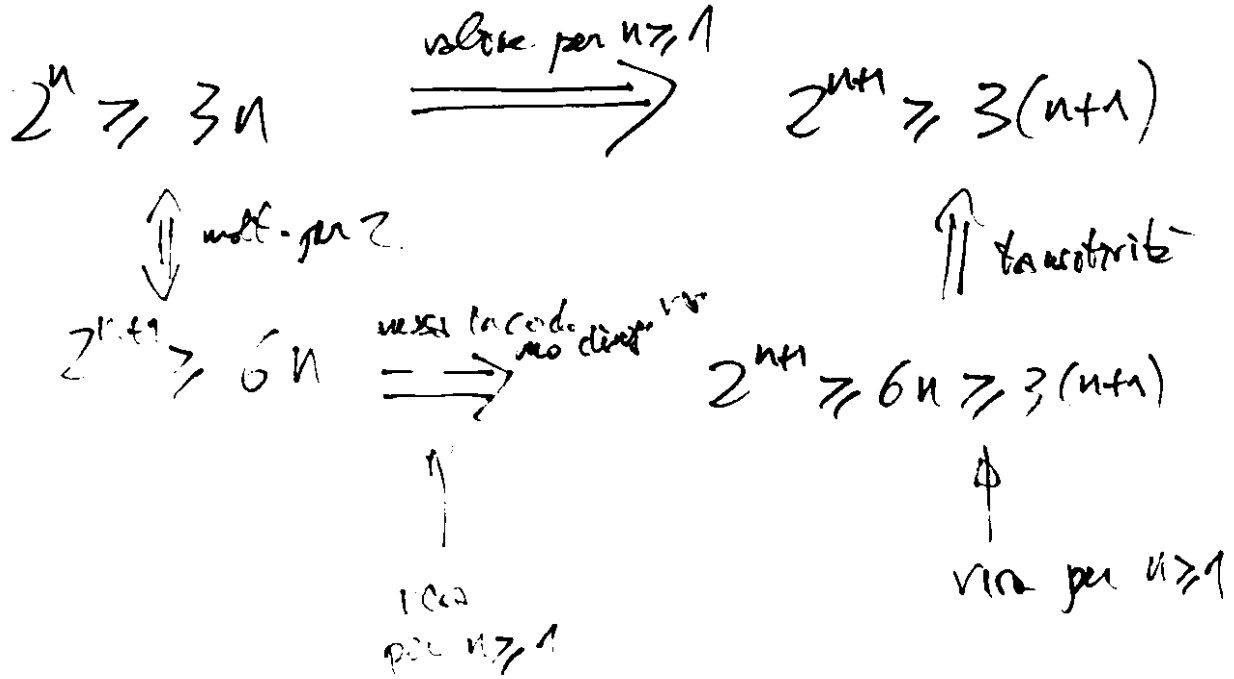
$6n \geq 3(n+1)$

$\Updownarrow$

$2n \geq n+1$

$\Updownarrow$

$n \geq 1$



torniamo alla tabella

n	2^n	$3n$	$2^n \geq 3n$
0			vero
1			falso
2			falso
3			falso
4			vero
5			
⋮			
n			$2^n \geq 3n$
$n+1$			$2^{n+1} \geq 3(n+1)$

da qui in poi c'è una catena di implicazioni

si propaga

tutti veri

$\Rightarrow$ se $n \geq 1$

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

conclusione

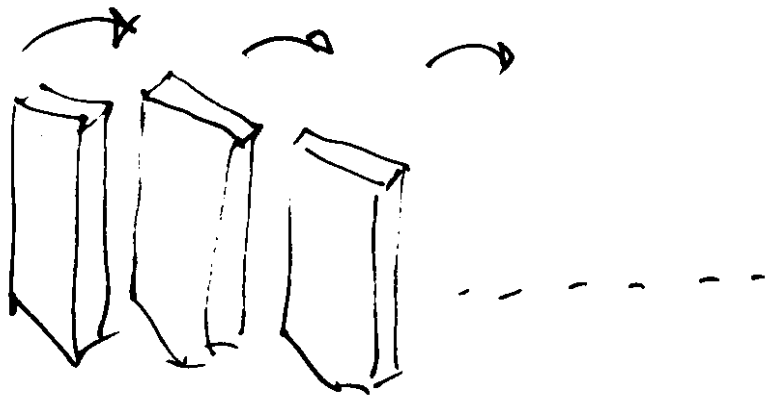
la disug. $2^n \geq 3n$ $\quad n \in \mathbb{N}$

è vera per $n=0$ e per $n \geq 4$

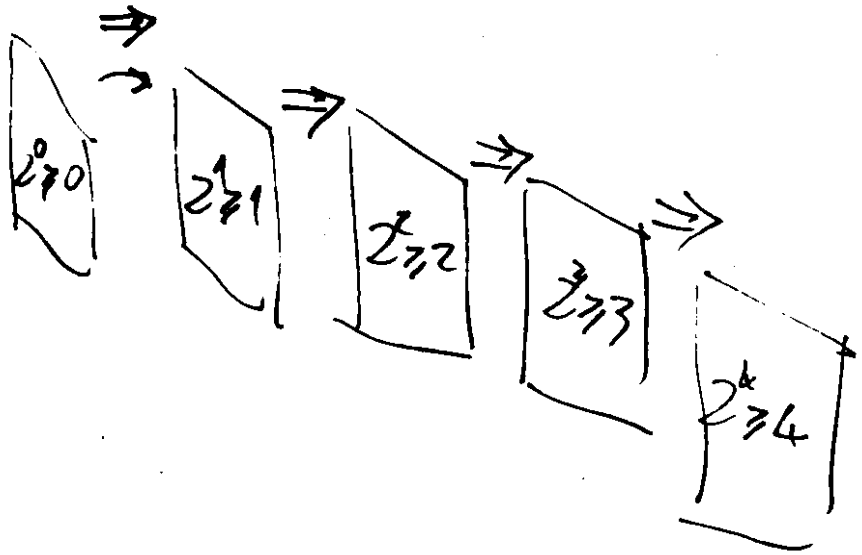
e

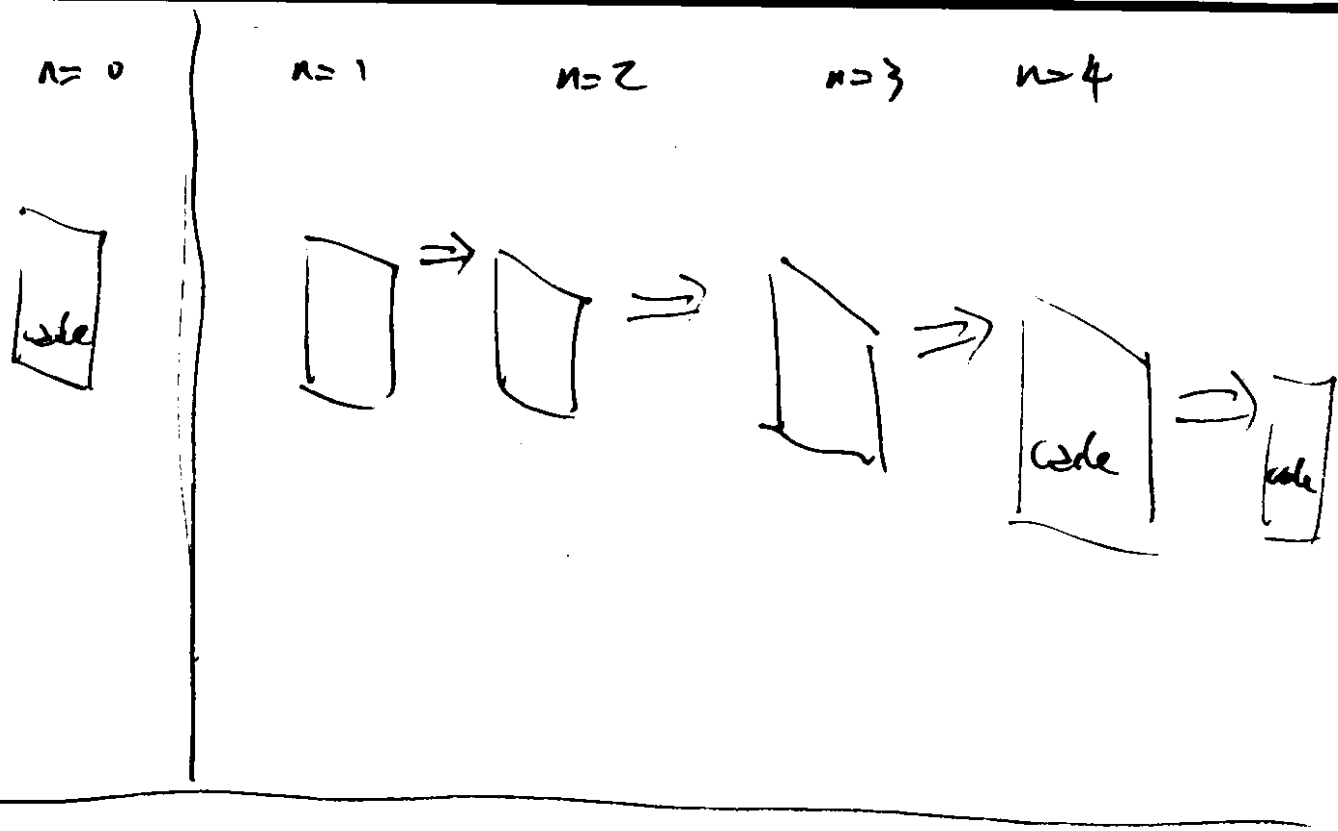
è falsa per $n = 1, 2, 3$

metafora del domino



i mattoncini sono i predicati





ALTRO ESEMPIO

$$2^n \geq 5n$$

base

$$2^n \geq 5n \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad 2^{n+1} \geq 5(n+1)$$

scrivi

$\Updownarrow$ moltiplica per 2

$\Uparrow$ transitiva

$$2^{n+1} \geq 10n \quad \Longrightarrow \quad 2^{n+1} \geq 10n \overset{?}{\geq} 5(n+1)$$

vera per $n \geq 1$

vero?

problema laterale

$$10n \geq 5(n+1)$$

$$\Leftrightarrow 2n \geq n+1 \Leftrightarrow n \geq 1$$

tabella

n	2^n	$5n$	$2^n \geq 5n$
0	1	0	vero
1	2	5	fals.
2	4	10	fals
3	8	15	fals
4	16	20	fals
5	32	25	vero

↓

tutti veri

Lemma da

$2^n \geq 5n$ è vera per $n \geq 5$

Dimostr da $2^n \geq n$ (implica $n \geq 0$)

PRINCIPIO DI INDUZIONE

PREDICATO $P(n)$ che dipende da una variabile intera n ($n \geq 0$, $n \geq 1$, ecc.)

Per esempio. $P(n) = (2^n \geq n)$

$P(n) = (2^n \geq n)$

$:=$ definizione

$P(n) := (2^n \geq 3n)$

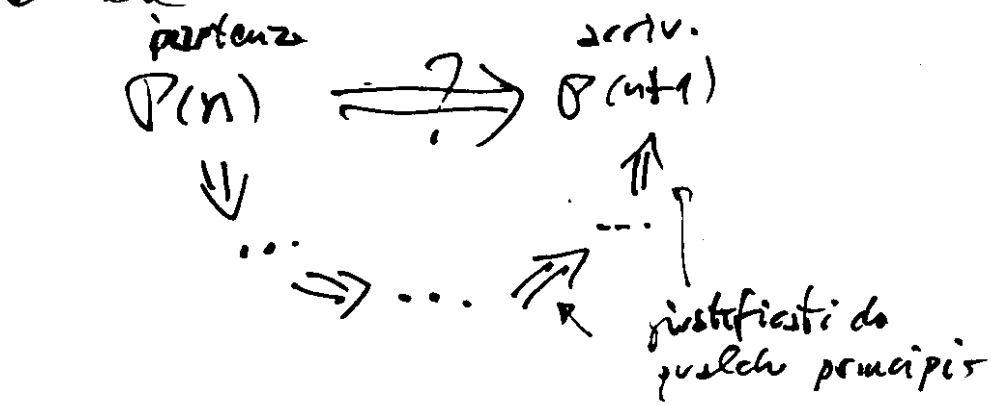
$P(n)$: $2^n \geq 5n$

congettura è che $P(n)$ sia vero sempre ("quasi")

Idea: cercare di dimostrare che l'implicazione

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

è vera.



Spesso si riesce a dimostrare

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

per tutti gli $n \geq n_0$ ($n_0 = 1$ ieri)

Effetto domino

$P(0)$? $P(1)$? $P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow P(5) \Rightarrow$

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ per ogni per $n \geq 2$

↑ dimostrato

Comincio a vedere un $P(n)$ che sia vero, con $n \geq 2$

$P(0)$ $P(1)$ $P(2) \Rightarrow$ $P(3)$ $\Rightarrow$ $P(4)$ $\Rightarrow$ $P(5)$ $\Rightarrow$ $P(6)$ $\Rightarrow$ ..

(V) (V) (V) (V)

↑ è vero

EFFETTO DOMINO

Possiamo concludere che $P(n)$ è vero per tutti gli $n \geq 3$

Terminologia:

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ è detto passo induttivo

$P(n_1)$ è vero caso BASE

ESEMPIO

$2^n \geq n^2$ è un predicato

$P(n) = (2^n \geq n^2)$

$P(n)$: $2^n \geq n^2$

PASSO INDUTTIVO

$P(n) \overset{?}{\Longrightarrow} P(n+1)$

$2^n \geq n^2 \overset{?}{\Longrightarrow} 2^{n+1} \geq (n+1)^2$

$\Updownarrow$ mult. per 2 ; $\Uparrow$ transitiva

$2^{n+1} \geq 2n^2 \overset{?}{\Longrightarrow} 2^{n+1} \geq 2n^2 \geq (n+1)^2$

è vero?

Problema laterale

$2n^2 \geq (n+1)^2$ è algebrico

$\Updownarrow$

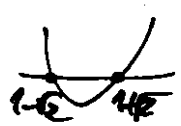
$2n^2 \geq n^2 + 2n + 1$

$\Updownarrow$

$n \leq 1-\sqrt{2} \ \vee \ n \geq 1+\sqrt{2} \iff n^2 - 2n - 1 \geq 0$

$\frac{\Delta}{4} = 1 + 1 = 2$

$1 \pm \sqrt{2}$



$2n^2 \geq (n+1)^2 \iff n \leq 1-\sqrt{2} \vee n \geq 1+\sqrt{2}$

negativo

$n \geq 3$ interi

Abbiamo stabilito che l'implicazione

$$2^n \geq n^2 \implies 2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

è vera $\forall n \geq 3$

TABELLA

n	2^n	n^2	$2^n \geq n^2$	
0	1	0	vero	} veri "per caso"
1	2	1	vero	
2	4	4	vero	
3	8	9	falso	implicazione
4	16	16	vero	tutte vere
5			⇓	
			⇓	
			⇓	

DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall x > -1 \quad x \text{ reale}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 0$$

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE

~~CASO~~ PREDICATO $\qquad$ x fisso > -1

$$P(n) = \left((1+x)^n \geq 1+nx \right)$$

~~$P(n) = \left(\forall x > -1 \quad (1+x)^n \geq 1+nx \right)$~~

CASO BASE $\quad n = 0$

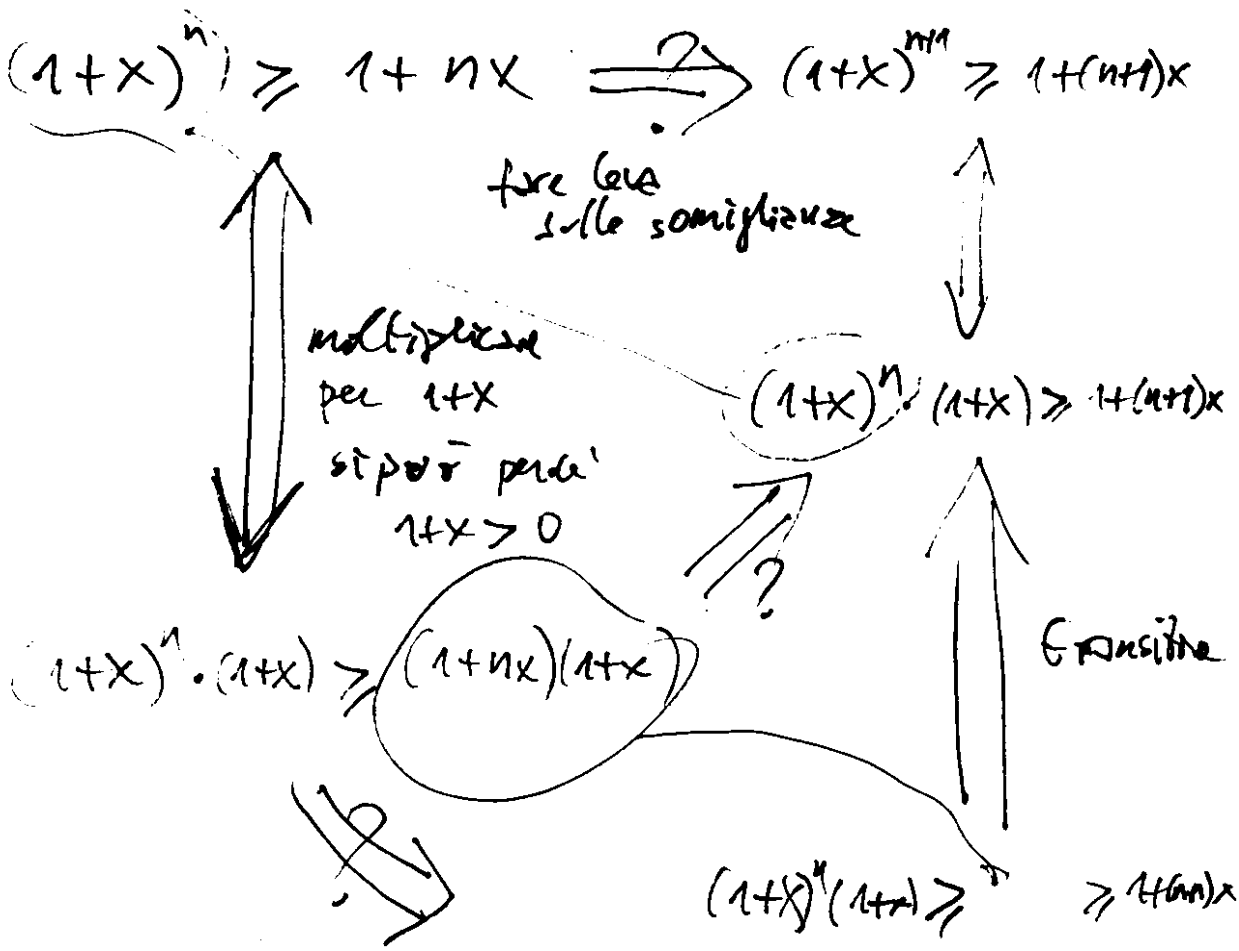
$$P(0) = \left(\underbrace{(1+x)^0}_{>0} \geq 1+0\cdot x \right)$$
$$= \left(1 \geq 1 \right) \text{ VERO}$$

non sarebbe necessario

$$P(1) = \left((1+x)^1 \geq 1+1\cdot x \right) =$$
$$= \left(1+x \geq 1+x \right) \text{ VERO}$$

PASSO INDUTTIVO

$$P(n) \Longrightarrow P(n+1)$$



problema aperto

$$(1+nx)(1+x) \overset{?}{\geq} 1+(n+1)x$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{nx} + nx^2 \geq 1 + \cancel{nx} + \cancel{x}$$

$$\Updownarrow$$

$$nx^2 \geq 0$$

vera perché per noi $n \geq 0$ e $x^2 \geq 0$ perché è un quadrato

10 dic. 2020 - p.7

$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \Longrightarrow ? \Longrightarrow \quad (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$\Updownarrow$ moltiplico per $1+x$ che è >0

$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$

$\Updownarrow$?

$(1+x)^n(1+x) \geq 1+(n+1)x$

$\Uparrow$ tesi

$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) \geq 1+(n+1)x$

$\uparrow$ vera?

(sì)

CONCLUSIONE $P(n)$ è vera $\forall n \geq 0$

$P(0) \Rightarrow P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow$

$\uparrow$ vera

tabella per Bernoulli

n	$(1+x)^n \geq 1+nx$		
0	$(1+x)^0 \geq 1+0x$	$1 \geq 1$	vero
1	$(1+x)^1 \geq 1+1x$	$1+x \geq 1+x$	vero
2	$(1+x)^2 \geq 1+2x$		vero
3	$(1+x)^3 \geq 1+3x$		?
4			

VARIANTI DEL PRINCIPIO DI INDUZIONE

Successione di Fibonacci

0 1 1 2 3 5 8

F_n successione di Fibonacci

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$$

Per dimostrare per induzione quella predicato che riguarda la successione di Fibonacci non basta il principio di induzione semplice fatto finora, perché i valori della succ. di Fibonacci dipendono dai 2 termini precedenti

n	$P(n)$	
0		
1		
2	$P(2)$	
3	$P(3)$	non basta conoscere $P(3)$ per trovare $P(4)$ devo conoscere anche $P(2)$
4	$P(4)$	

Ragionevolmente mi aspetto di dedurre informazioni su $P(4)$ se ho informazioni su $P(3)$ non solo su $P(3)$ ma anche su $P(2)$

Devo avere informazioni sui 2 termini precedenti per dedurre qualcosa sul successivo

$$P(n) \not\Rightarrow P(n+1)$$ non ho speranze

$$\big(P(n) \wedge P(n+1)\big) \Longrightarrow P(n+2)$$

questa ha speranze

ESEMPIO

n	F_n	2^n	predicato $F_n \leq 2^n$
0	0	1	vero
1	1	2	vero
2	1	4	vero
3	2	8	vero
4	3	16	vero
5	5	32	vero

$$P(n) = \left(F_n \leq 2^n \right)$$

$$\big(P(n) \wedge P(n+1)\big) \not\Rightarrow P(n+2)$$

10 dic. 2020 - p. 11

$$\left(F_n \le 2^n \wedge F_{n+1} \le 2^{n+1}\right) \Rightarrow F_{n+2} \le 2^{n+2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} F_n \le 2^n \\ F_{n+1} \le 2^{n+1} \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} F_{n+2} \le 2^{n+2}$$

AND

$$F_{n+2} \le 2^{n+2} \iff F_{n+1} + F_n \le 2^{n+2}$$

transitiva

def $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

somma membro a membro

$$F_n + F_{n+1} \le 2^n + 2^{n+1} \le 2^{n+2}$$

? (vera)

tabella

$$2^n + 2 \cdot 2^n \le 4 \cdot 2^n$$

$$3 \cdot 2^n \le 4 \cdot 2^n$$

$$3 \le 4 \quad \text{vera}$$

INDUZIONE – VARIANTE

Induzione più semplice: il passo induttivo
del tipo $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Variante: usa il passo induttivo
$(P(n) \wedge P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$.

Un altro modo di pensare al passo induttivo

P predicato

tabella di verità

n	0	1	2	3	4	...
$P(n)$	F	F	V	V	V	...

troviamo la semplice sequenza dei valori di verità

F F V V V ...

pensata come una stringa alfabetica che usa
i soli caratteri F, V
stringa infinitamente lunga

Ora
Il C (implicazione $(P(n) \wedge P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$
si traduce in una proprietà della stringa corrispondente

$(P(n) \wedge P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$

V V F (NO)!

La verità dell'implicazione si traduce dicendo
che la stringa non contiene la sequenza

VVF

NON COMPARE NELLA STRINGA

cioè due V di seguito non sono mai seguiti da F.

Domanda: come possono essere fatte le stringhe soddisfacenti in cui non compare mai VVF

Casistica

1) VVVVVV ... tutti V

2) FFFFF... tutti F

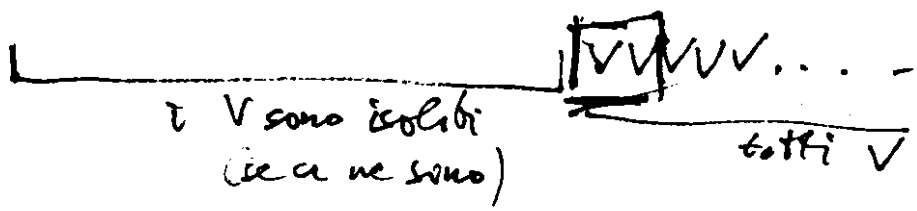
3) VFVFVF ... alternati V e F

4) FFVFFV...

5) FVFVFV...

6) generalizzazione: una stringa in cui i V sono sempre isolati, cioè seguiti e preceduti da F

FVF ... FVF

7) 

Non ci sono altre possibilità

Il caso interessante è quando compare due V di seguito VV

VV?

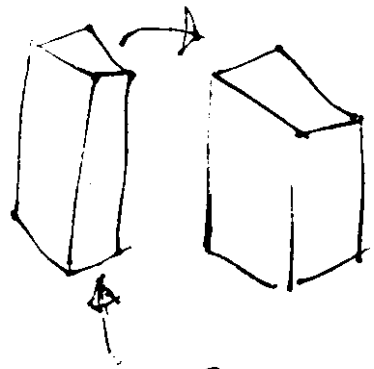
F

V?

F

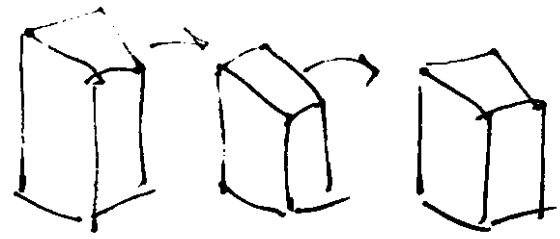
se ci sono 2 V di seguito, lì di poi sono tutti V

Metafora della lamina



spessore spessore

In solido matematico reale non esiste
per es. per cadere il seguente



il peso combinato delle sue metà
consecutive fa cadere quello dop

$$\Big(P(n) \wedge P(n+1)\Big) \Longrightarrow P(n+2)$$

Esempio:

$$P(n) = \Big(F_n \leq 2^n \Big)$$

$$\wedge$$

$$P(n+1) = \Big(F_{n+1} \leq 2^{n+1} \Big)$$

$$\Downarrow$$

$$F_n + F_{n+1} \leq 2^n + 2^{n+1} =$$

$$= 3 \cdot 2^n \overset{?}{\leq} 2^{n+2}$$

$$\uparrow$$

vera

$$\Downarrow$$

$$P(n+2) = \Big(F_{n+2} \leq 2^{n+2} \Big)$$

Stabilito che $\Big(P(n) \wedge P(n+1)\Big) \Rightarrow P(n+2)$

$$\uparrow$$

vera

$P(n)$ è vera o falsa?

Tabella

n	F_n	2^n	$P(n) = (F_n \leq 2^n)$	
0	0	1	V	due V di seguito
1	1	2	V	
2	1	4	·	
3	2	8		tutti V
4	3	16		
5	5	32		

Ci vogliono 2 casi base consecutivi

non ne basta uno

Piccola variante dell'esempio

$$P(n) = \left(F_n \leq \frac{1}{3} 2^n \right)$$

$$P(n+1) = \left(F_{n+1} \leq \frac{1}{3} 2^{n+1} \right)$$

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \leq \frac{1}{3}\left(2^n + 2^{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2^n$$

$$\leq \frac{1}{3} 2^{n+2}$$

$$P(n+2) = \left(F_{n+2} \leq \frac{1}{3} 2^{n+2} \right)$$

$$\left(P(n) \wedge P(n+1) \right) \Rightarrow P(n+2)$$

↑

vera

16 dic 2020 - p. 7

tabella

n	F_n	$\frac{1}{3}2^n$	$P(n) = \left(F_n \le \frac{1}{3}2^n\right)$
0	0	$\frac{1}{3}$	V
1	1	$\frac{2}{3}$	F
2	1	$\frac{4}{3}$	V
3	2	$8/3$	V
4	3	$16/3$	

} sono V sì seguito

tutto il resto è V

Esercizio:

$$P(n) = \left(F_n \ge \left(\frac{3}{2}\right)^n \right)$$

$$P(n+1) = \left(\qquad \right)$$

transition

$P(n+2)$

ESEMPI FACILI CLASSICI

Numeri triangolari

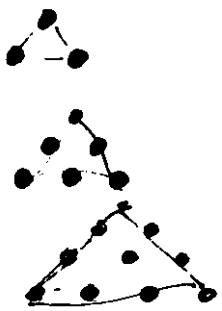
$1+2+3+4+\cdots+n$

$n=1$ $\quad 1$ •

$n=2$ $\quad 1+2$

$n=3$ $\quad 1+2+3$

$n=4$ $\quad 1+2+3+4$



...

Fatto notevole: questa somma si può scrivere come un polinomio di grado 2

$$1+2+3+\cdots+n = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

La verità di questa formula si presta ad essere dimostrata per induzione. (Ci sono altre dimostrazioni)

Predicato

$$P(n) = \left(1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

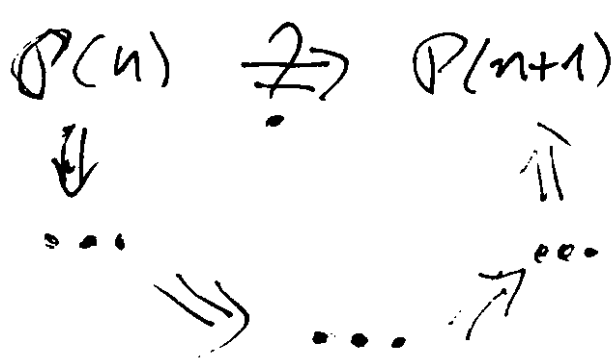
CASO BASE $\qquad n=0$? Non ha molto senso

$n=1$

$$P(1) = \left(\underbrace{1+2+3+\cdots+1}_{?} = \frac{1(1+1)}{2} \right)$$

$$P(1) = (1 = 1) \quad \text{VERO}$$

PASSO INDUTTIVO



$$\boxed{1+2+3+\cdots+n} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

applicare $n+1$ ad entrambi i membri

$$\boxed{1+2+3+\cdots+n}+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

primo membro lo stesso

il secondo membro?

Il ~~primo~~ secondo membro a prima vista può sembrare diverso ma verifichiamo

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) =$$

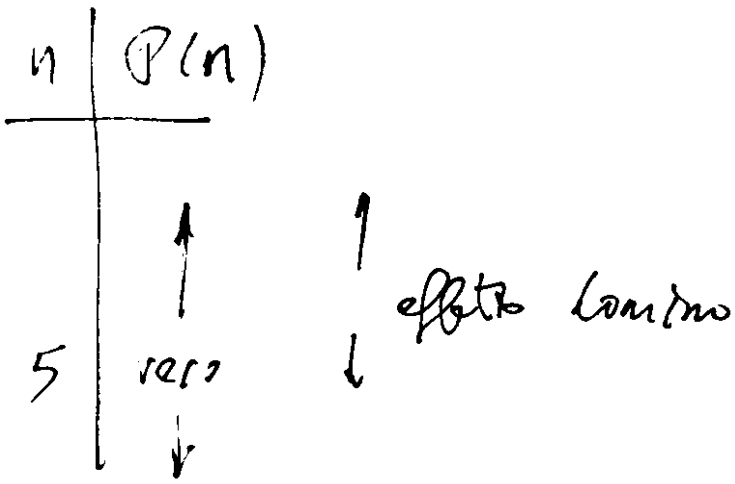
$$= (n+1)\,\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

è lo stesso!

Effettivamente $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

In realtà $P(n) \iff P(n+1)$

o sono vere entrambi o sono false entrambi



SECONDO ESEMPIO: NUMERI PIRAMIDALI

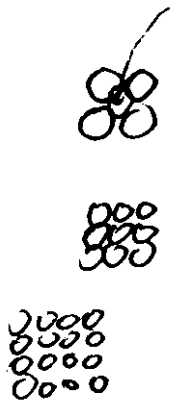
$$1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2$$

$n=1$ $\quad 1^2$

$n=2$ $\quad 1^2+2^2$

$n=3$ $\quad 1^2+2^2+3^2$

$n=4$ $\quad 1^2+2^2+3^2+4^2$



FORMULA NOTEVOLE

polinomio di grado 3

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Dimostrazione per induzione

PREDICATO $\quad P(n)=\left(1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$

CASO BASE $\quad n=0$ non ha senso

$n>1$ $\quad P(1)=\left(1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6}\right)=$

$$=\left(1=\frac{1\cdot2\cdot3}{6}\right)=$$

$$=(1=1)\quad \text{VERO}$$

17 dic 2020 - p. 5

PASSO INDUTTIVO

$P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

$1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

aggiungo $(n+1)^2$ a entrambi i membri

$1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

primo membro uguale

$= \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$?

$= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n+1\right) =$

raccolgo $n+1$

$= (n+1)\,\frac{2n^2+n+6n+6}{6} =$

$= (n+1)\,\frac{2n^2+7n+6}{6}$

$\frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} =$

$= \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

risultati

TEORIA DEI LIMITI

Introduciamo i personaggi

variabile indipendente =

tempo (settimane)

n (variabile intera)

x variabile continua reale

Cosa facciamo con la variabile indipendente

tempo → in avanti all'infinito

n . . . → → →

x viene → 0 o → 1

Simboli: $n \to +\infty$

$tempo \to +\infty$ ⇒

n tende all'∞

tempo tende all'∞

$x \to 0$ x tende a 0

$x \to 1$ x tende a 1

in generale $x \to x_0$ x tende a x_0

x_0 è l'oggetto a cui viene fatta avvicinare la variabile indipendente

Variabile dipendente, funzione e successione

$a_n = n$ $\quad a_n = n^2$

$a_n = 2^n$ $\quad a_n = \sqrt{n}$

F_n $\quad \frac{F_{n+1}}{F_n}$

$\frac{\sin x}{x}$ $\quad \frac{2^x - 1}{x}$

a_n	$f(x)$

L'oggetto a cui (talvolta) si avvicina la variabile dipendente

$2^n \longrightarrow \boxed{+\infty}$

tende a

$\frac{1}{n} \longrightarrow 0,0000$
tende a

$\frac{n}{n+1} \longrightarrow 0,9999\ldots$

$\frac{\sin x}{x} \longrightarrow 0,9999\ldots$

Simbolo per l'oggetto a cui si avvicina la variabile indipendente è

L ella
(limite)

Introdotti questi personaggi il concetto in precisa è questo:

quando x è vicina a x_0, $f(x)$ è vicina a L

Variabile intera

quando n è vicina a $+\infty$,

a_n è vicina a L

(L può essere $+\infty$)

Più sinteticamente

quando $x \to x_0$, $f(x) \to L$

quando x tende a x_0,

$f(x)$ tende a L

Precisare la vicinanza

fra x e x_0

e fra n e $+\infty$

<u>distanza</u> fra x e x_0 è

$$|x - x_0|$$

formula per la distanza fra due punti, finiti

distanza fra $f(x)$ e L

$$|f(x) - L|$$

quando L è finito.

Per ora concentriamo ci sul caso finito

Introduciamo i personaggi

spieghiamo il gioco

(ispirato al calcio)

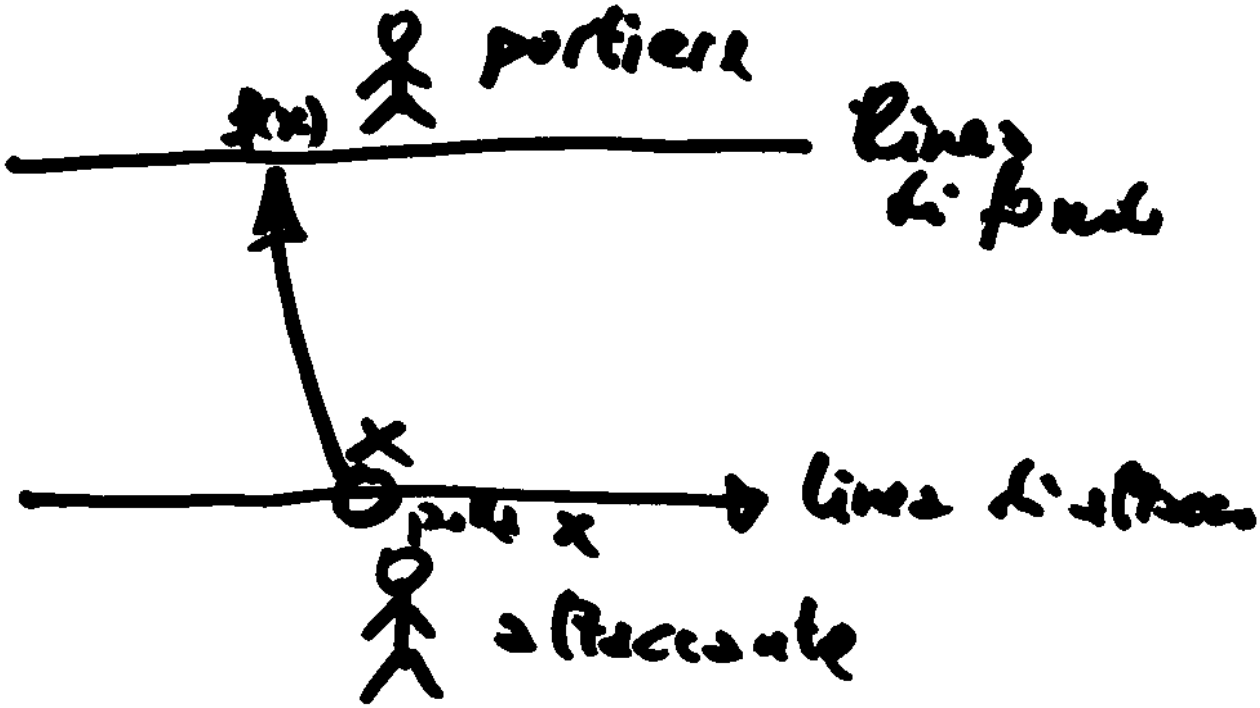
e con giocano i personaggi

---

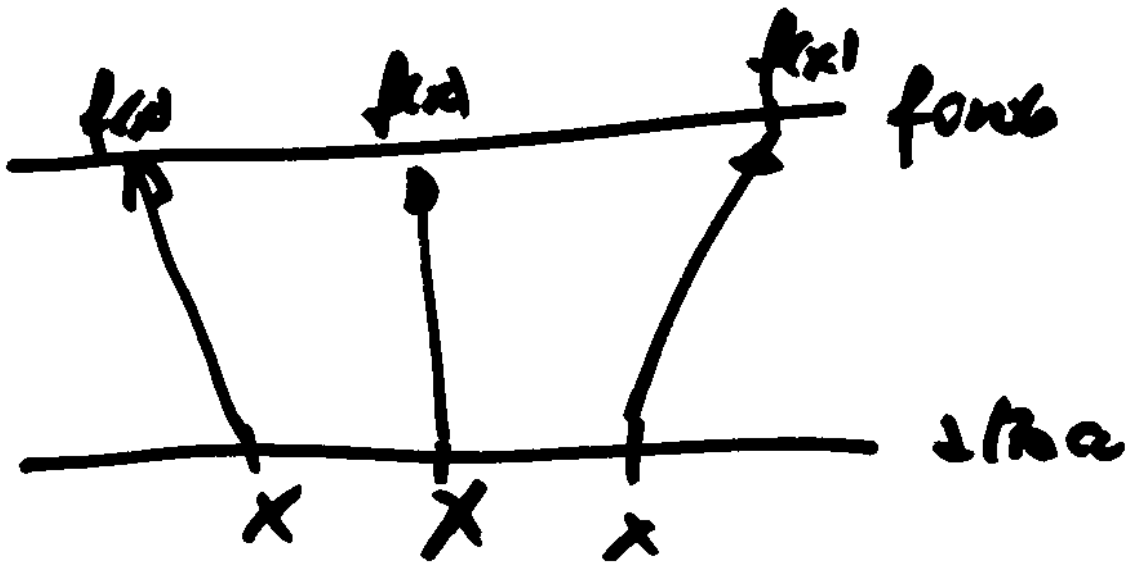
2 giocatori

portiere, attaccante

Campo da gioco



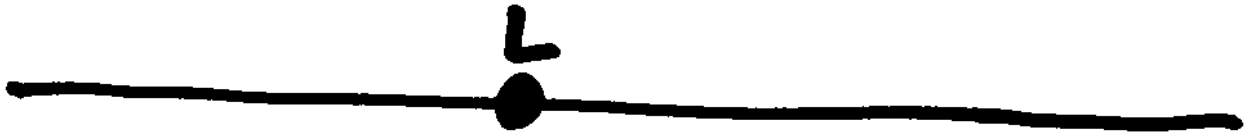
f(x) è la posizione sulla linea di fondo che viene colpita se si tira dalla posizione x

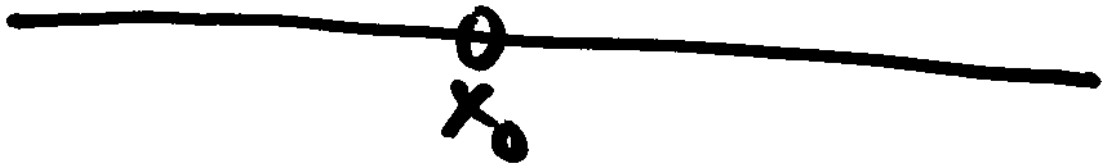


f(x) non è giocatori

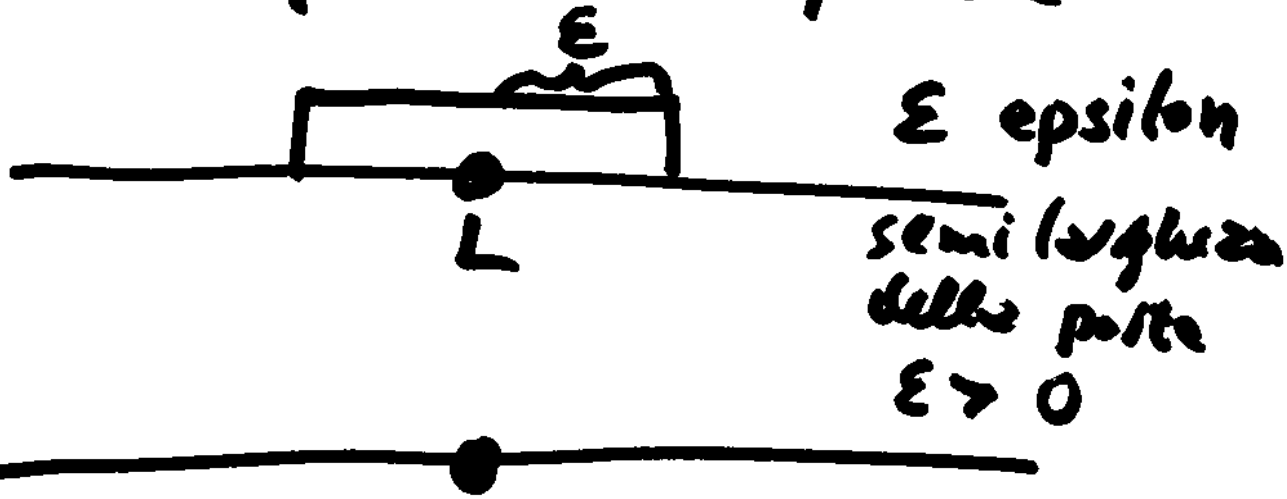
X_0 discheltà del ripresa

L bersaglio

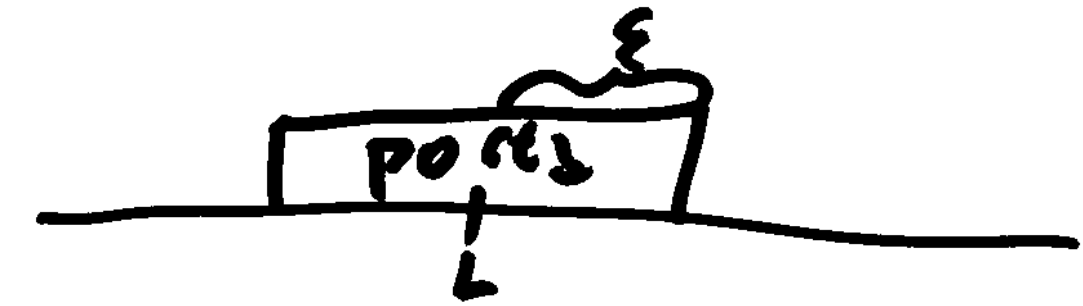




Prima mossa del gioco:
il portiere decide quanto
è grande la porta

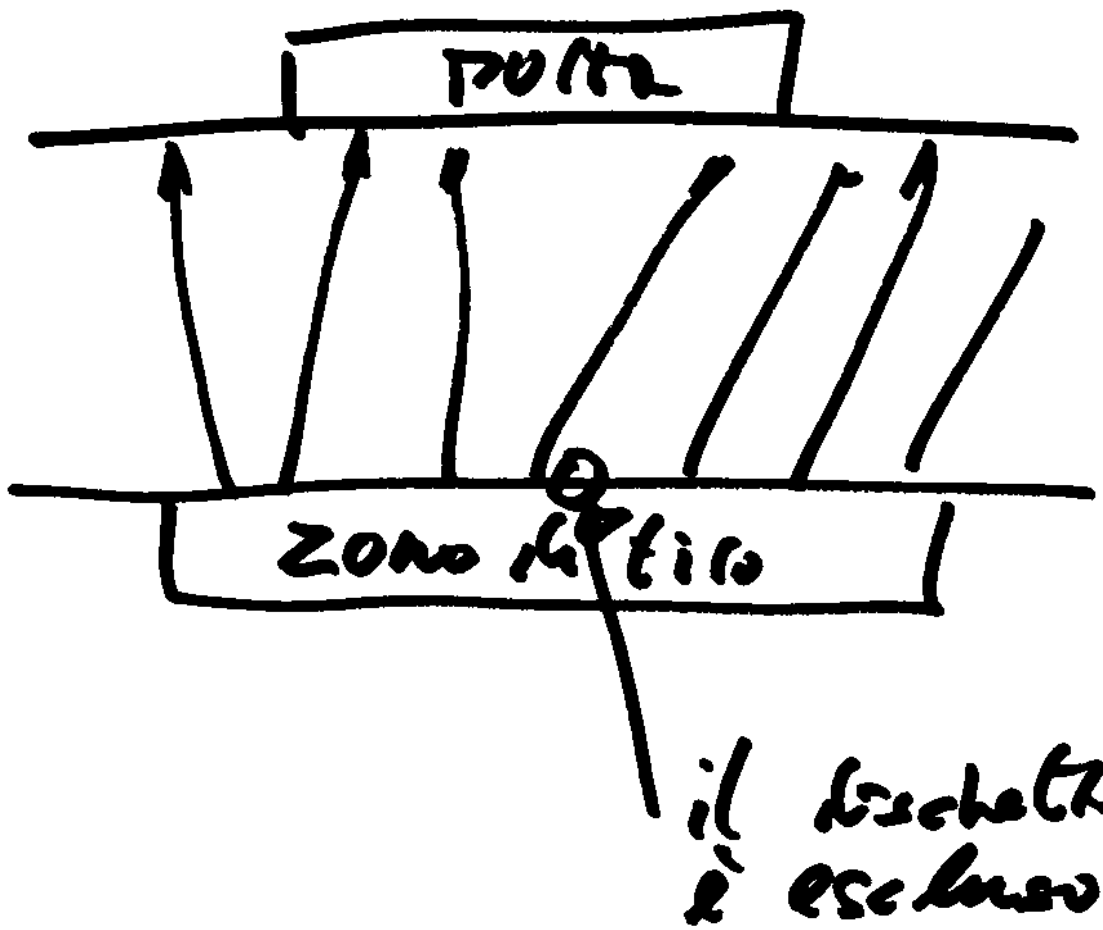


Seconda misura
l'attaccante decide
quanto è larga la zona
di tiro



δ della > 0

terza mossa: si tirano tutti i dardi possibili che partono dalla zona di tiro



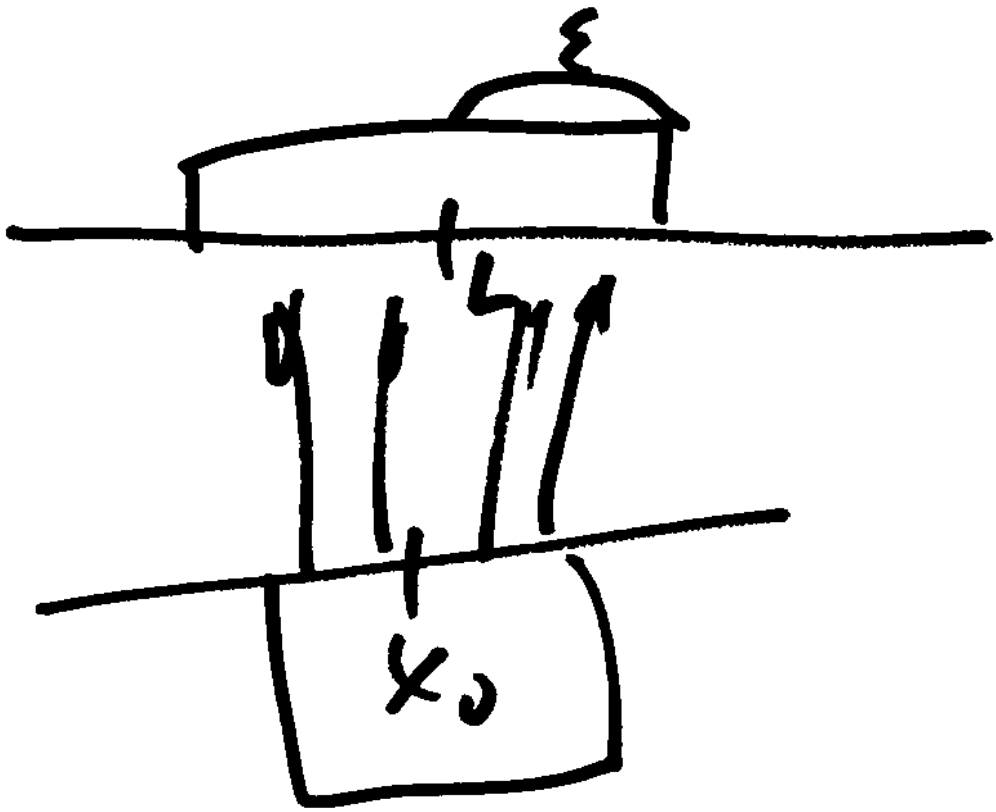
L'arbitro conta i punti colpiti dai dardi.

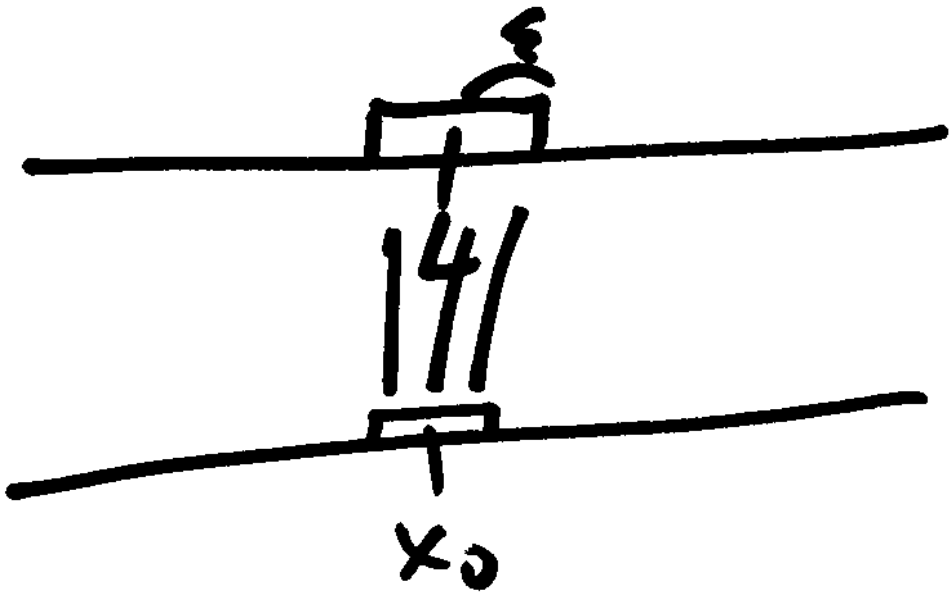
1° possibilità: tutti i dardi sono finiti in porta
⇒ l'attaccante vince la part.

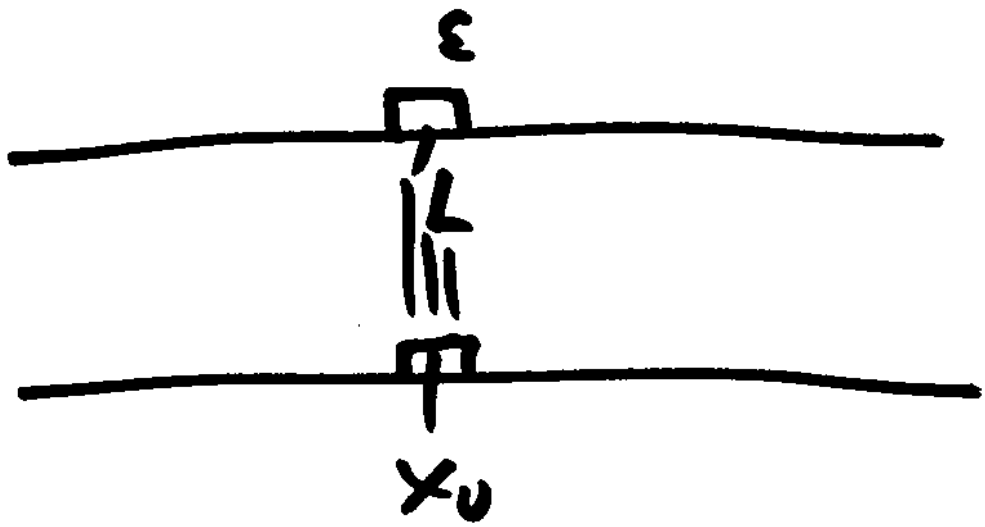
2° possibilità: c'è almeno un
rigore fuori porta
vince il portiere

CAMPIONATO

ogni volta che vince l'attacco
il portiere ha diritto a rivincita







Il campanello è visto dall'alto come se questo vivesse tutte le infinite dimensioni.

Do' per scontato che i giocatori facciano la cosa migliore possibile per loro stessi

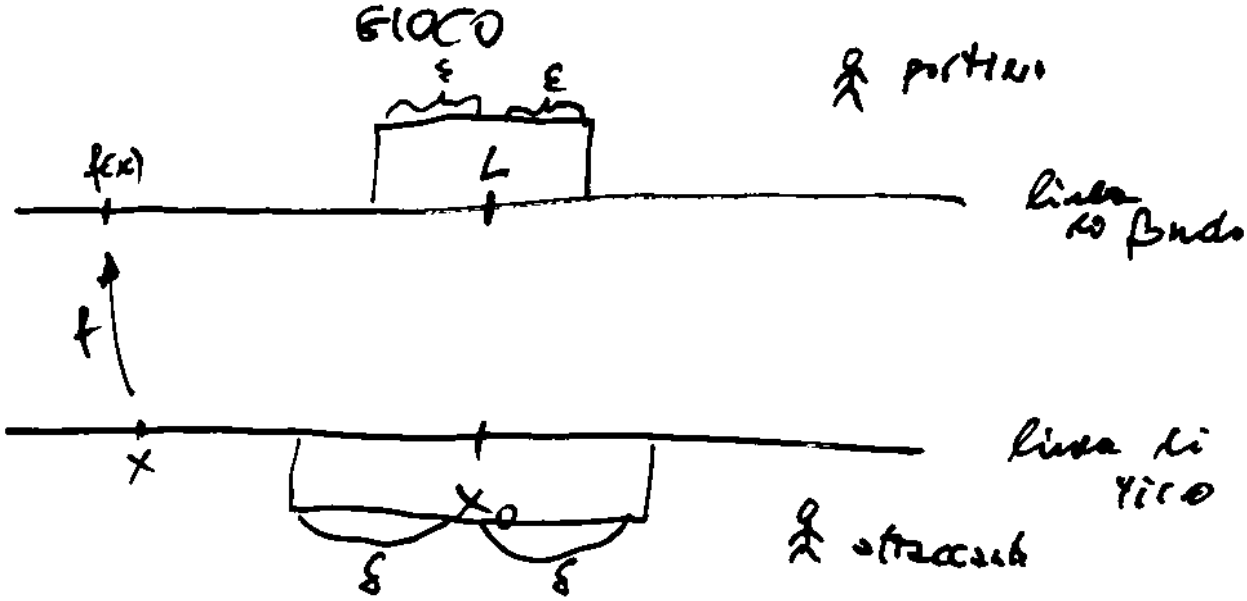
Idea: il significato di

per $x \to x_0$, $f(x) \to L$

significa che **l'errore vince il campanello**

7 gen 2021 – p. 1

LIMITI



ε larghezza (semi) della porta

$\varepsilon > 0$

δ (semi) larghezza della zona di tiro

$\delta > 0$

si tirano i rigori dalla zona di tiro. RAFFICA

tutti i possibili rigori da quella zona

eccetto x_0

l'attaccante vince la partita se tutti i rigori sono in porta

il portiere vince se almeno un rigore è fuori

Se il portiere perde, ha diritto a rivincita.

Può succedere che ci sono infinite rivincite.

Se l'attaccante vince tutte le rivincite

ha vinto il campionato

Se il portiere vince una partita, ha vinto il campionato

DEFINIZIONE DI LIMITE (caso base)

Dati di partenza f, x_0, L, x variabile indep.

Come esprimere il concetto "vince l'avversario" in formule (espressioni logiche, incremento, uguaglianze, disug.)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in \text{dom } f$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

7 gen 2021 - P. 2

è un predicato, che può essere vero o falso a seconda degli oggetti che sono in gioco

$0 < |x - x_0| < \delta$ cosa vuol dire?

$|x - x_0|$ distanza di x da x_0

x: posizione del pallone; x_0: stadio

distanza $< \delta$ vuol dire che x sta nella zona di tiro

non sbattendo dal bicchetto

$x \in \text{dom } f$ la richiesta quando il dominio non è tutta la retta

Tiro i rigori uno passo avanti

$|f(x) - L| < \varepsilon$?

distanza fra $f(x)$ e L

dire che è $< \varepsilon$ significa dire che il rigore è in porta

7 gen 2021 - p. 3

$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$

$x \in$ zona di tiro

il tiro è in porta

quando $x \in$ zona di tiro, il tiro è in porta

(l'attaccante vince la partita)

$\forall x \in \text{dom } f \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$

tutti i tiri sono in porta

con quelle larghezze di porta e zona di tiro

(singola partita)

CAMPIONATO

$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \quad \dots$

(l'attaccante vince la partita)

qualunque sia la larghezza della porta,

l'attaccante può replicare con una zona di tiro che gli fa vincere la partita

L'ordine è cruciale

viene prima ε e poi δ

$\forall \varepsilon > 0$ l'altrocente vince la partita

C'altrocente vince tutte le partite

NOTAZIONE

Il predicato

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathrm{dom} f \quad 0 < |x - k| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

viene abbreviato in

$$f(x) \to L \qquad \text{per } x \to x_0$$

$f(x)$ tende a L — per x tende a x_0

$$\text{per } x \to x_0, \quad f(x) \to L$$

Notazione comune

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

In questo momento può essere fuorviante:

può far pensare che ci siano due oggetti:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \quad , \quad L$$

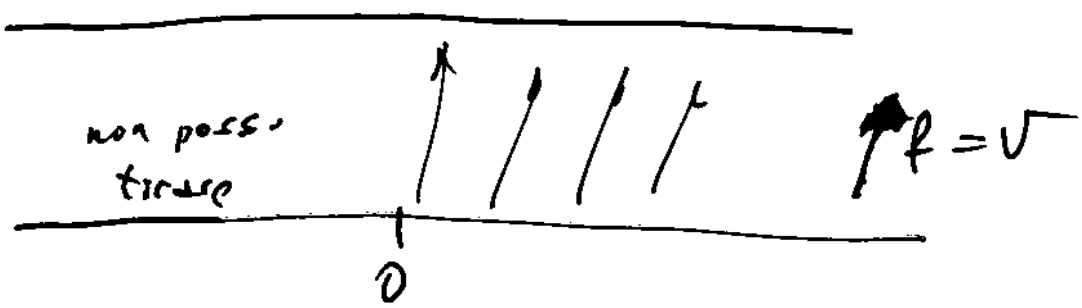
ciascuno con una sua dignità,

e a fianco che sono uguali

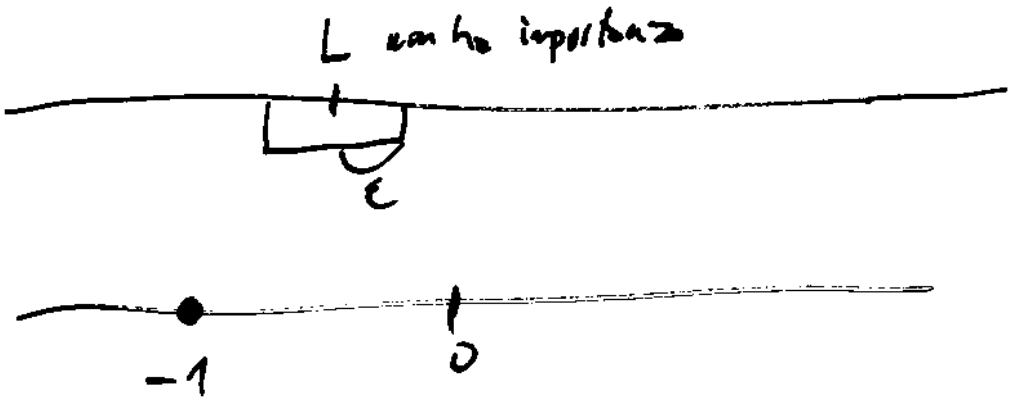
In questo momento non sono autorizzato a fare

$\lim_{x \to x} f(x)$ una sua esistenza autonoma.

INGHIPPO $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad \mathrm{dom} f = [0, +\infty[$

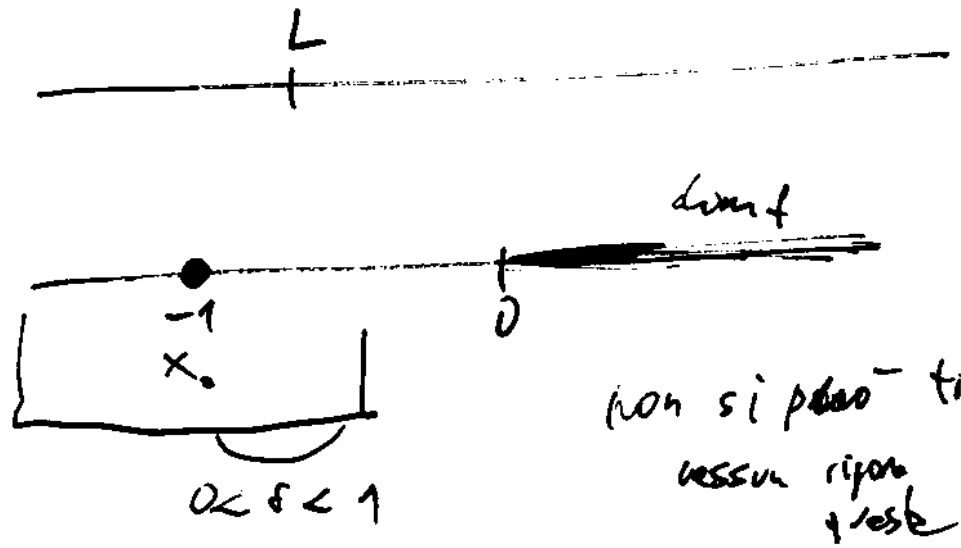


Supponiamo che il gioco cominci con $x_0 = -1$



il portiere sceglie $\varepsilon > 0$, non ha importanza quanto è.

L'attaccante sceglie una zona di tiro a sinistra di 0



non si può tirare nessun rigore in questa zona

consultiamo il regolamento:

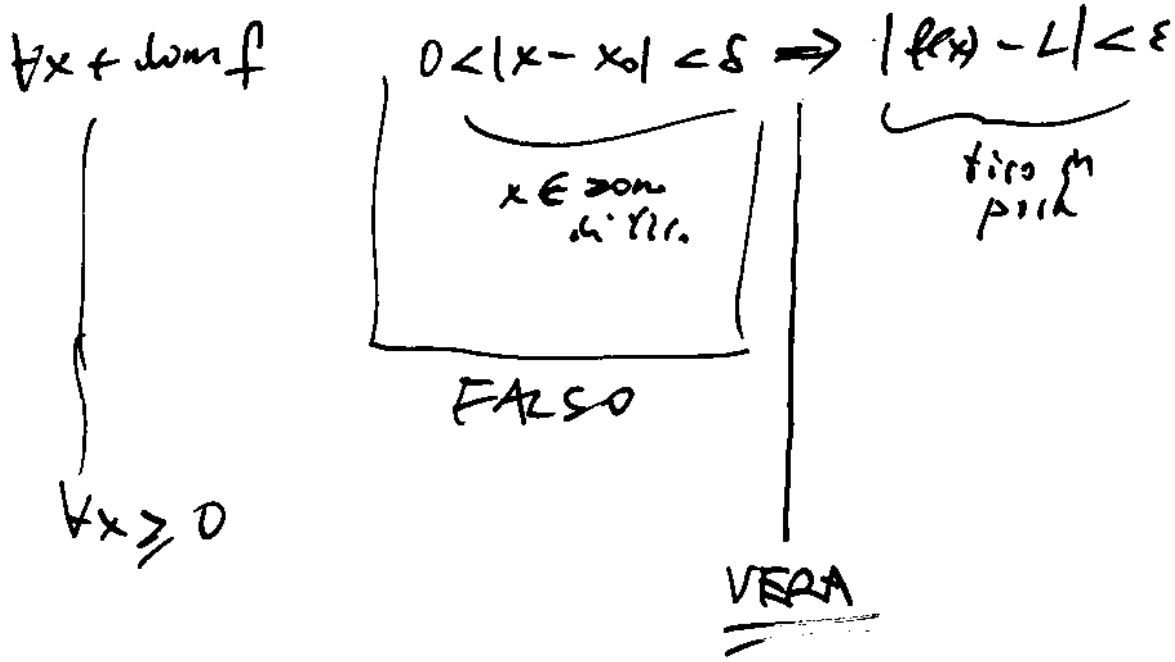


tabella di verità

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

L'attaccante vince a tavolino senza tirare nessun rigore

L'attaccante vince tutte le partite, non ha nessuna importanza quanto vale ε, e neanche quanto vale L.

In particolare, L non ha importanza:

il predicato $\sqrt{x} \to L$ per $x \to -1$

è vero qualunque sia L

Alla funzione $f(x) = \sqrt{x}$ con $x_0 = -1$
non posso associare alcun oggetto sensato

$\lim_{x \to -1} \sqrt{x}$ non ha senso

L'INGHIPPO si risolve imponendo una condizione sul dominio di f

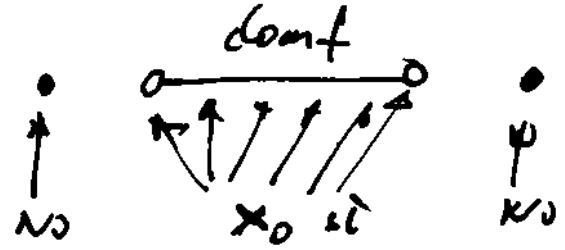
La forma più generale è complicata
In pratica, nella gran parte degli esempi può bastare una versione semplificata:

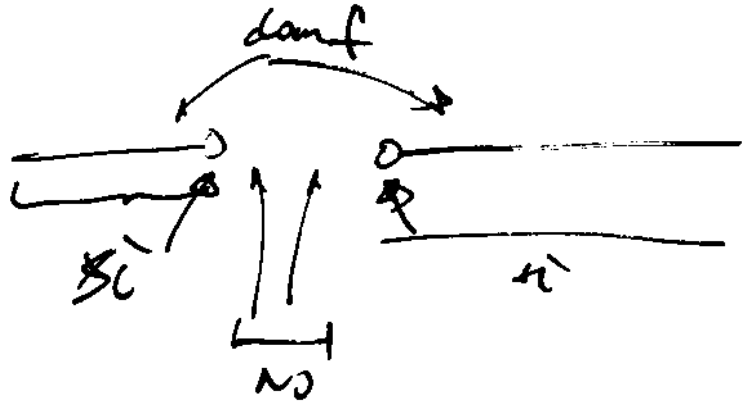
CONDIZIONE DI ~~SENSATEZZA~~ DEL LIMITE

$\mathrm{dom} f \qquad x_0$

$\mathrm{dom} f$ contenga un intervallo (non degenere) di cui x_0 sia un punto interno o un estremo

esempi





Teorema dell'unicità del limite

Dati $f(x)$, x_0, L_1, L_2 (finiti)

vale la condizione di esistenza.

supponiamo che siano vere entrambe queste due affermazioni

1) $f(x) \to L_1$ per $x \to x_0$ } lo stesso x_0

2) $f(x) \to L_2$ per $x \to x_0$

Allora $L_1 = L_2$

Riassumendo: se una funzione tende a un limite questo è unico, non possono esserne 2

Dim usiamo la metafora del gioco

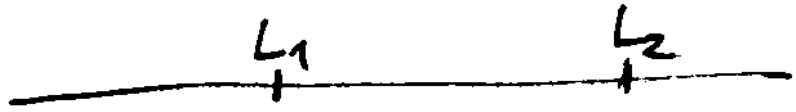
Per semplicità supponiamo che $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$.

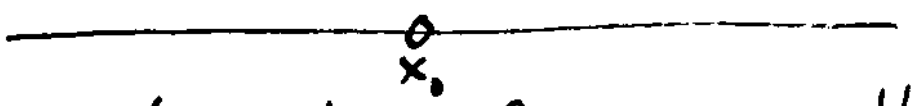
~~Affermazione~~

Supponiamo per assurdo che non sia vero, cioè che le due affermazioni siano vere, ma

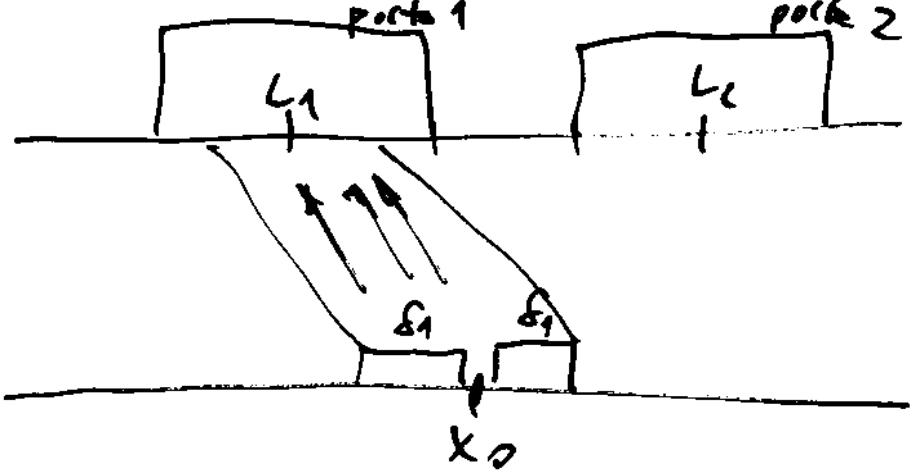
$$L_1 \neq L_2$$

Facciamo vedere che ne deriva una situazione impossibile





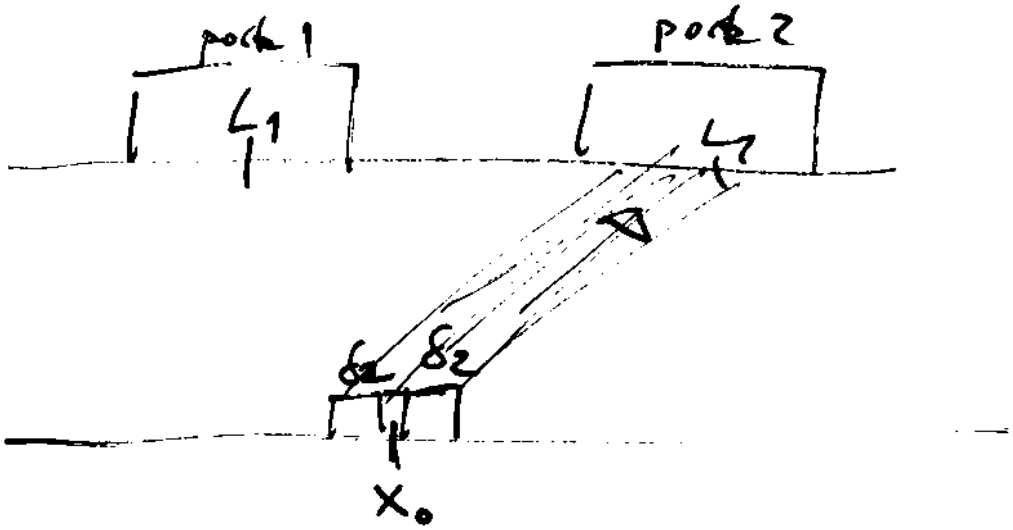
Fissiamo due porti di raggio $\varepsilon = \dfrac{|L_1 - L_2|}{3}$



le due porte non hanno punti in comune

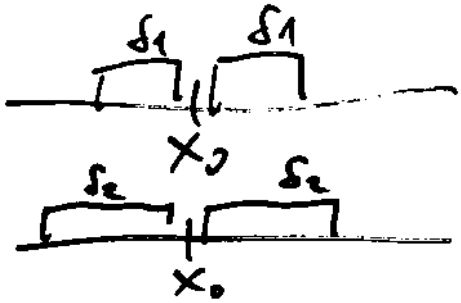
picco 1

l'attaccante vince la partita 1, cioè trova un $\delta_1 > 0$ tale che tutti i tiri lanciati la quella zona finiscono nella porta 1



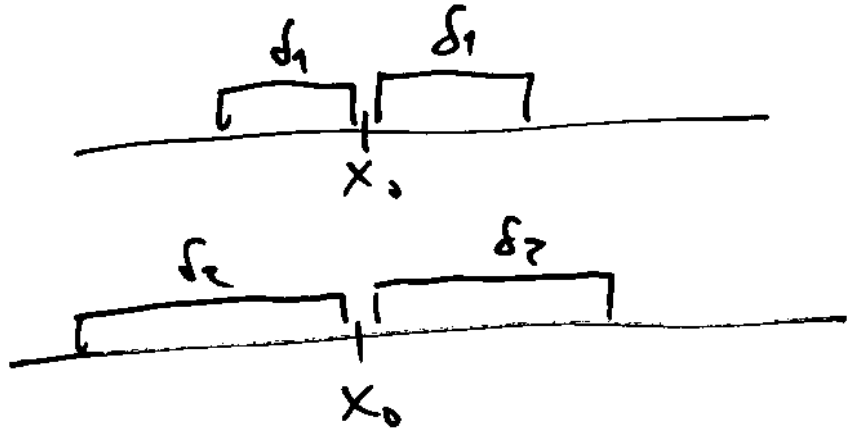
l'attaccante vince la partita 2, cioè trova un $\delta_2 > 0$ tale che tutti i tiri nella porta 2

Abbiamo 2 zone di tiro

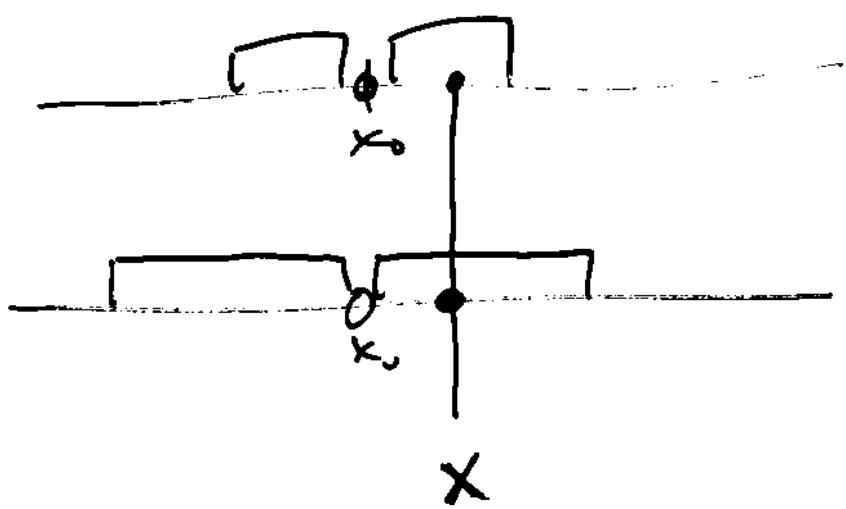


Sia δ_1 e δ_2 non sono nulle se non che sono > 0
Possono essere diversi

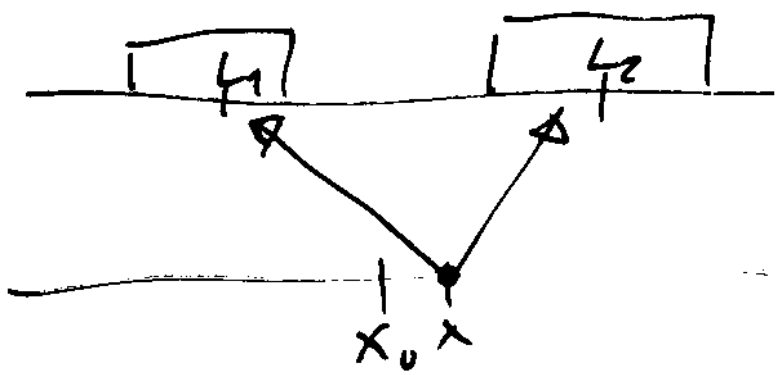
7 gen 2021 - P 10



Esiste un punto x che è $\neq x_0$ e che sta contemporaneamente in entrambe le zone di tiro



tiro di ripara su questo particolare punto x



Il ripara dovrebbe fermare sia nella porta 1 che nella porta 2

Impossibile. Quindi $L_1 > L_2$ (VI)

Nelle ipotesi di unicità, il limite se esiste è unico

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ ha un significato univoco può esistere o non esistere

VARIANTI

Finora x_0 e L erano entrambi finiti

Ora ci interessa: anche il caso in cui x_0 e L sono infiniti

x_0 finito, $L = +\infty$

Cosa vuol dire che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$?

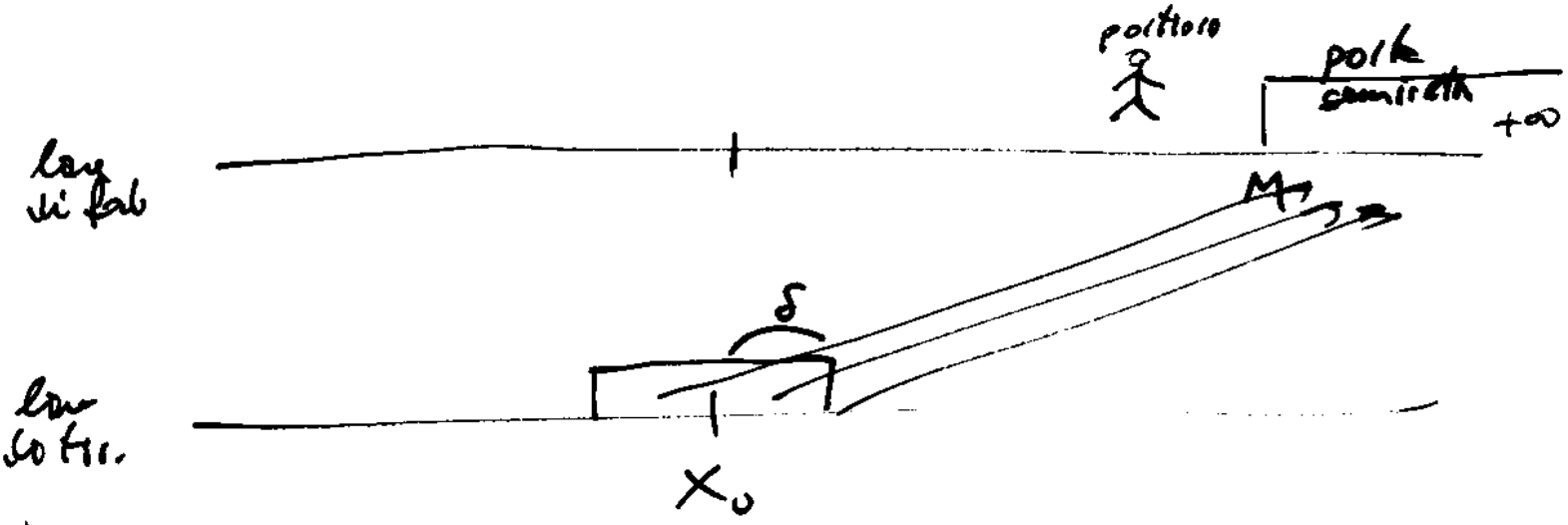
equivalentemente, che $f(x) \to +\infty$ per $x \to x_0$?

La definizione precisa è questa:

$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \text{dom} f$

$0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M$

GIOCO CHE SPIEGA LA DEF.



7 giu 2021 - p. 12

Il portiere sceglie $M \in \mathbb{R}$

la porta è $]M, +\infty[$

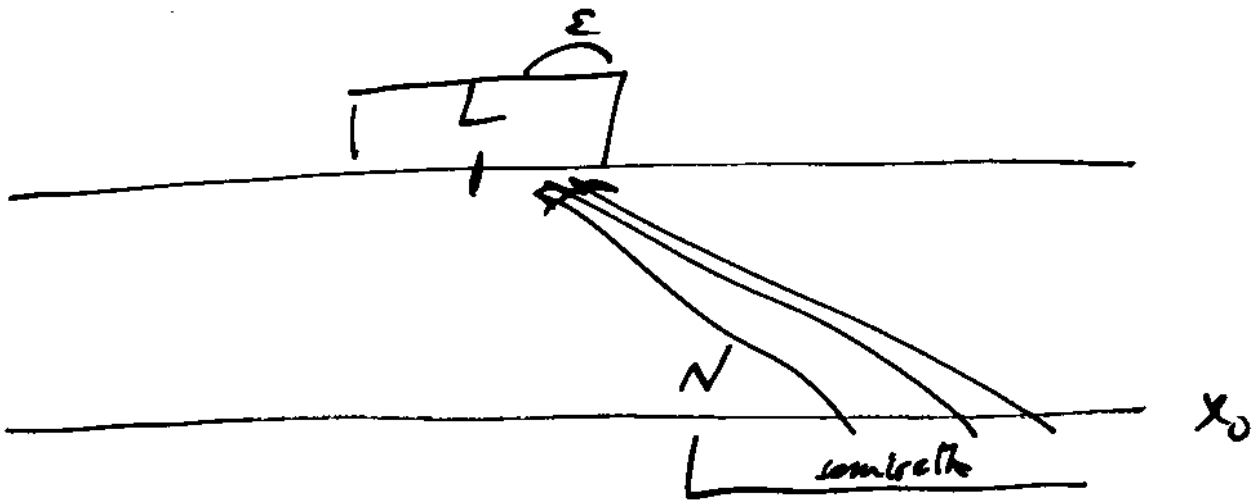
l'attaccante sceglie $\delta > 0$

tira tutti i ripari nella zona di fin. (escluso x_0)

Se tutti i ripari sono in porta, vince l'attaccante, e il portiere chiede la rivincita

Se un ripar è fuori vince il portiere.

ALTRA VARIANTE $x_0 = +\infty$, L finito



$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \text{dom } f$

$$x > N \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

$$f(x) \to L \quad \text{per} \quad x \to +\infty$$

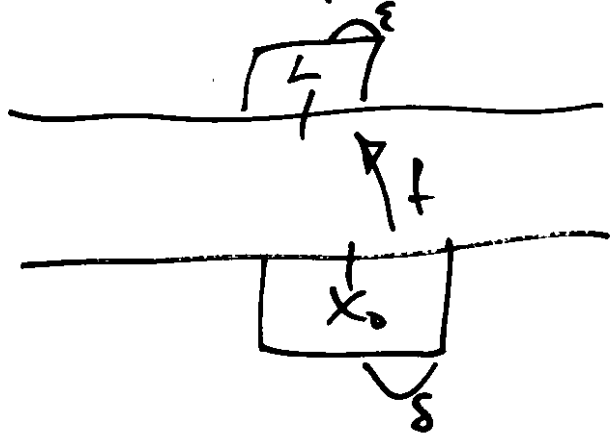
ALTRE VARIANTI

$$L = +\infty \quad , \quad x_0 = +\infty$$

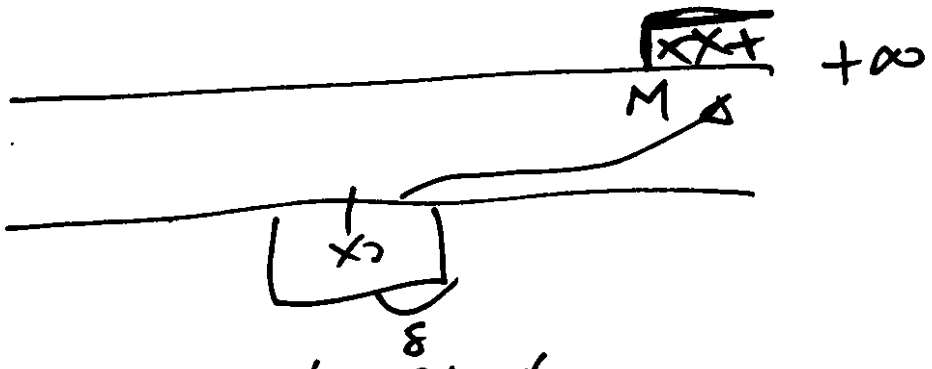
VARIANTI DELLA DEFINIZIONE DI LIMITE

$x \to \boxed{x_0}$ $\qquad f(x) \to \boxed{L}$

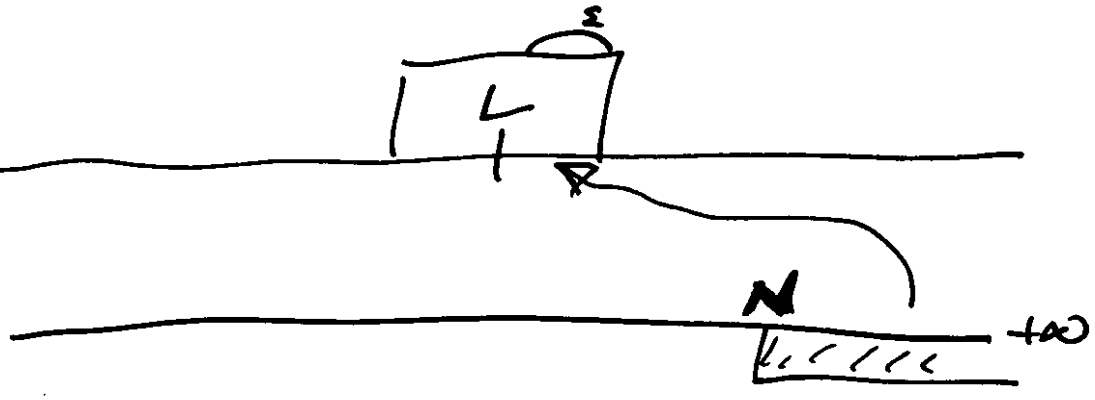
x_0, L entrambi finiti



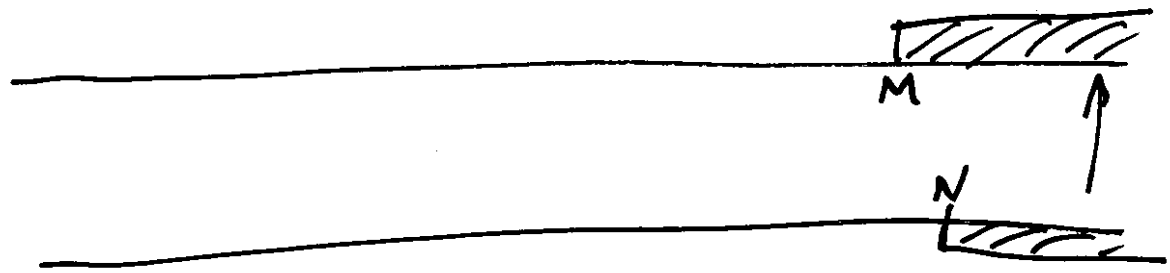
x_0 finito $\qquad L = +\infty$



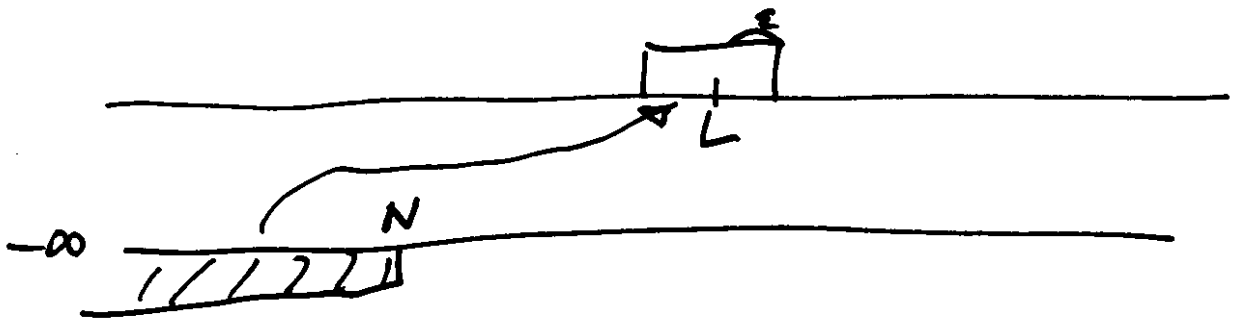
$x_0 = +\infty$, $\quad L$ finito



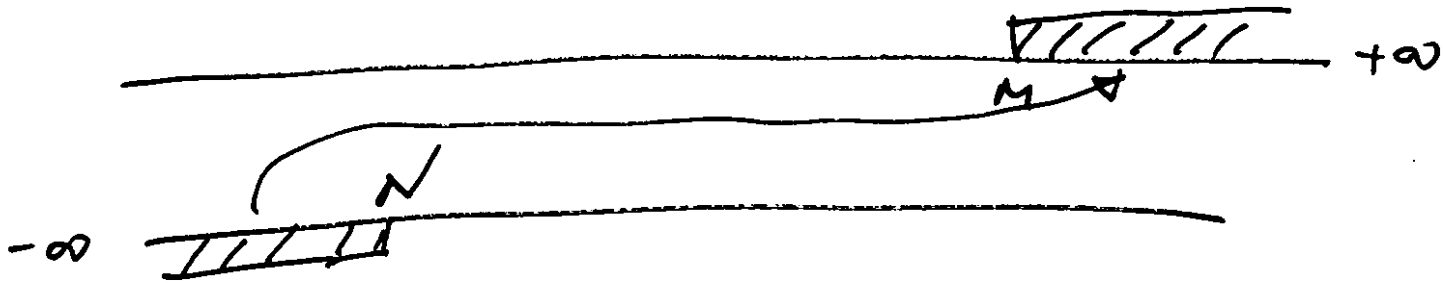
x_0, $L = +\infty$



$x_0 = -\infty$ L finito



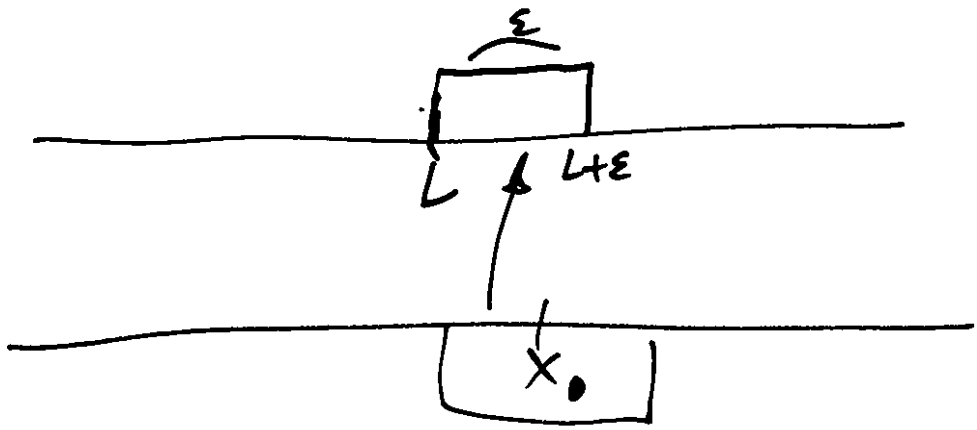
$x_0 = -\infty$, $L = +\infty$



x_0	L
finito	finito
$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$

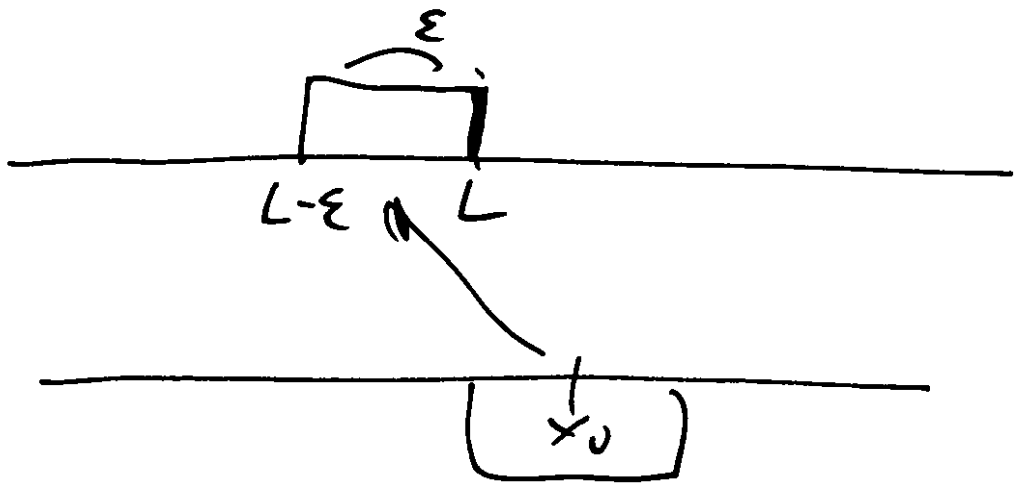
} combinazioni

LIMITI UNILATERALI



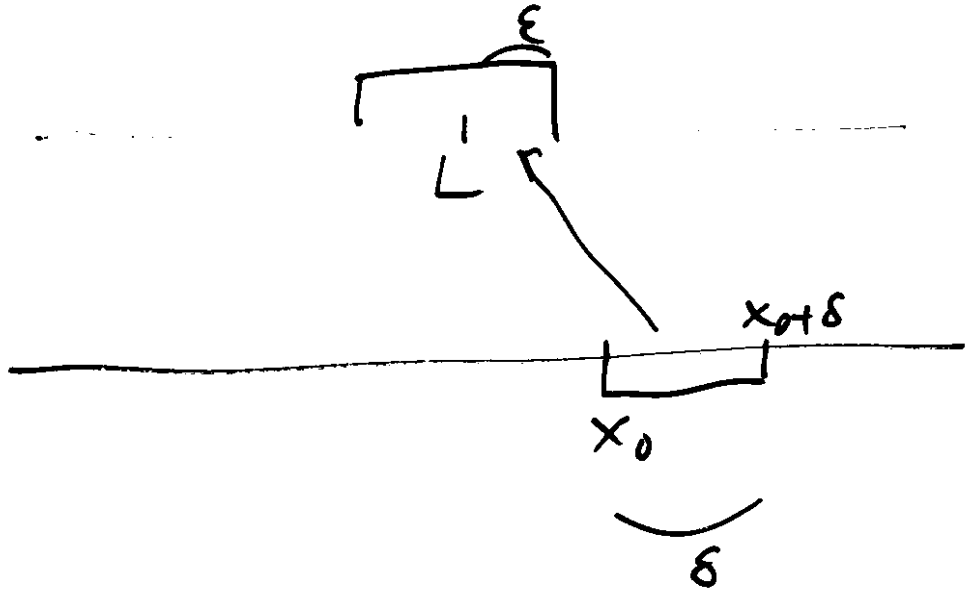
$f(x) \to L^+$ per $x \to x_0$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L^+$ limite per eccesso



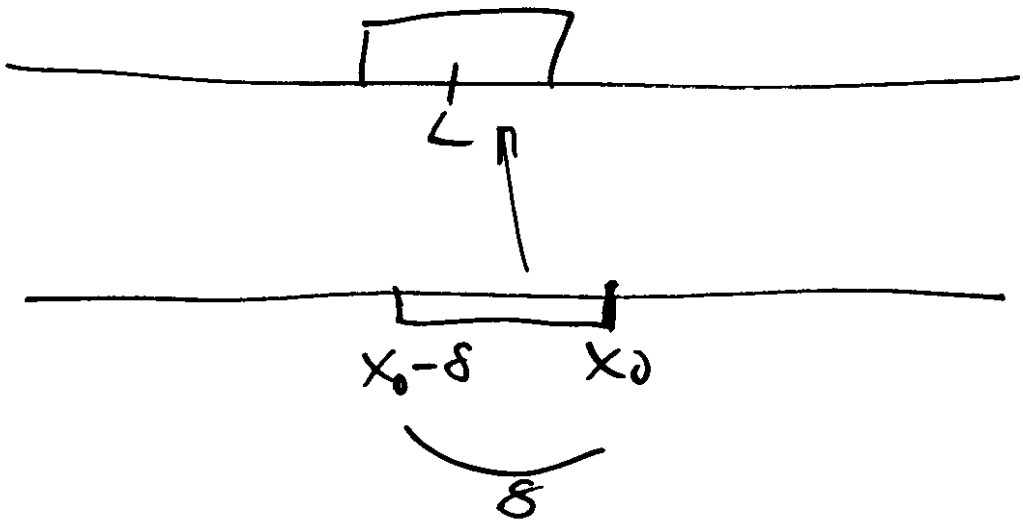
$f(x) \to L^-$ per $x \to x_0$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L^-$

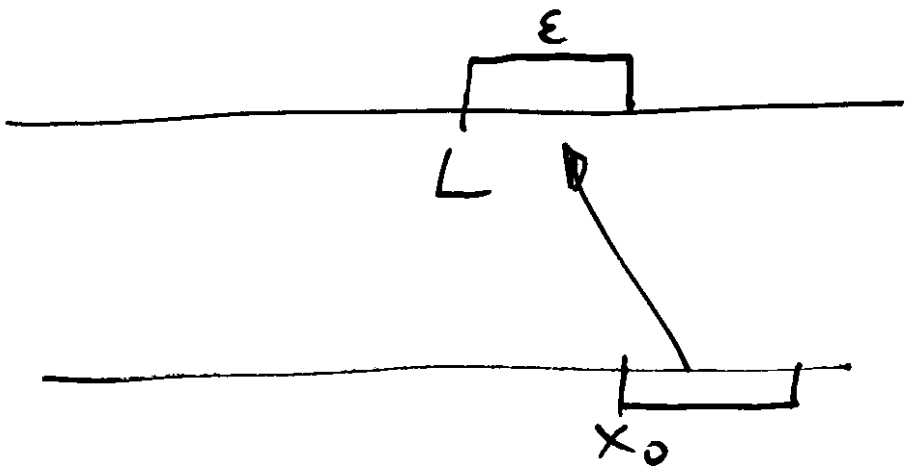


$f(x) \to L$ per $x \to x_0^+$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$



$f(x) \to L$ per $x \to x_0^-$



$f(x) \to L^+$ per $x \to x_0^+$

x_0	L
finito	finito
x_0^-	L^+
x_0^+	L^-
$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$

x_0 è ammesso fra i calcoli di rigore o no? $\equiv$

FATTO FONDAMENTALE:

i limiti spesso si possono calcolare esattamente

TEOREMI BASE PER IL CALCOLO DEI LIMITI

Teoremi dell'Algebra dei limiti

Sono date 2 funzioni $f(x)$, $g(x)$ per cui ha senso calcolare la somma $f(x)+g(x)$, e supponiamo che

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \to L_1 \\ g(x) \to L_2 \end{array}\right\} \quad \text{per } x \to x_0,$$

con L_1, L_2 finiti. Allora

1) $c f(x) \to c L_1$ per $x \to x_0$ (c costante finita)

→ 2) $f(x) + g(x) \to L_1 + L_2$ per $x \to x_0$

→ 3) $f(x) \cdot g(x) \to L_1 \cdot L_2$ per $x \to x_0$

4) $\frac{1}{g(x)} \to \frac{1}{L_2}$ per $x \to x_0$ (se $L_2 \neq 0$)

→ 5) $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{L_1}{L_2}$ per $x \to x_0$ (se $L_2 \neq 0$)

$f(x) \to L_1$, $g(x) \to L_2$ — somma membro a membro → $f(x)+g(x) \to L_1+L_2$

$f(x) \to L_1$, $g(x) \to L_2$ — moltiplica → $f(x)\cdot g(x) \to L_1 \cdot L_2$

$f(x) \to L_1$, $g(x) \to L_2$ — divido → $f(x)/g(x) \to L_1/L_2$

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x) \big) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

In un certo senso il $\lim_{x \to x_0}$ si distribuisce sulla somma

---

NOTA

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

andrebbe letto:

limite **per** x che tende a x_0 **di** $f(x)$

limite (di) x che tende a x_0 (NO) di $f(x)$

⇒ il limite della somma è uguale alla somma dei limiti (clausola: a priori ultimi esistono finiti)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\,g(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$$

il limite si distribuisce anche nel prodotto

il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti (ovviamente se questi esistono finiti).

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$ se esistono finiti e il denom. $\neq 0$

NEL CALCOLO PRATICO

quando si ha una somma, prodotto o quoziente, difficilmente ci si subito il limite di entrambi $f(x)$ e $g(x)$, ci si calcola uno dei due

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) =$$

$\lim_{x\to x_0}$? $g(x)$ conosco il limite di $g(x)$ finito L_2

$$= \lim_{x\to x_0} \big(f(x) + L_2\big) =$$

$$= \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) + L_2$$

13 giu 2021 - p 5

$$\lim_{x\to x_0}\left(\underbrace{f(x)}_{?}\cdot\underbrace{g(x)}_{\to L_2 \text{ finito} \neq 0}\right) = \lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot L_2\right) =$$

REGOLA IMPORTANTE

$$= L_2 \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

RAPPORTO

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{L_2}$$

$g(x) \to L_2$ finito $\neq 0$

$f(x) \to L_1$ finito $\neq 0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{L_1}{g(x)}$$

13 gen 2021 – p.10

PSEUDOREGOLA

$$\lim_{x \to x_0} \Big(\text{formula complessa} \; \underbrace{g(x)}_{\text{sottoformula}} \; \text{con} \lim \Big) = \lim_{x \to L_2} (\text{formula con } L_2)$$

$g(x) \to L_2$

SBAGLIATO

IN MOLTI CASI DÀ RISULTATI SBAGLIATI

13 gen 2021 – Pr 14

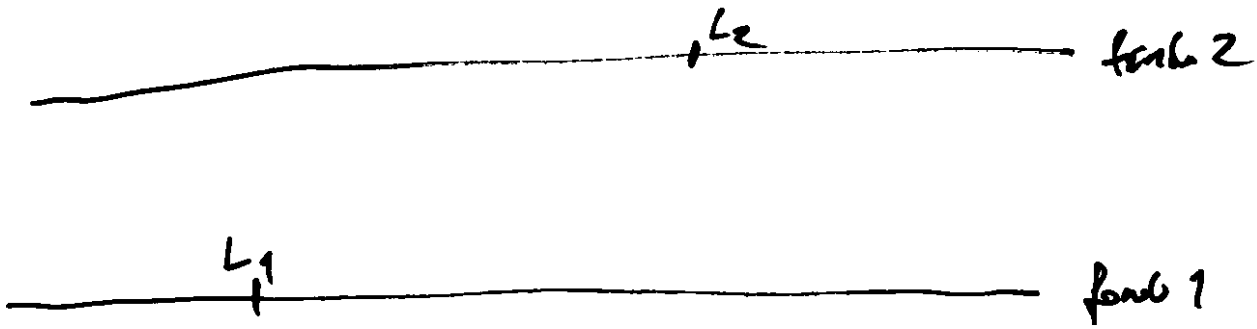
DIMOSTRAZIONE dell'algebra dei limiti nel caso della somma

ipotesi $f(x) \to L_1$ per $x \to x_0$

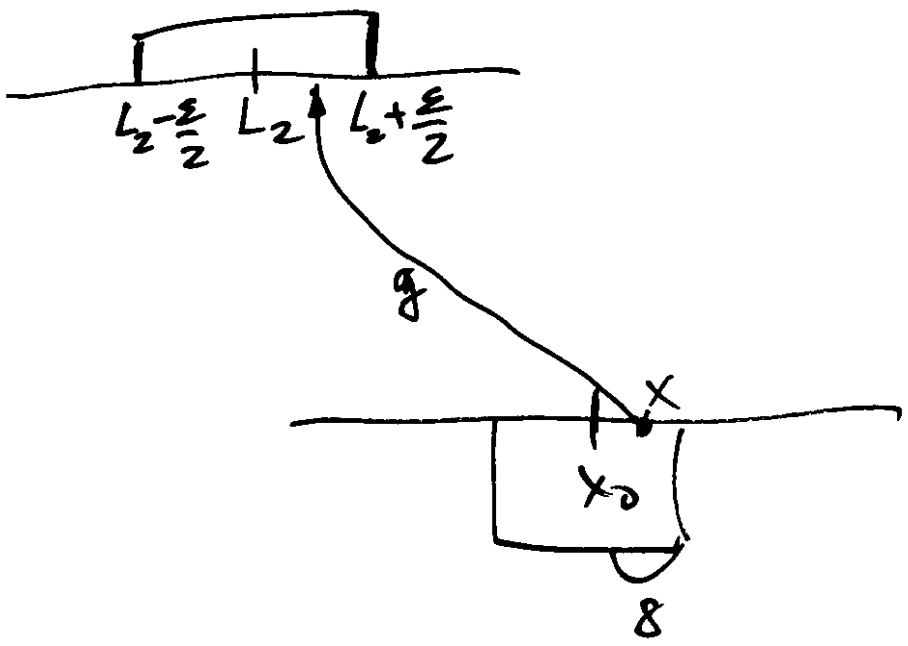
$g(x) \to L_2$

tesi $f(x) + g(x) \to L_1 + L_2$

Bisogna destreggiarsi con 3 piedi contemporaneamente



se colpisce anche la seconda parte



per x sinistri $\quad L_2-\frac{\varepsilon}{2} < g(x) < L_2+\frac{\varepsilon}{2}$ per x destri

---

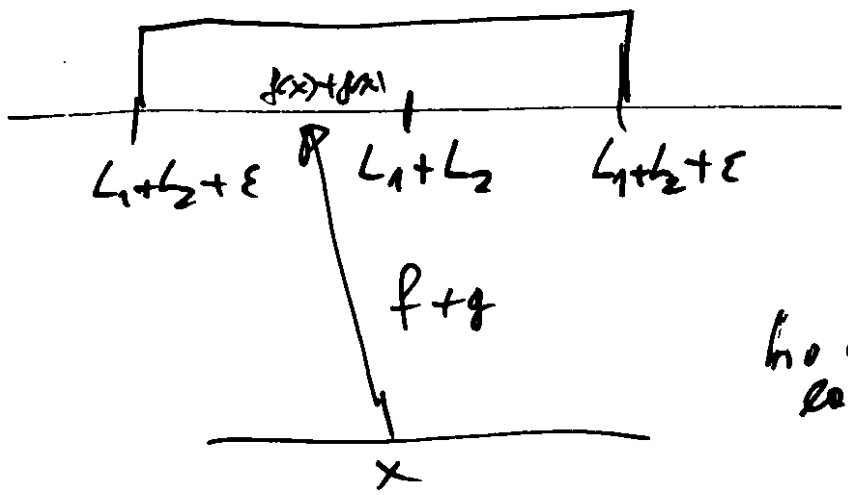
$$L_1-\frac{\varepsilon}{2} < f(x) < L_1+\frac{\varepsilon}{2}$$
$$L_2-\frac{\varepsilon}{2} < g(x) < L_2+\frac{\varepsilon}{2}$$

} veri entrambi

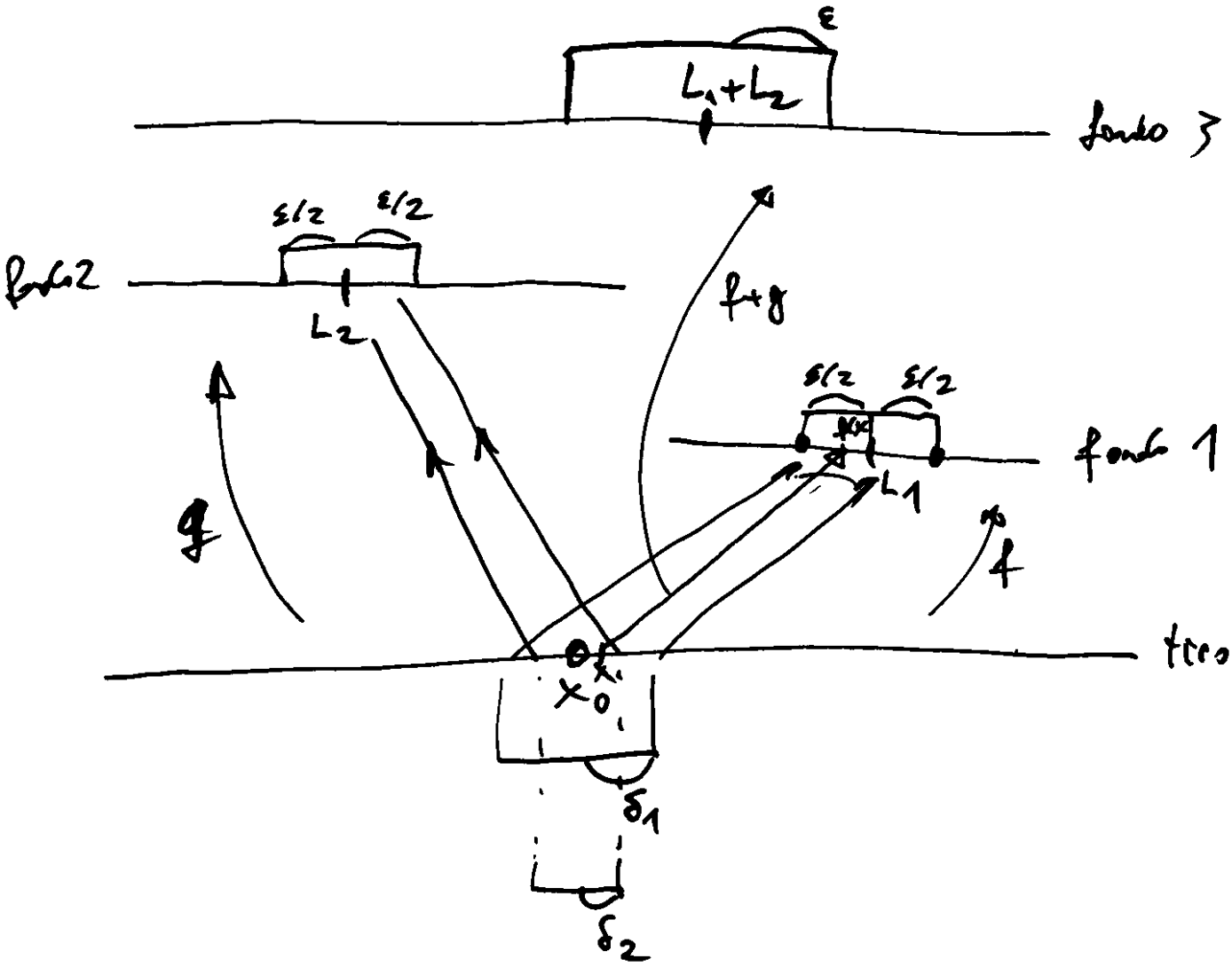
sommare

$$L_1+L_2-\varepsilon < f(x)+g(x) < L_1+L_2+\varepsilon$$

per x sin. — vero anche prima — per x destri



ho colpito la parte grande



$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ il più piccolo fra i due

δ sarà l'ampiezza della zona di tiro per il terzo piano

Sia x dentro questa zona di tiro

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

Allora x sta in entrambe le zone di tiro vincenti per due piani base

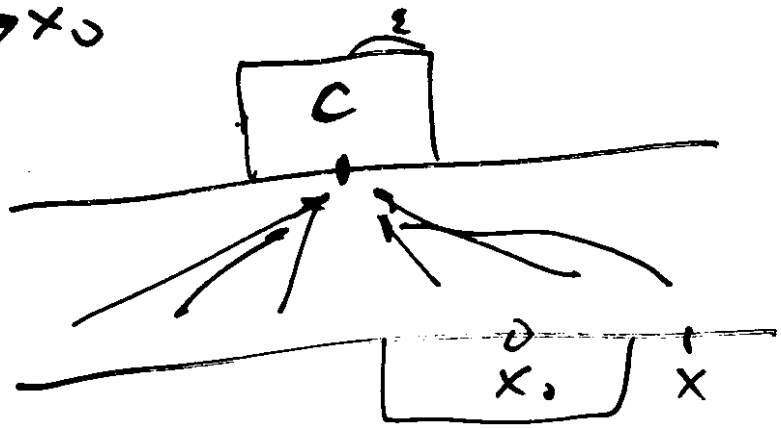
si deduce le prime parti:

primo limite $L_1 + \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < L_1 + \frac{\varepsilon}{2}$ primo limite

LIMITI DI PARTENZA SU CUI POI COSTRUIRE

Limite della funzione costante = costante stessa

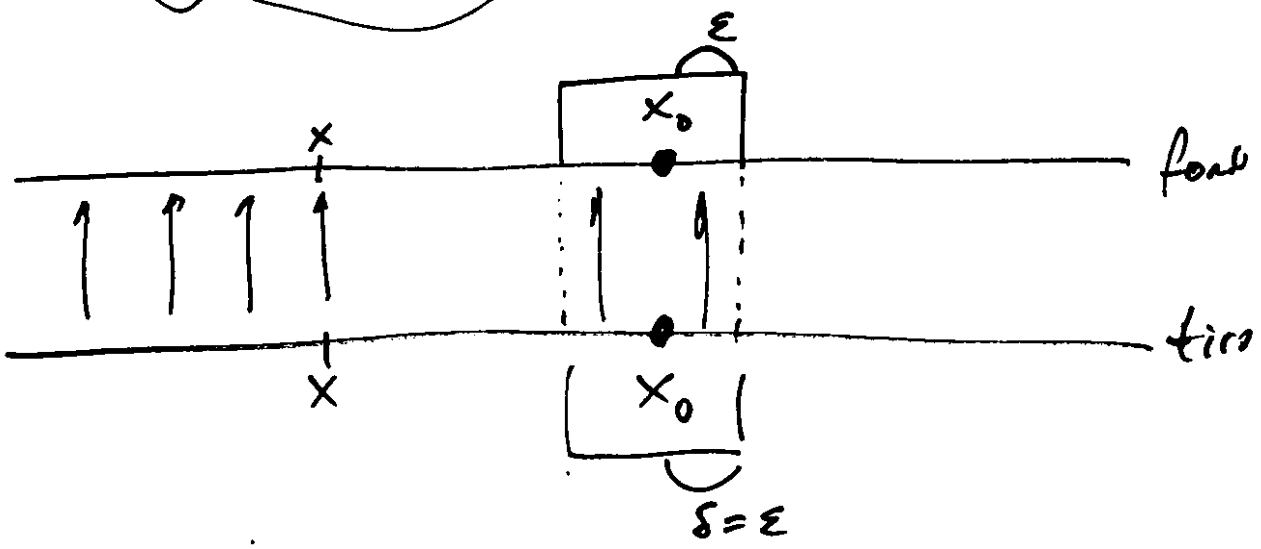
$$\lim_{x \to x_0} c = c$$



tutti i rapori finiscono in C
nessun rapore andrà mai fuori parte

Limite della funzione identità

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0$$



$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

LIMITI DI BASE

$\lim_{x \to x_0} c = c$ $\qquad$ $\lim_{x \to x_0} x = x_0$

Se $p(x)$ è un polinomio

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0) \quad \text{se } x_0 \text{ è finito}$$

$$\lim_{x \to 3} (x^3 - 2x^2) = 3^3 - 2 \cdot 3^2$$
$$x = 3$$

Si può fare per tutte le funzioni CONTINUE

Def Una funzione f è detta continua in x_0 se 1) $x_0 \in \text{dom} f$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$x = x_0$

Una funzione f è detta CONTINUA (e basta) se è continua in tutti i punti del dominio.

FATTO IMPORTANTE: molto spesso è facile capire se una funzione è continua o no, basta guardare la formula:

REGOLA se la formula di $f(x)$ è costituita da un numero finito di funzioni elementari (polinomi, radici, funzioni trigonometriche, esponenziali, logaritmi, valore assoluto) combinate con un numero finito di operazioni algebriche e composizione. Allora la funzione è continua

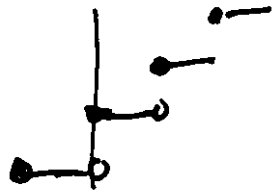
~~In altre parole, e la fine~~

Le Le uniche funzioni che abbiamo introdotto che non sono continue sono

sgn (segno

)

$\lfloor x \rfloor$ parte intera, parziale, floor



$\lceil x \rceil$ soffitto

Se la formula non contiene funzioni ignote e non contiene quelle tre $(\operatorname{sgn}, \lfloor\,\rfloor, \lceil\,\rceil)$ la funzione è continua

$$f(x) = \frac{\sin x - 3e^x x^3}{|x - \sqrt{x+1}| \log(1+|x|)}$$

è continua. Sul dominio, qualunque esso sia

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin x - \dots}{\dots} = \frac{\sin 2 \dots}{\dots}$$

se ha senso il limite è quello

IL VALORE ASSOLUTO È CONTINUO

$$\lim_{x \to 5} |x| = |5| = 5$$

Se f è continua, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$x \; x_0 \in \mathrm{Dom}\, f$

$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 2x)$ indet $+\infty - \infty$

$x^2 \to +\infty$ più grande

$2x \to +\infty$

si raccoglie il fattore l'infinito più grande

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right) = +\infty$$

$x^2 \to +\infty$

$\frac{2}{x} = \frac{2}{\infty} = 0$

$1 - 0 = 1$

Nel caso di un polinomio l'infinito più grande è quello col grado più grande

$\lim_{x \to -\infty} (x^4 + 3x^3)$ indet. $+\infty - \infty$

$x^4 \to +\infty$ $\quad 3x^3 \to -\infty$

$$= \lim_{x \to -\infty} x^4 \left(1 + \frac{3}{x}\right) = +\infty$$

$x^4 \to +\infty$

$\frac{3}{x} \to 0$

$1 + 0 > 1$

14 gen 2021 - 7.4

CONFRONTO FRA INFINITI

l'<u>esponenziale</u> crescente prevale su tutti i polinomi

esp. cresc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^3} = +\infty \qquad \frac{+\infty}{+\infty}$$

pol.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 - 3x}{3^x} =$$

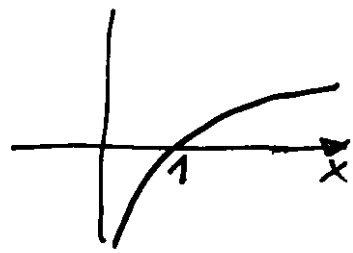
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5\left(1-\frac{3}{x^4}\right)}{3^x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{3^x} \cdot \left(1-\frac{3}{x^4}\right) = 0$$

$\frac{x^5}{3^x} \to 0$; $1-\frac{3}{x^4} \to 1-0=1$

il logaritmo è più piccolo di tutti i polinomi

$$\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$$

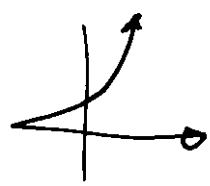


$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$= 0$$

log < polinomi < esponenziali crescenti

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2^x - x^3 \right) \qquad +\infty - \infty$$



$$= \lim_{x \to +\infty} 2^x \left(1 - \frac{x^3}{2^x} \right) = +\infty \cdot 1 =$$

$2^x \to +\infty$ $\qquad \frac{x^3}{2^x} \to 0$ $\qquad = +\infty$

Teoremi utili nel calcolo dei limiti

Teorema del confronto, detto anche teorema dei due carabinieri.

Abbiamo 3 funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ di cui sappiamo che

1) vale la disug. $f(x) \le g(x) \le h(x)$ $\forall x \in$ dominio

2) $f(x) \to L$ e $h(x) \to L$ stessa per $x \to x_0$

Allora anche $g(x) \to L$ per $x \to x_0$

SCHEMA

$f(x) \le g(x) \le h(x)$

$f(x)$: cost. — $g(x)$: cost. — $h(x)$: cost.

$f(x) \le g(x)$ conclusione

$g(x) \le h(x)$ noto

$f(x)$ noto

$\to L$

ESEMPIO

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$ non esiste? $\sin x \to ?$ NON ESISTE

non ha limite è una funzione oscillante

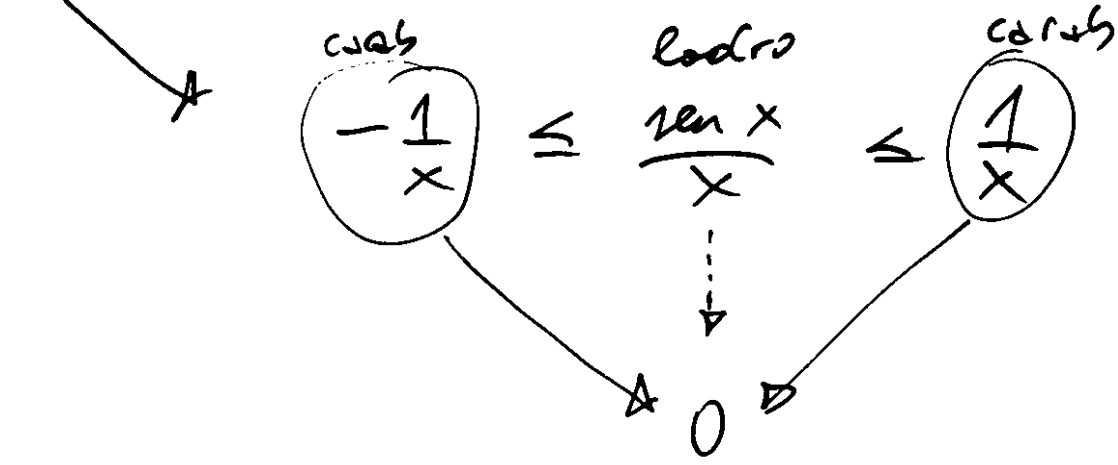
$x \to +\infty$

Sfruttiamo disuguaglianze notevoli

$$-1 \le \sin x \le 1 \qquad \forall x$$

dividiamo per x i tre membri

Poiché cerchiamo il $\lim_{x\to+\infty}$ possiamo supporre $x>0$



conclusione: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x}$?

Confronto con un singolo caso limite

caso
1) $f(x) \le g(x)$
caso

2) $f(x) \to +\infty$ per $x \to x_0$

Conclusione: $g(x) \to +\infty$ per $x \to x_0$

Se caso
1) $f(x) \le g(x)$
caso

2) $g(x) \to -\infty$ per $x \to x_0$

Allora anche $f(x) \to -\infty$

14 giu 2021 - p. 8

Teorema del limite della funzione composta

o anche "cambio di variabile nel limite"

Problema calcolare $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$ — composizione

Sapendo $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$

$\lim_{y \to y_0} f(y) = L$

Allora posso concludere che

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = L$$

quasi sempre più precisamente il risultato è garantito in alcune ipotesi aggiuntive:

1) $y_0 = \pm\infty$

oppure

2) $g(x) \to y_0^+$ oppure $g(x) \to y_0^-$

($g(x) \geq_{\neq} y_0$ $\quad$ $g(x) \leq_{\neq} y_0$)

oppure 3) $y_0 \in \text{dom } f$ e f è continua in y_0

Sicuri esempi nelle verifiche

Come si usa?

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y)$$

cambio di variabile

$g(x) \to y_0$

pongo $g(x) = y$ nuova variabile

Se f è continua in y_0

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y) = f(y_0)$$

($g(x) \to y_0$)

Quando f è continua posso portare f dentro e fuori dal limite

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$$

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} = \sqrt{\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x}{x}}$$

$\sqrt{\ }$ continua

$$\lim_{x\to 3} \log\left(\frac{1+x^2}{x-1}\right) = \log\left(\lim_{x\to 3} \frac{1+x^2}{x-1}\right)$$

LIMITI NOTEVOLI

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$

x arco in radianti:

$$\frac{\operatorname{sen} 0}{0} = \frac{0}{0} \text{ indet.}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

è una conseguenza del precedente

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1^2-\cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} =$$

$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$; $1^2 = 1$

$1+\cos 0 = 1+1 = 2$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

14 gen 2021 – p. 11

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \simeq 2{,}17$$

numero di Nepero

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Limiti collegati a questi

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

CALCOLO DEI LIMITI

Limiti base elementari e quelli notevoli

Algebra dei limiti (confronto, cambio di variabile)

TRUCCO FREQUENTE CON LE RADICI QUADRATE

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\sqrt{x^2-x}}_{\to+\infty}-\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{\to+\infty}\right)= \quad \text{indet } +\infty-\infty$$

moltiplicare e dividere per la somma delle radici $\quad (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x})}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-x)-(x^2+x)}{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x})}+\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-x}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=-\frac{2}{2}=-1$$

($\sqrt{1-\frac{1}{x}}\to\sqrt{1}$, $\sqrt{1+\frac{1}{x}}\to\sqrt{1}$)

PSEUDO REGOLA SBAGLIATA

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)=$$

$\left(1-\frac{1}{x}\right)\to 1$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)\to 1$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\cdot 1}-\sqrt{x^2\cdot 1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty} 0 = 0$$

SBAGLIATO

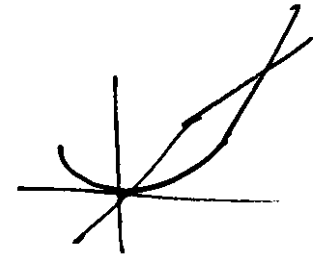
NEL COMPITINO NON CI SARÀ L'ESERCIZIO SU sup e inf

$h(x)=\min\{f(x), g(x)\}$

se f, g sono continue anche h è continua

$$\lim_{x \to 0} \max\{x, x^2\}$$

$$\max\{x, x^2\} = \begin{cases} x & \text{se } x \le x^2 \\ x^2 & \text{se } x > x^2 \end{cases}$$



$$= \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 1 \end{cases}$$

MASSIMI, MINIMI DI INSIEMI INFINITI E CONCETTI COLLEGATI

$\max\{x, y\}$ = il più grande tra i due

$\max\{x, y, z\}$ = il più grande tra i tre

⋮

max di un insieme finito di numeri esiste tranquillamente.

~~esistenza~~ esiste

Similmente per il minimo di un insieme finito di numeri

C'è un problema quando si passa a un insieme infinito di numeri

Esistenza del massimo:

$\max \mathbb{N} =$

$\max \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Qual è il più grande numero naturale? Non c'è.

$\min \mathbb{N} = 0$

Facciamo una definizione formale

Def Sia A un insieme di numeri reali (finito o infinito).
Diremo che a è il massimo di A se verifica le 2 condizioni seguenti:

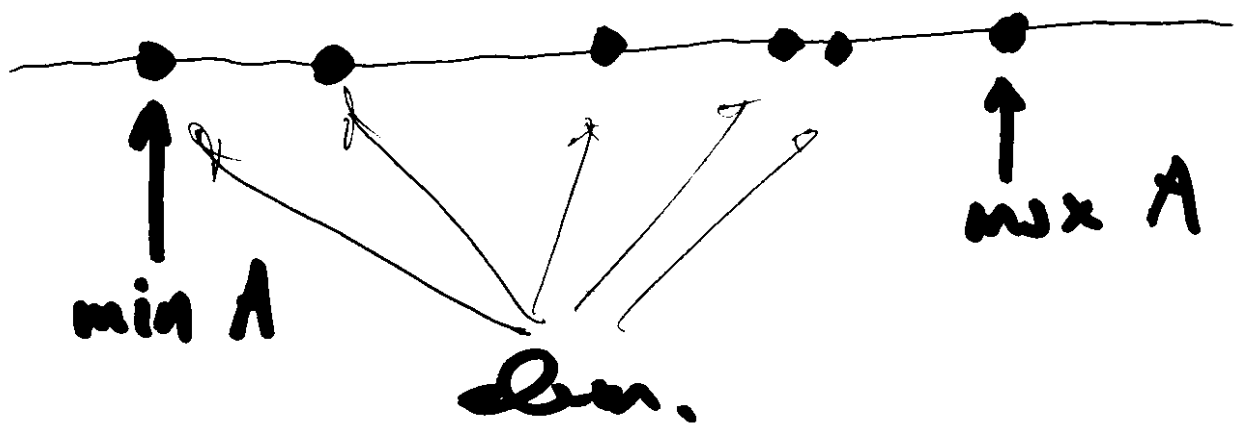
1) $a \in A$ (appartenenza all'insieme)

2) $\forall a' \in A \quad a' \leq a$
(ogni elemento di A è $\leq$ di a)

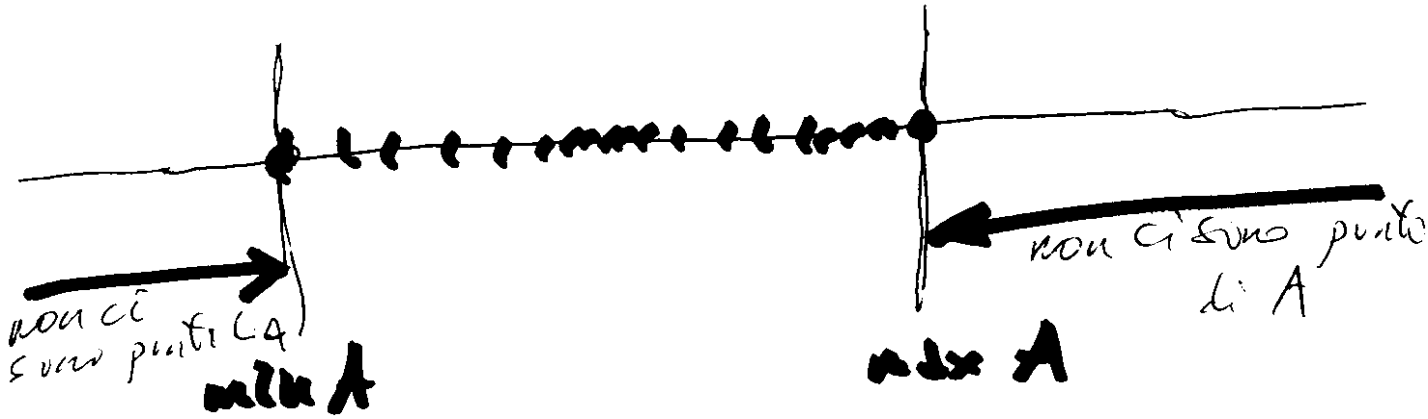
Analogamente a è detto minimo di A se

1) $a \in A$
2) $\forall a' \in A \quad a' \geq a$

GRAFICAMENTE



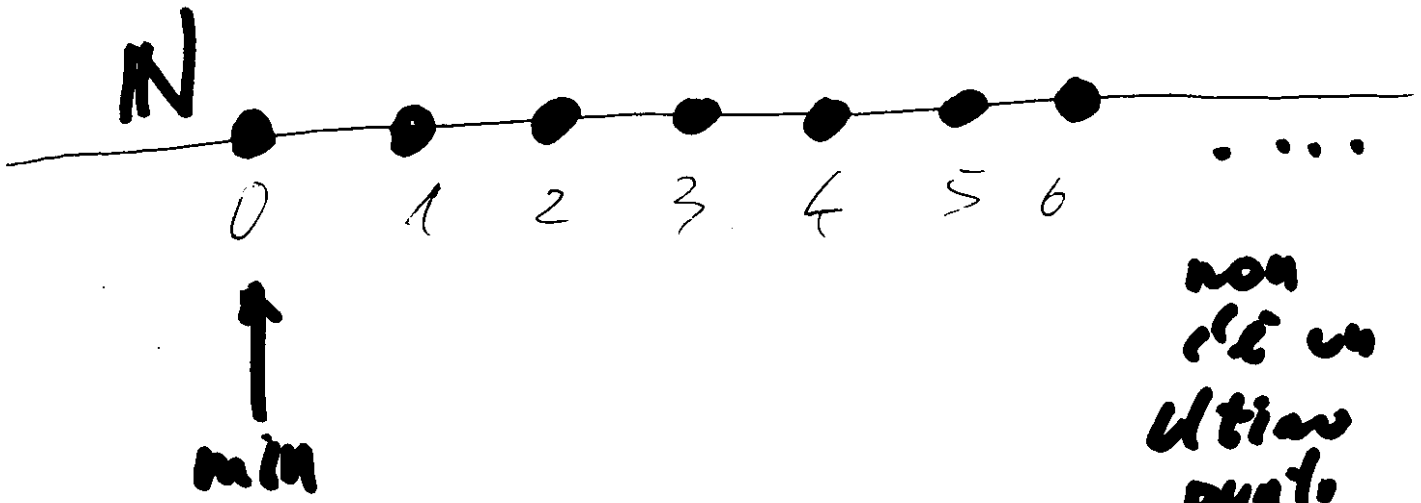
ogni elemento dell'insieme è compreso fra il max e il min

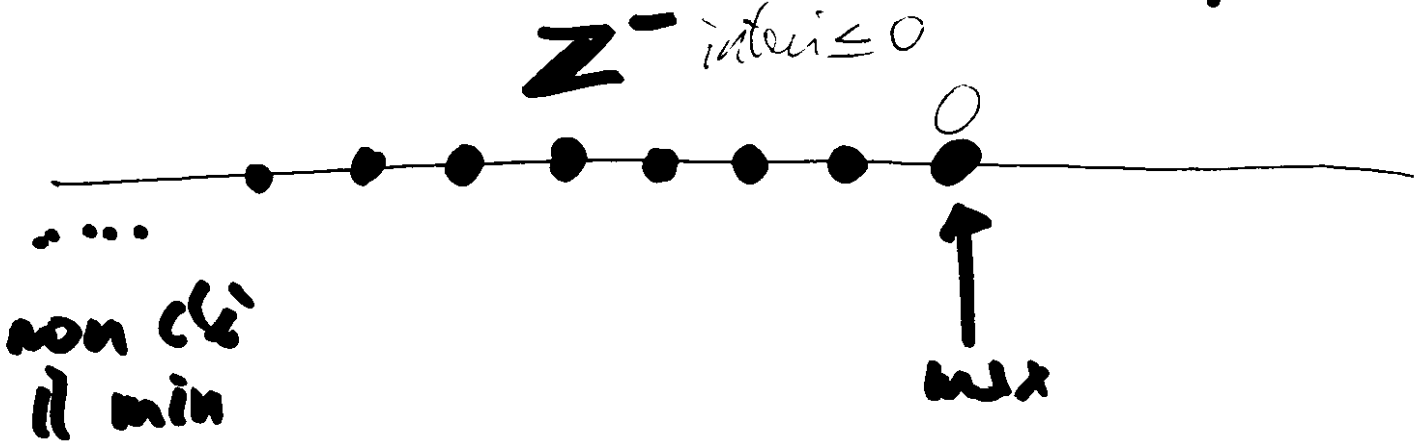


questa è la situazione generale

l'insieme ha min e max

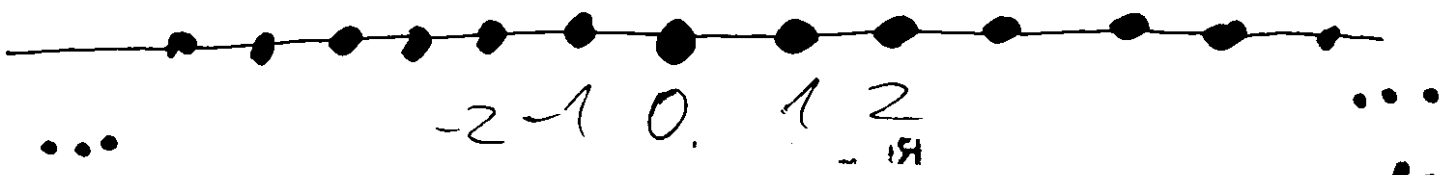
Il max può non esistere





1 mar 2021 - P4

$\mathbb{Z}$



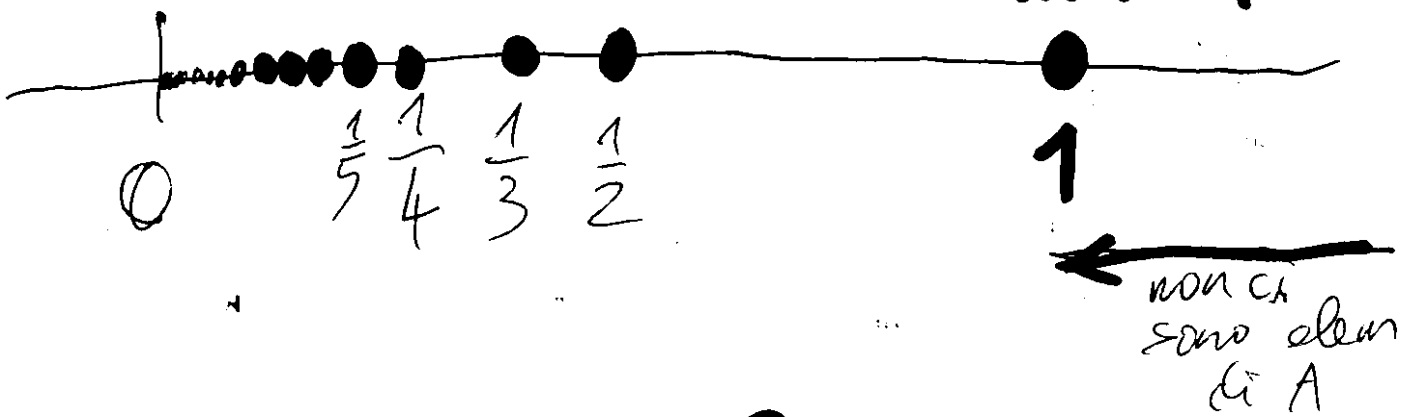
non c'è min

non c'è max

OSS $\max A$ e $\min A$ sono unici quando esistono

$$A = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, \dots\}$$

$$= \left\{ \tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$



$\min A = 0$?

$0 \in A$? $\quad \frac{1}{n} = 0$ impossibile

NO

se esiste il min A, è un elemento dell'insieme

$$a = \min A$$

1) $a \in A$ cioè $a = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$

2) $a \leq$ di ogni elemento di A

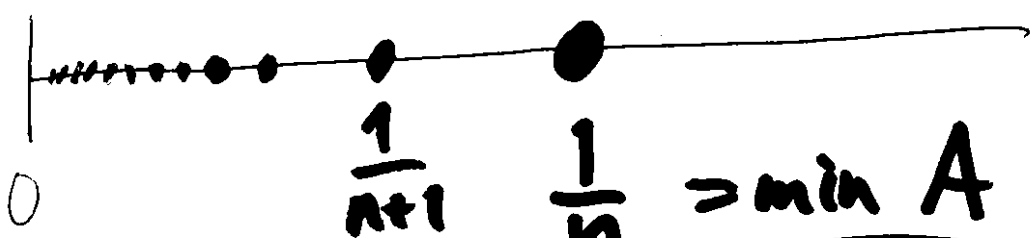
$$a \leq \frac{1}{m} \quad \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$\boxed{\frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} \quad \forall m \in \mathbb{N}}$$

impossibile

per esempio $m = n+1$

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$



impossibile

nessun elemento di A è $\leq$ di tutti

Sono state elaborate varianti del concetto di max/min per poter migliorare le situazioni in cui max/min non esistono.

Def di **maggiorante** di un insieme.

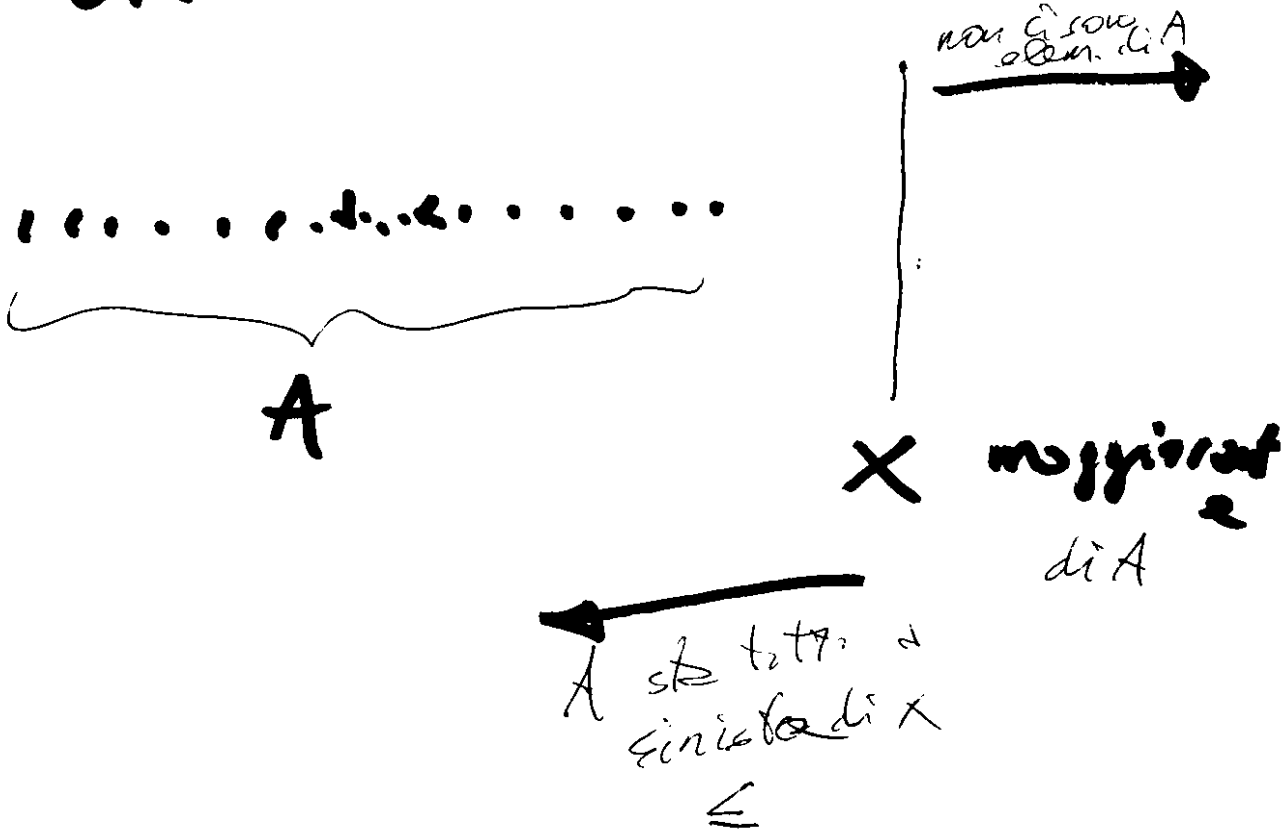
Dato un insieme A e un numero $x \in \mathbb{R}$, diremo che x è un **maggiorante** di A se

$$x \geq a \quad \forall a \in A$$

Un maggiorante di A è un numero reale che è $\geq$ di ogni elem. dell'insieme

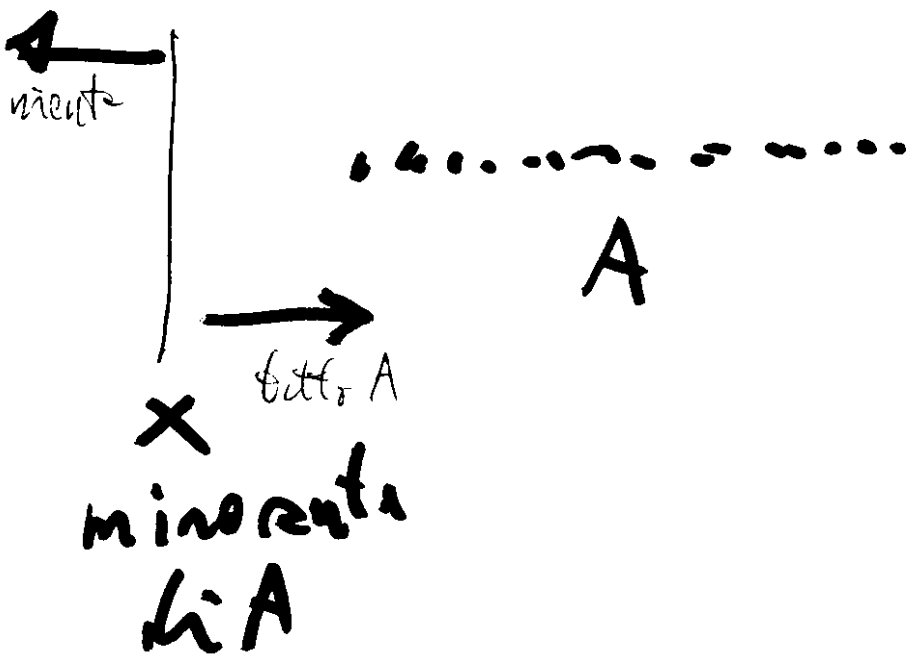
OSS **non** è richiesto che $x \in A$

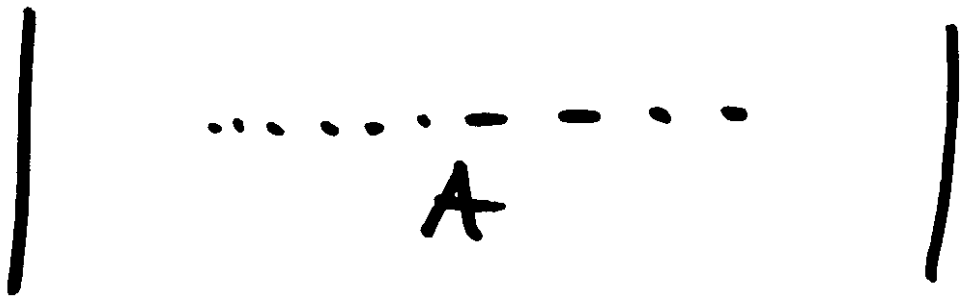
GRAFICAMENTE



Def maggiorante di A è un
$x \in \mathbb{R}$ tale che

$$x \geq a \quad \forall a \in A$$

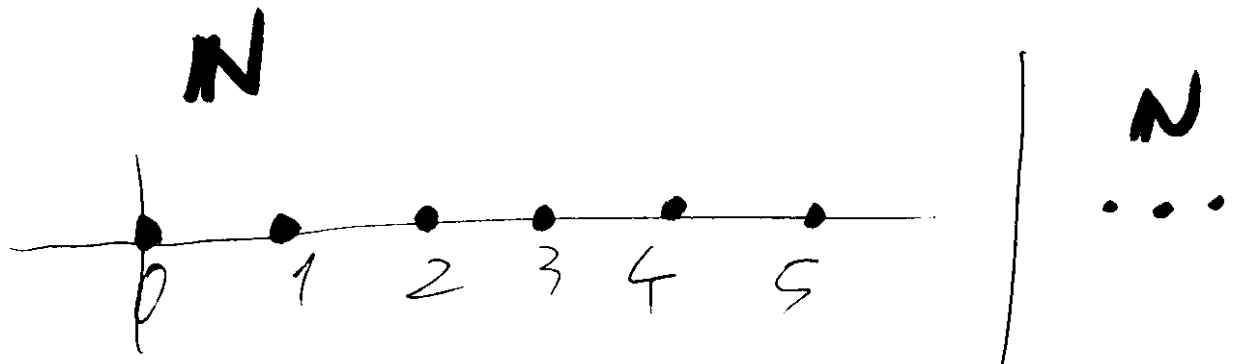




minoranti maggioranti

Proprietà di maggioranti e minoranti.

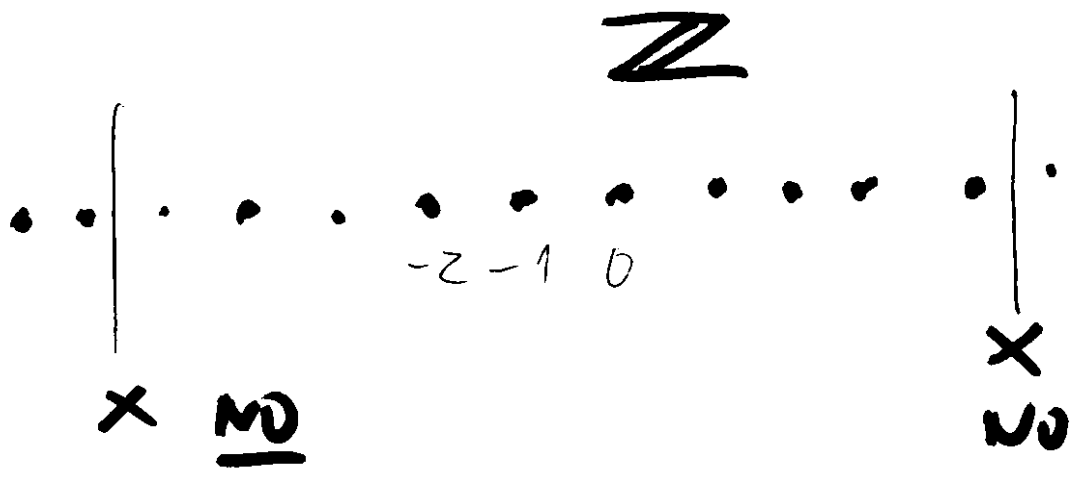
1) possono non esistere



$x \in \mathbb{R}$

non esiste

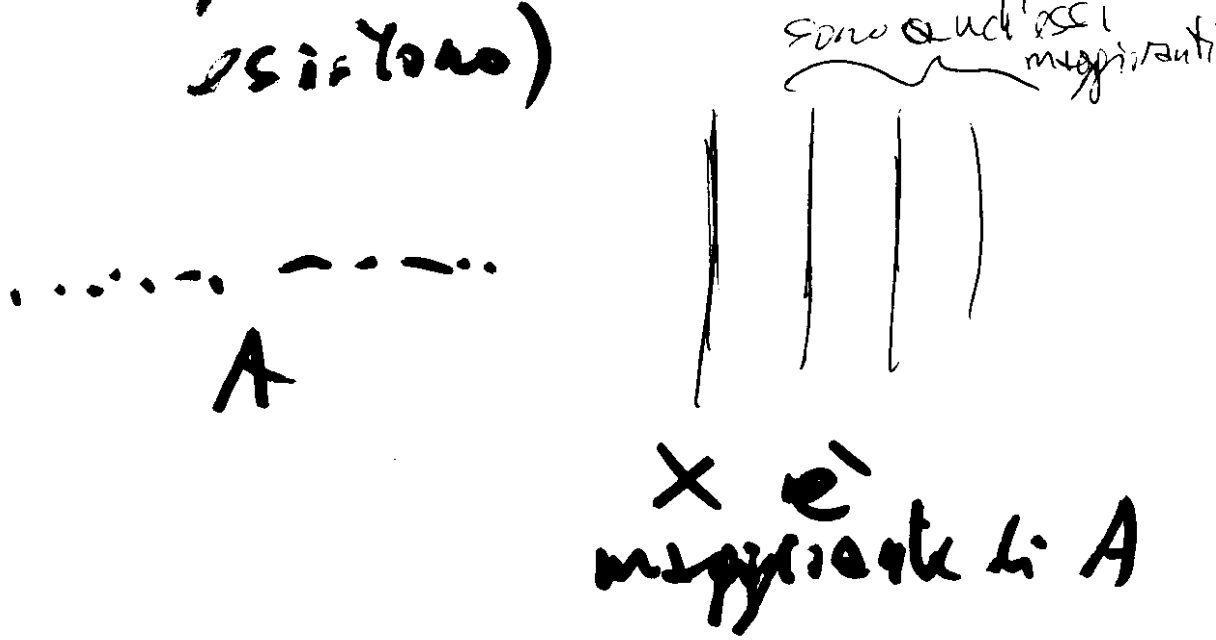
$\mathbb{N}$ non ha maggioranti



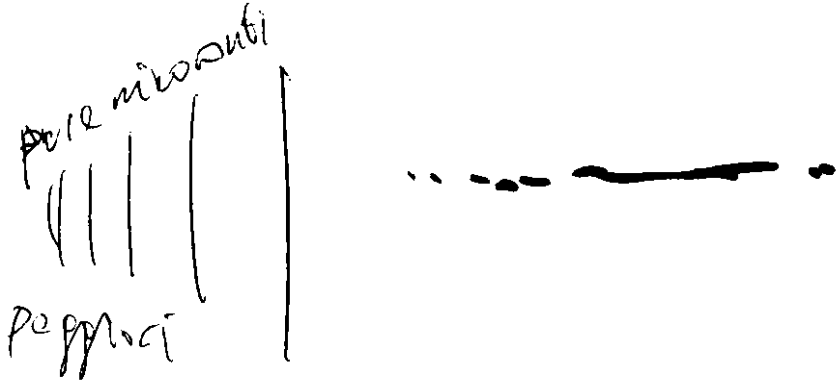
$\mathbb{Z}$ non è "ingabbiabile" fra un minorante e un maggiorante

2) quando esiste maggioranti o minoranti, non sono mai unici

(max, min sono unici quando esistono)



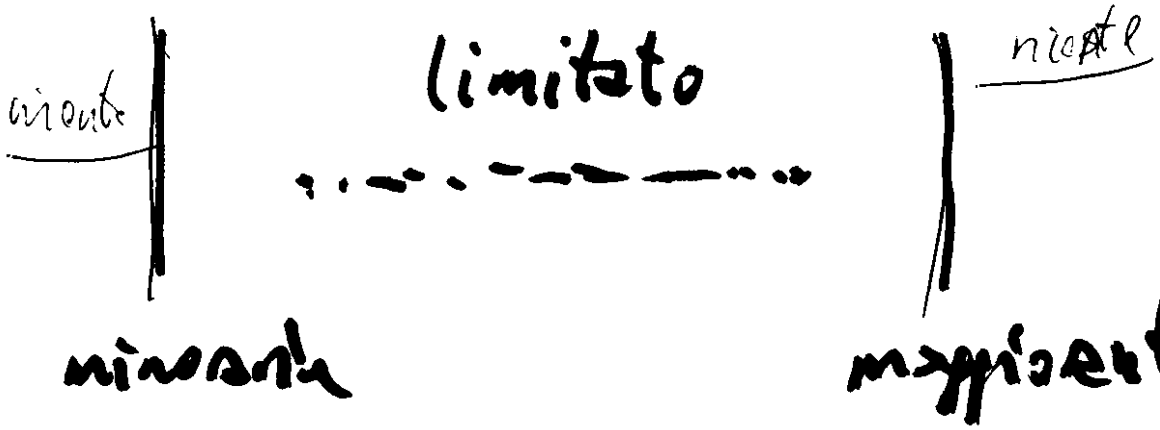
ogni maggiorante è sempre "peggiorabile"



X
minorante

Concetto di limitatezza

Def Un insieme A di numeri reali è detto **LIMITATO** se ha maggiorante e minorante



1 mar 2021 - p. 11

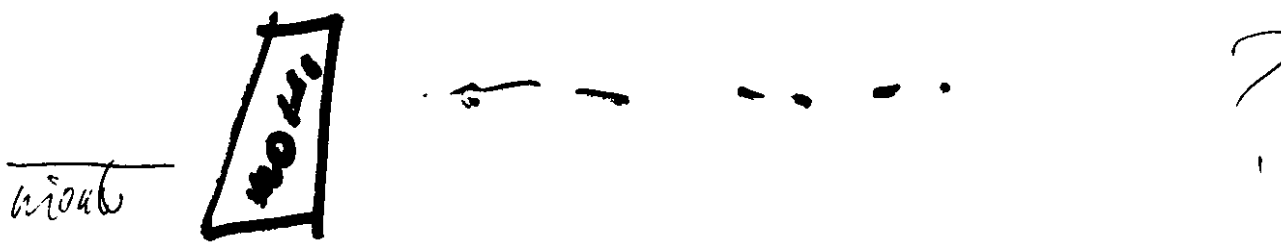
minoranti maggioranti

Varianti

Un insieme A si dice **limitato superiormente** se ha almeno un maggiorante

maggioranti

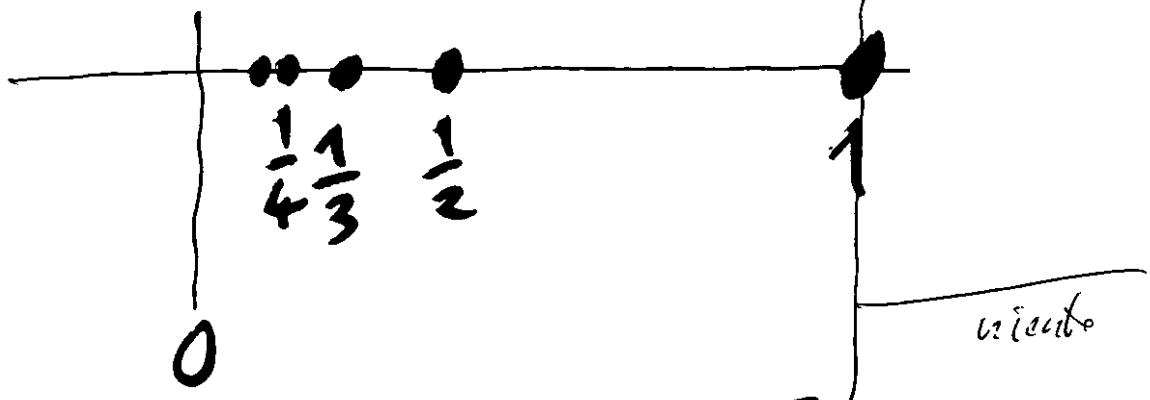
A si dice **limitato inferiormente** se ha almeno un minorante



minoranti ?

1 mar 2021 - p 12

$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$



maggioranti di A?

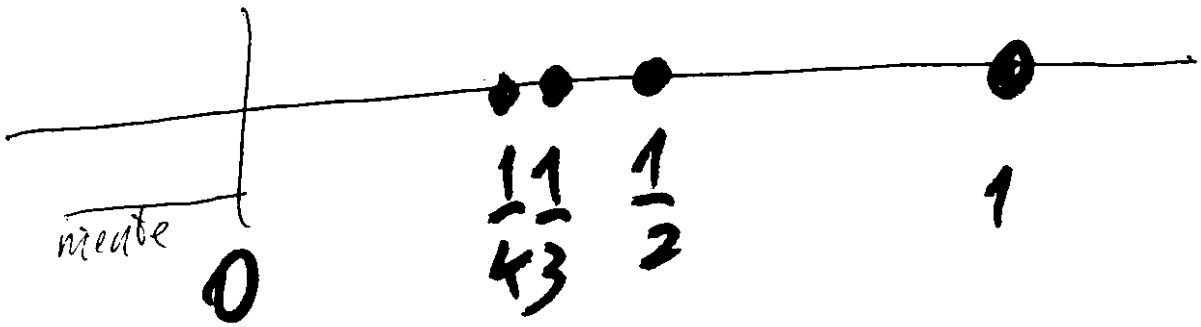
1 è un maggiorante

l'insieme tutti i reali

tutti gli $x \geq 1$ sono maggioranti di A (peggiori)

non ci sono maggioranti "migliori" di 1, a sinistra di 1

1 è maggiorante non migliorabile

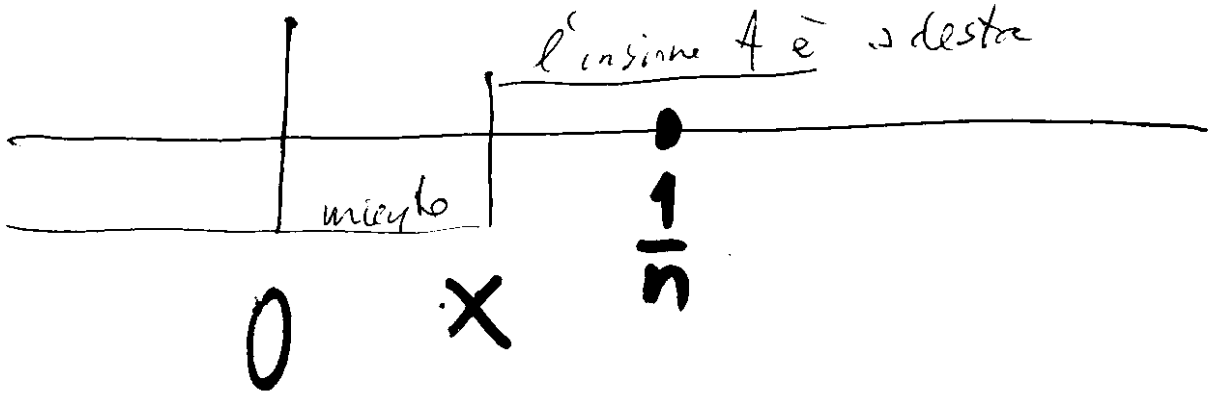


0 è un minorante di A

0 è migliorabile?

ci sono minoranti a destra di 0?

NO



Supponiamo (per assurdo) che

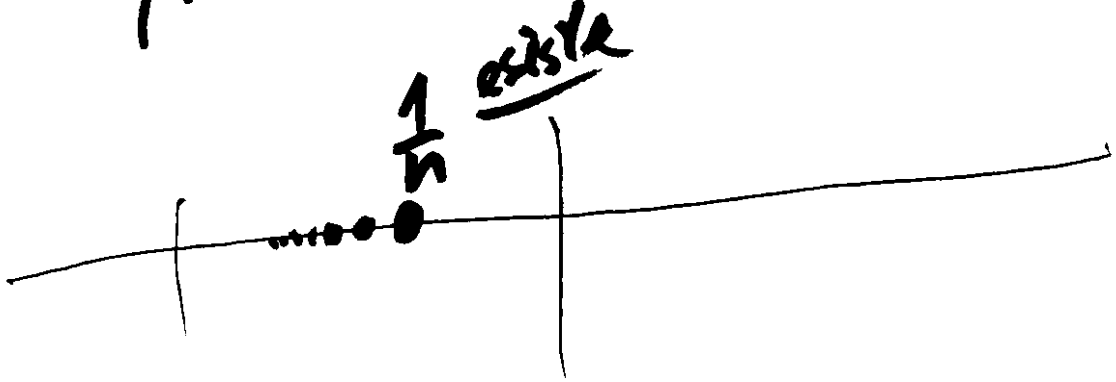
ci sia un minorante $x > 0$

Dovrebbe essere $x \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow$

$n \leq \frac{1}{x}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{x}$ sarebbe un numero reale maggiore o uguale di tutti i numeri naturali proibito da Archimede

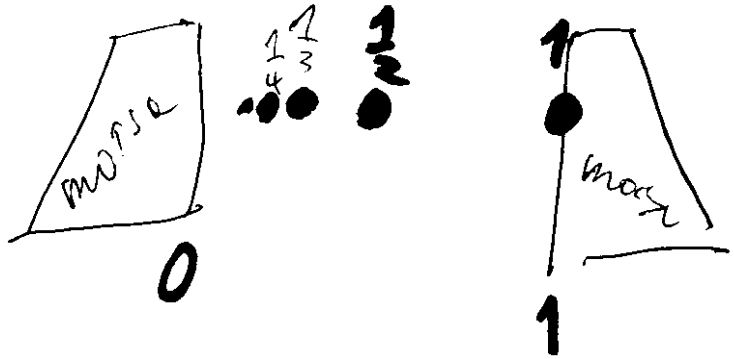


$X > 0$
minorante?

$\frac{1}{n} < x \Leftrightarrow n > \frac{1}{x}$

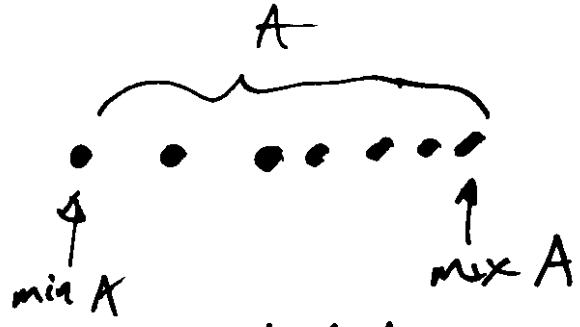
Nessun $x > 0$ è minorante di A

Conclusione: 0 è minorante di A non migliorabile

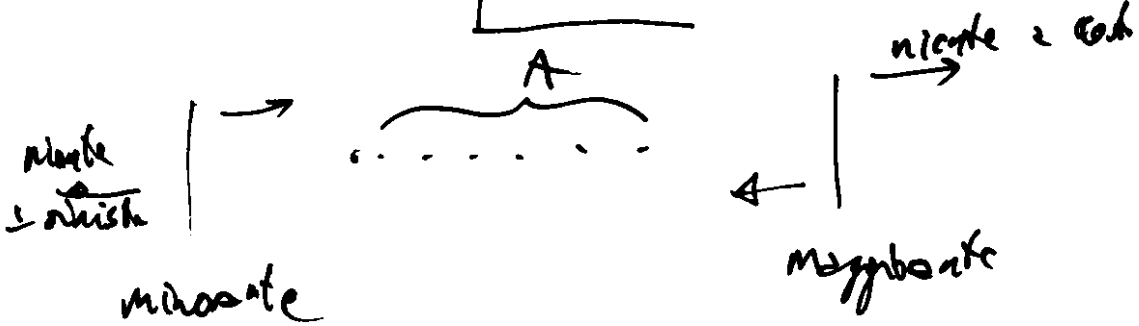


non si possono stringere ulteriormente le morse

MASSIMI - MINIMI
ESTREMI SUPERIORI E INFERIORI



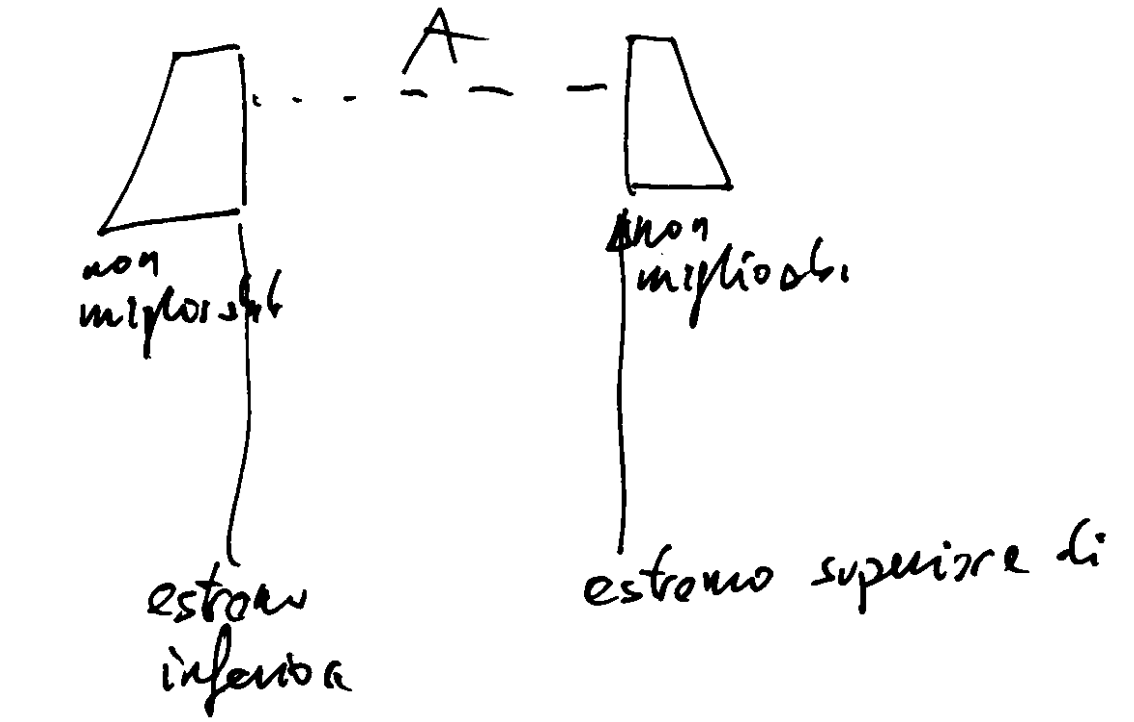
punti di A

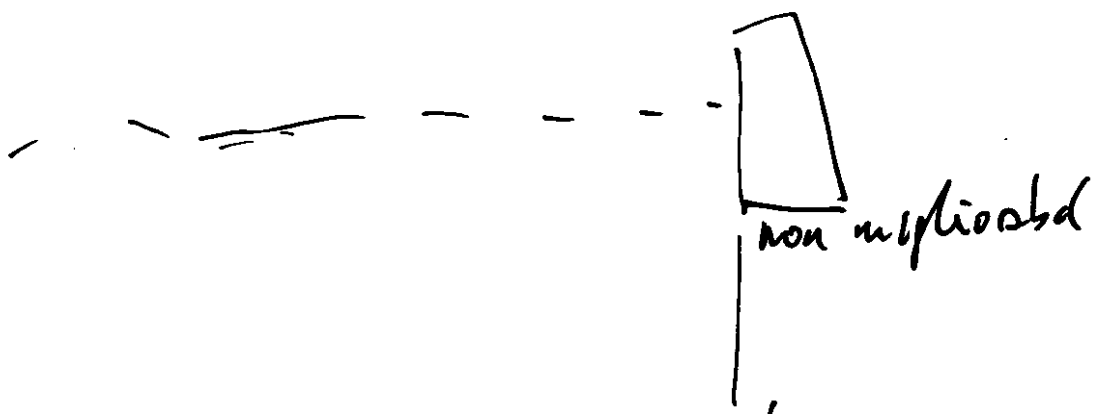


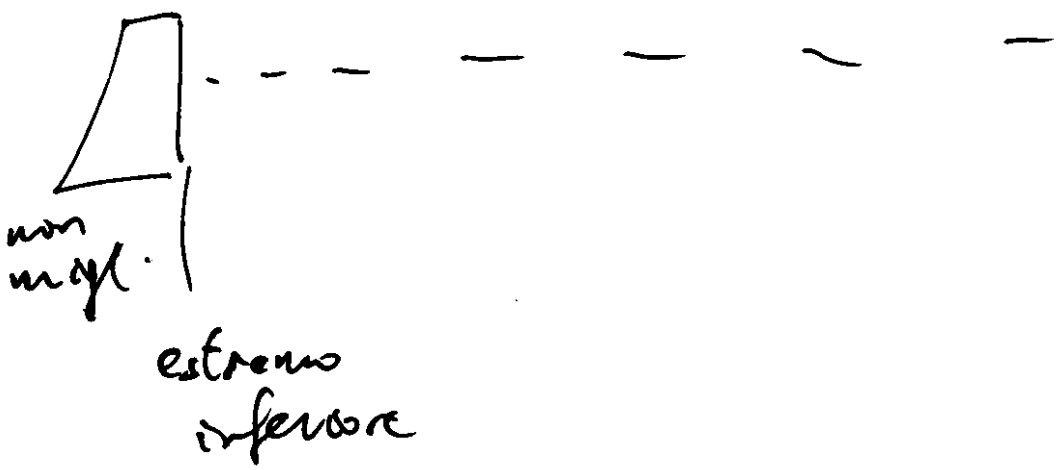
non sono unici (grande esistenza)

Sono sempre peggiorabili

5 mar 2021 - p.2

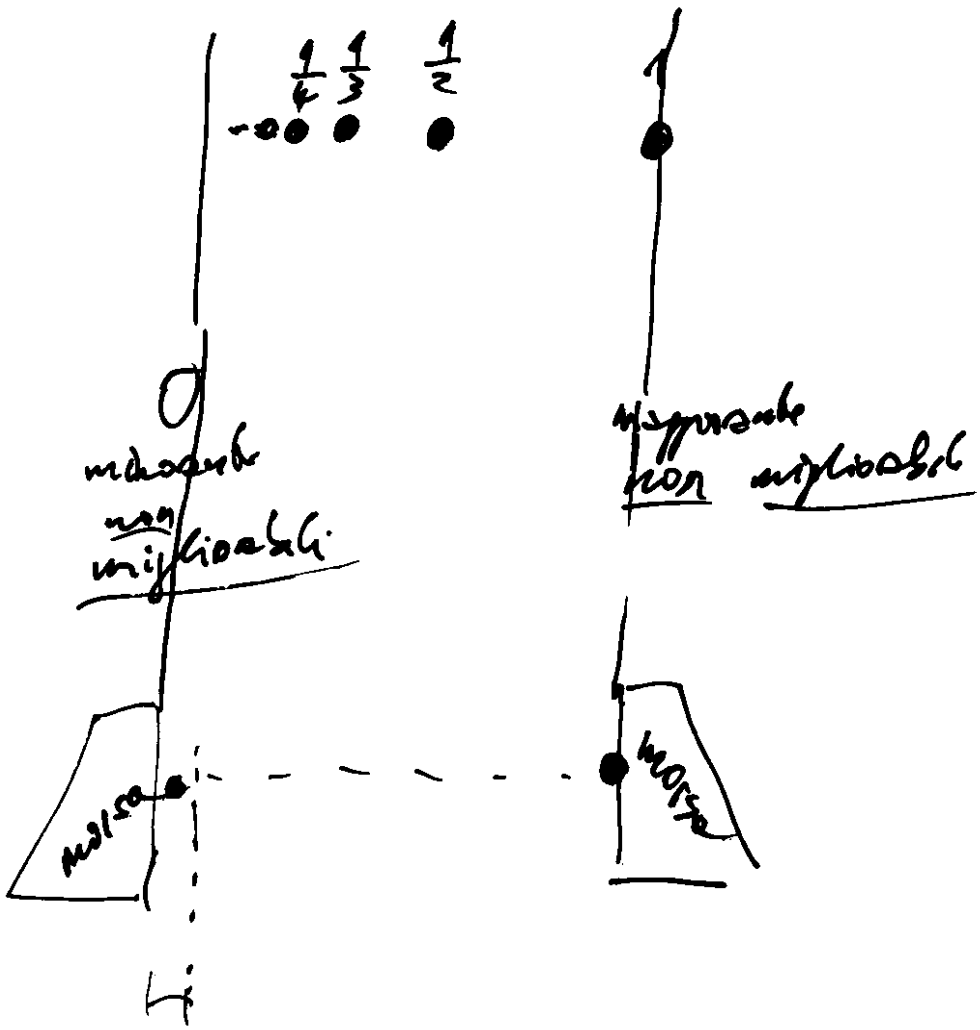

A
non migliorabile
non migliorabile
estremo inferiore
estremo superiore di A


non migliorabile
estr. sup.

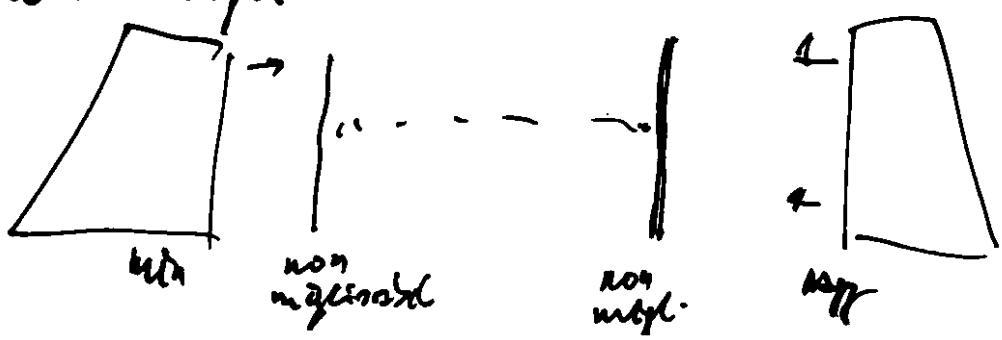

non migl.
estremo inferiore

5 mar 2021 - p 3

Ci sono situazioni in cui dei maggioranti e dei minoranti non sono migliorabili



PRINCIPIO DI COMPLETEZZA dell'insieme dei numeri reali: se A è un insieme di numeri reali (non vuoto) che ha (almeno) un maggiorante, allora ha anche un maggiorante non migliorabile. Se ha almeno un minorante, ha anche un minorante non migliorabile.

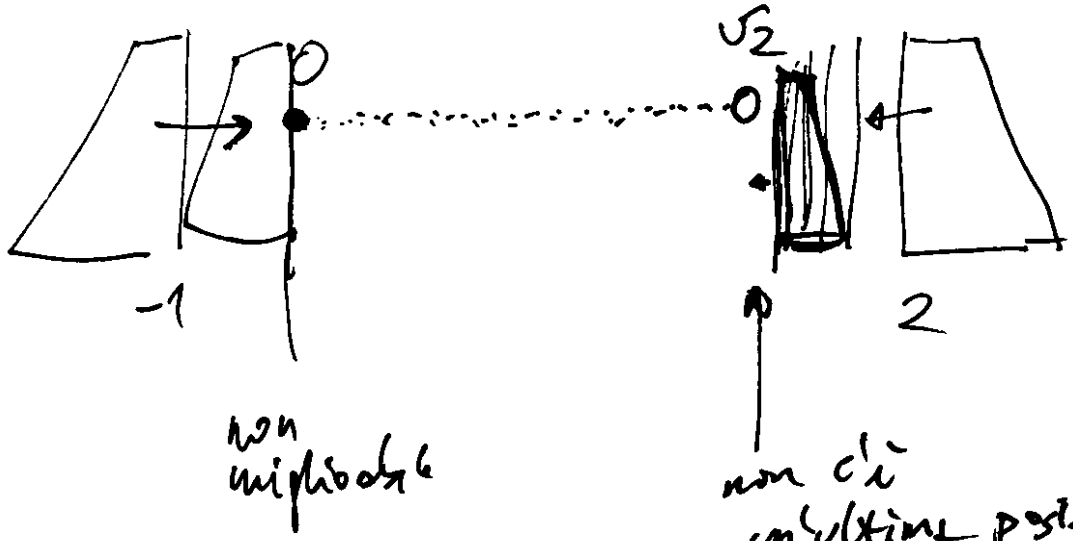


5 mar 2021 - p.14

CENNO Se lavoro con i soli numeri razionali il principio di completezza è falso.

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \le x < \sqrt{2}\} =$$

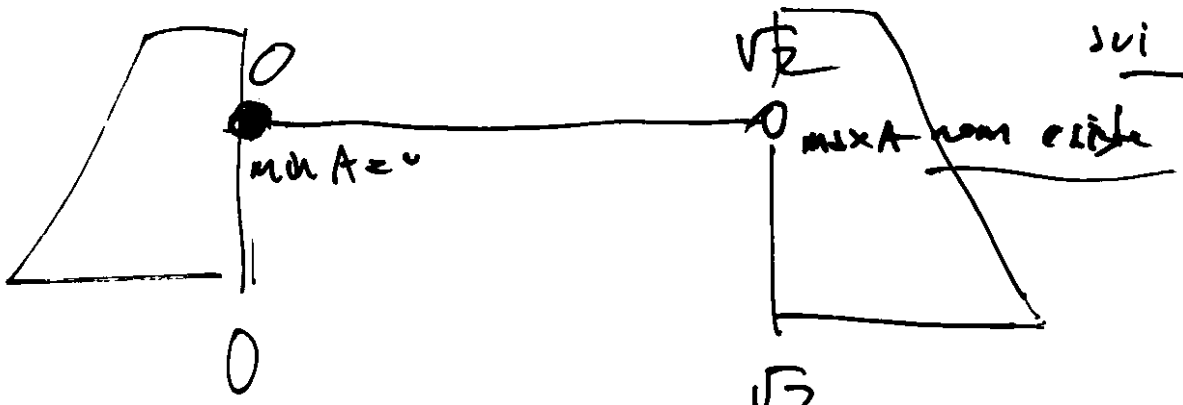
$$= \{x \in \mathbb{Q} \mid x \ge 0 \text{ e } x^2 < 2\}$$

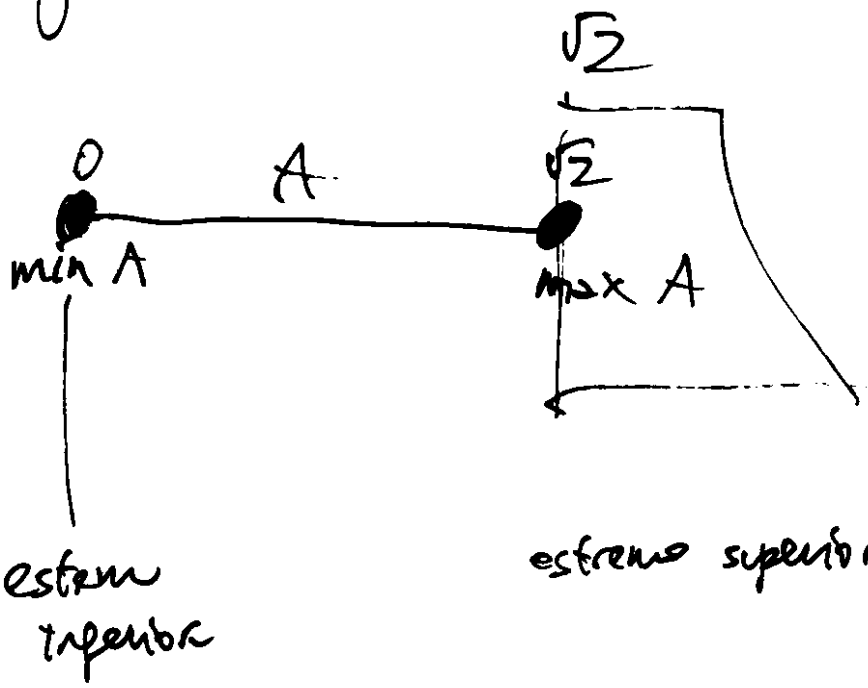


MAGGIORANTI E MINORANTI NON MIGLIORABILI

Def Dato un insieme A che ha almeno un maggiorante (cioè è limitato superiormente), chiamiamo **estremo superiore di A** il maggiorante non illimitato, che esiste per il principio di completezza.
Analogamente, se A ha almeno un minorante (cioè è limitato inferiormente) chiamiamo **estremo inferiore di A** il minorante non illimitato.

sui resto





Quindi max A e min A non esistono, estremo superiore ed estremo inferiore sono il concetto più vicino, ed esistono sempre

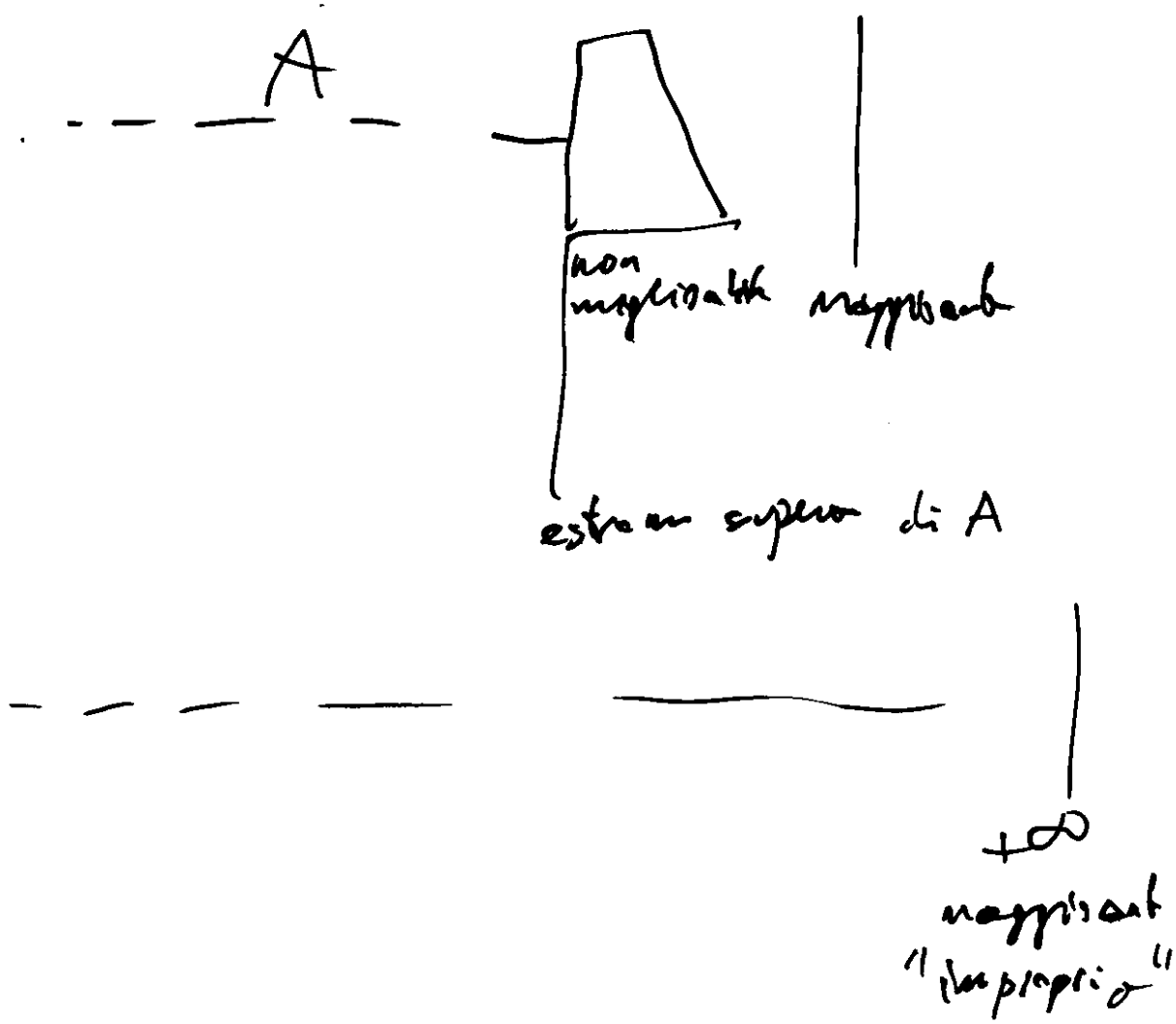
CONVENZIONE

se A non ha maggioranti (finiti), poniamo che l'estremo superiore è $+\infty$

se A non ha minoranti (finiti), poniamo che l'estremo inferiore è $-\infty$

Estremo superiore e inferiore ci sono sempre (finiti o infiniti)

5 mar 2021 - P6



Quando A ha massimo,
questo coincide con l'estremo superiore.
Quando A ha minimo, questo
coincide con l'estremo inferiore

SIMBOLI

$\sup A$ è l'estremo superiore di A

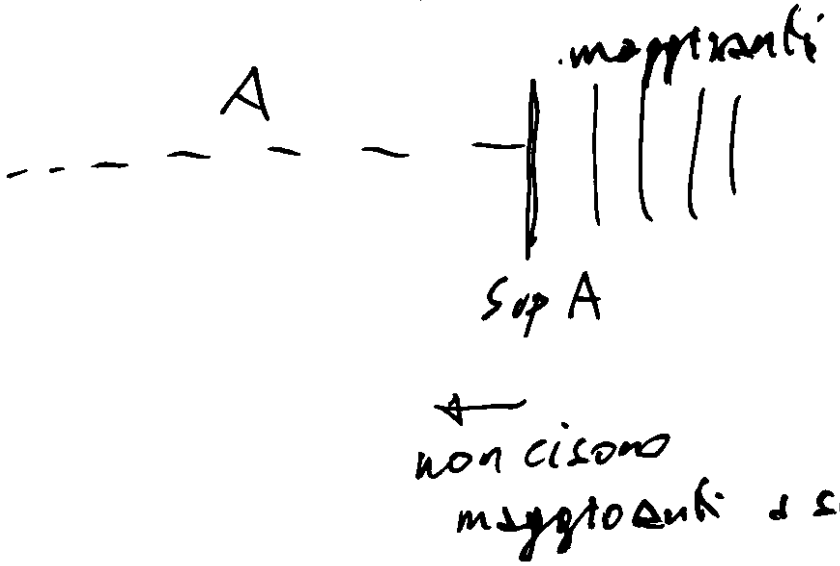
$\inf A$ è l'estremo inferiore di A

In analogia con $\max A$ e $\min A$

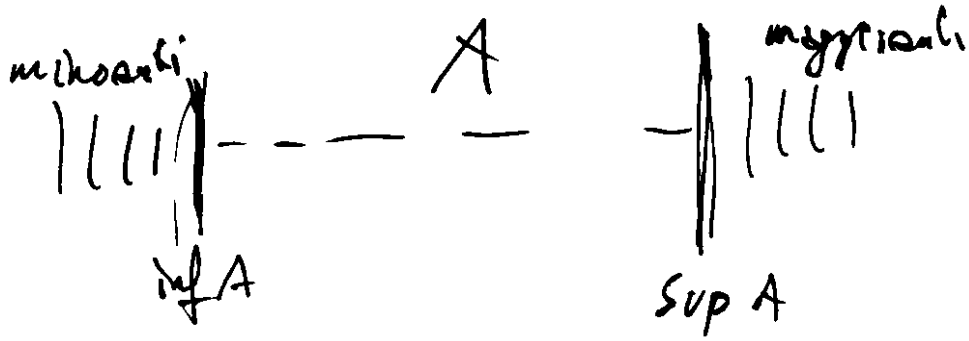
RIFORMULAZIONI

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, l'estremo superiore di A ~~è il più~~ (quando è finito) è il più piccolo fra i maggioranti di A.
In altre parole:

1) $\sup A$ è un maggiorante di A
2) non ci sono maggioranti di A più piccoli di lui, se si preferisce, tutti gli altri maggioranti sono più grandi



Analogamente, l'estremo inferiore è il più grande dei minoranti (se ce ne sono).



5 nov 2021 - P8

$\sup \mathbb{Z} = +\infty$

$\inf \mathbb{Z} = -\infty$

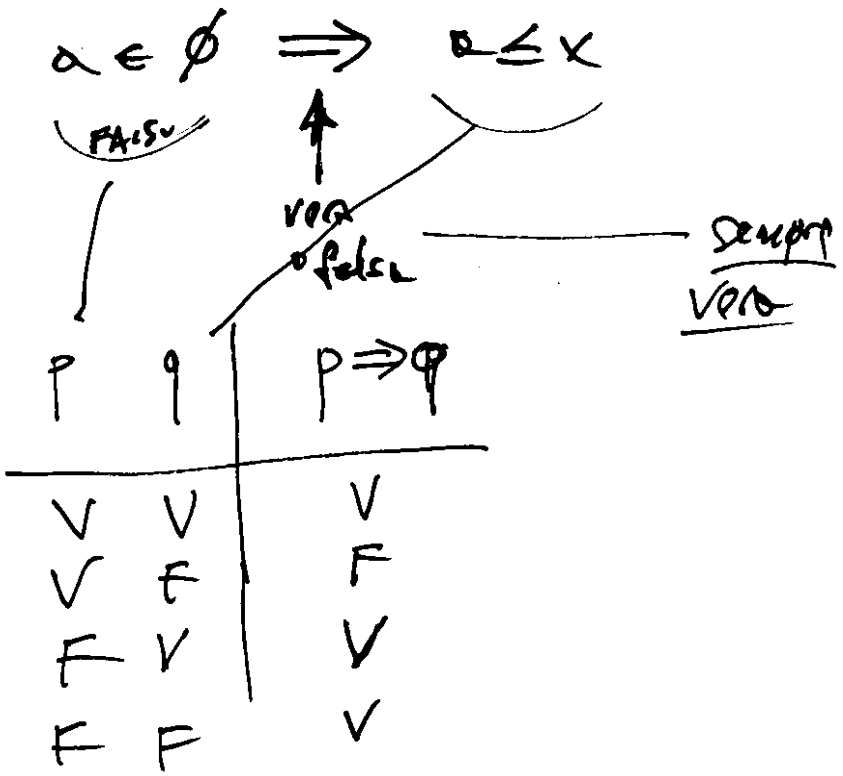
$\emptyset$ ha maggioranti?

x è maggiorante di A $\emptyset$ vuol dire che

$$\forall a \in A : \; a \leq x .$$

$$\forall a \in \emptyset : \; a \leq x$$

$\forall a$ $\quad a \in \emptyset \Rightarrow a \leq x$



p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tutti i numeri reali sono maggioranti dell'insieme vuoto

Il più piccolo dei maggioranti di $\emptyset$ non c'è.

CONVENZIONE $\sup \emptyset = -\infty$

$\inf \emptyset = +\infty$

Curiosità di poca importanza pratica

TORNIAMO AI LIMITI

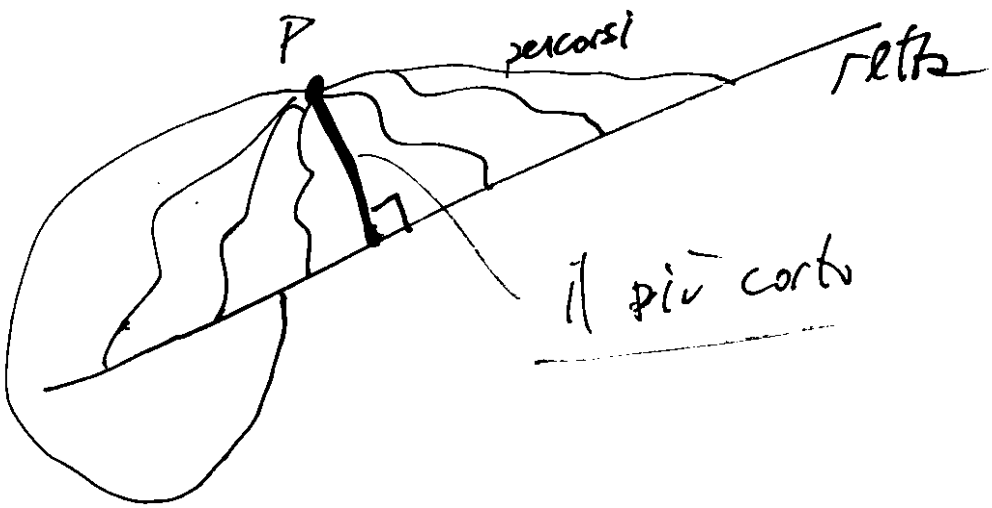
~~TEOR~~ LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Dimostriamolo

Partiamo da un principio geometrico che non dimostriamo

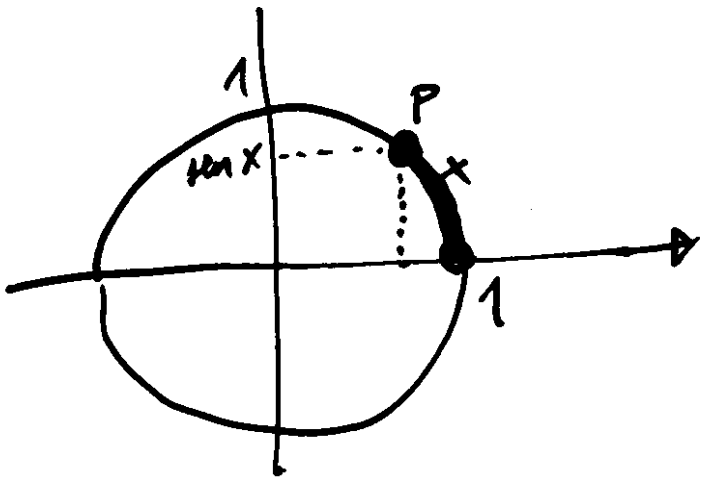
Dati una retta e un punto in un piano, fra tutti i percorsi che congiungono il punto con la retta, il più breve è segmento ortogonale alla retta



5 mar 2021 T-11

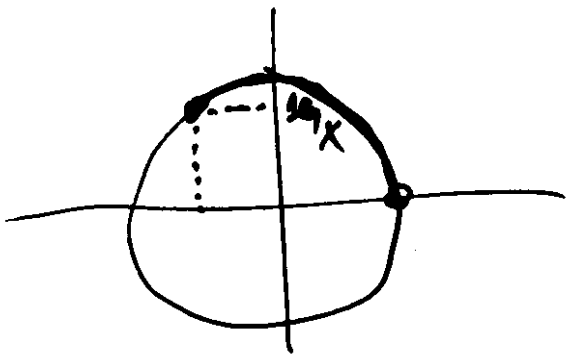
prendiamo il cerchio goniometrico

un arco di lunghezza $x \geq 0$



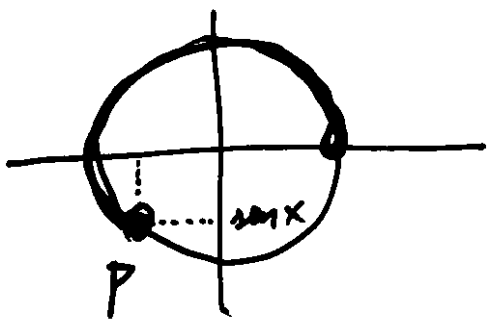
l'arco è un particolare percorso che congiunge P con l'asse delle ascisse ed è lungo x.

Il percorso più breve da P fino all'asse x è il segmento di perpendicolare.
Quanto è lungo? È lungo $\operatorname{sen} x$
Per il principio, $\boxed{\operatorname{sen} x \leq x}$

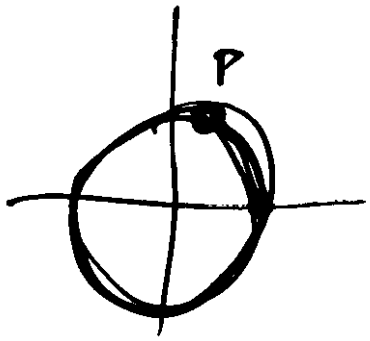


2° quadrante OK

$\operatorname{sen} x \leq x$



$\boxed{|\operatorname{sen} x| \leq x}$

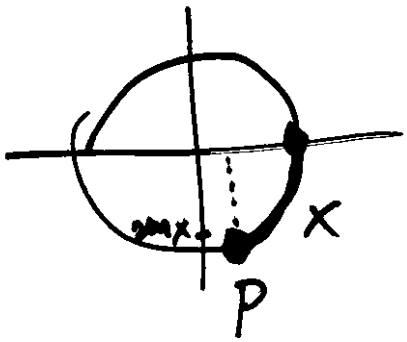


$x > 2\pi$ ~~più~~

l'arco gira più di una volta

$|\sin x| \leq x$ OK

Caso $x < 0$?



$$|\sin x| \leq |x|$$

vale sempre

Disuguaglianza notevole

$$|\sin x| \leq |x|$$

L'arco è misurato in radianti

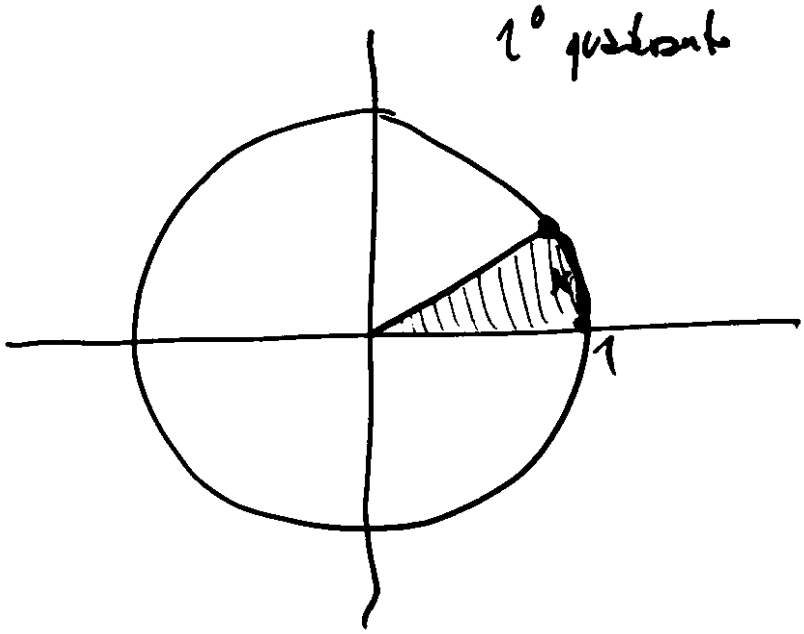
1° quadrante: $\sin x \leq x$

$x > 0$ $\quad \frac{\sin x}{x} \leq 1$ vero nel 1° quadrante

$0 < x < \frac{\pi}{2}$

Teorema dei carabinieri

5 mar 2021 - p. 13

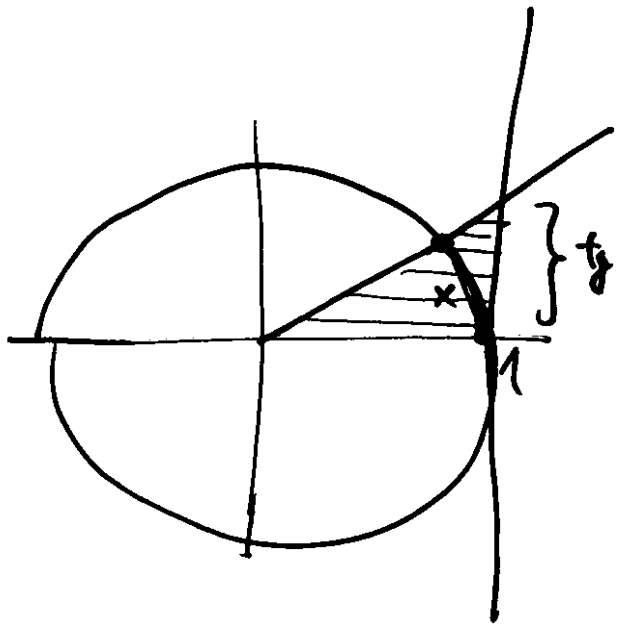


Settore circolare

Area del settore circolare?

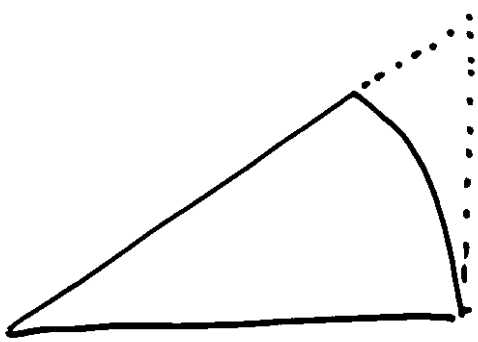
Area = (lunghezza dell'arco) x raggio diviso 2

$$\text{Area} = \frac{x \cdot 1}{2}$$



triangolo rettangolo

$$\text{area} = \frac{\text{base} \cdot \text{altezza}}{2} = \frac{1 \cdot \text{tg}\, x}{2}$$



Il settore circolare è contenuto interamente nel triangolo

Quindi l'area del settore circolare è più piccola dell'area del triangolo

cioè $\frac{x}{2} \leq \frac{\text{tg}\, x}{2}$ cioè $\boxed{x \leq \text{tg}\, x}$

valido se $0 < x < \frac{\pi}{2}$

5 mar 2021 - p. 14

$x \leq \operatorname{tg} x$ $\qquad$ $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ dalla trigonometria

$x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $\qquad$ nel 1° quadrante ~~$\dfrac{x}{1}$~~ tutti i 3 oggetti sono > 0

$\cos x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$

$\cos x$: coseno inverso; $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$: lodo; 1: carb.

Facciamo tendere x a 0^+

$\cos x$: è continuo

$\cos x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$

$\cos 0 = 1$ $\qquad$ 1

Quindi $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1^-$

5 mar 2021 - p. 15

ALTRO LIMITE NOTEVOLE

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Per questo mi serve un teorema di tipo teorico

Def Sia a_n una successione di numeri reali. Si dice che a_n è

1) debolmente crescente se

$$a_n \le a_{n+1} \quad (\forall n)$$

precedente ≤ successivo

2) strettamente crescente se

$$a_n < a_{n+1} \quad (\forall n)$$

3) debolmente decrescente se

$$a_n \ge a_{n+1} \quad (\forall n)$$

prec. seguente

4) strettamente crescente se

$$a_n > a_{n+1} \quad (\forall n)$$

Una successione si dice monotona se rientra

Ci sono successioni che non stanno in nessuno dei casi, cioè non sono monotone

Tipicamente sono le successioni oscillanti

$$a_n = (-1)^n$$

$$1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1$$

Se si prende una successione a caso, ci si può scommettere che è oscillante.

Teorema Le successioni monotone hanno sempre limite (il limite può essere infinito o finito).

LIMITE DELLE SUCCESSIONI MONOTONE

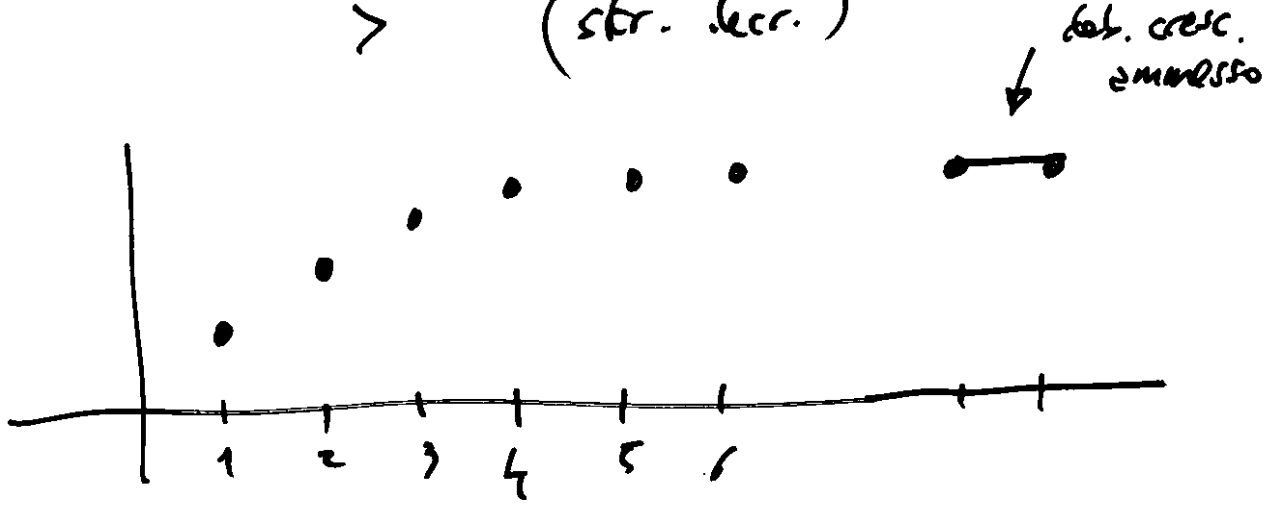
Una successione monotona è una che non cambia mai di direzione, cioè o

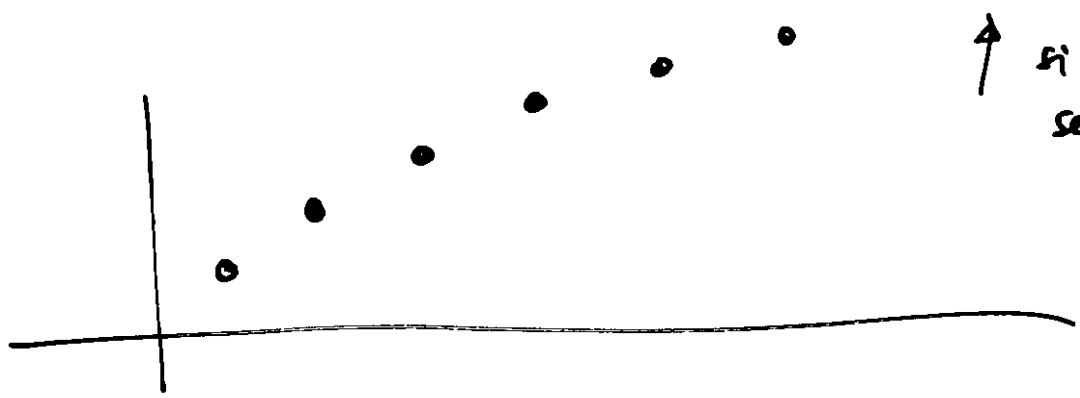
$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \qquad \text{(debolmente crescente)}$$

oppure $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n$ (debolmente decr.)

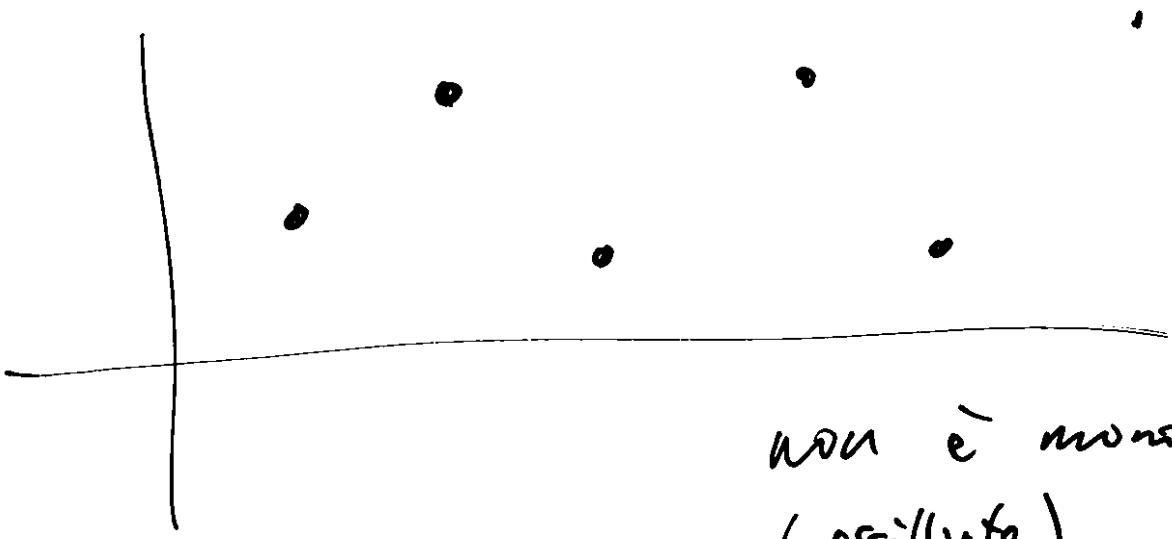
$<$ (strettamente crescente)

$>$ (strettamente decr.)



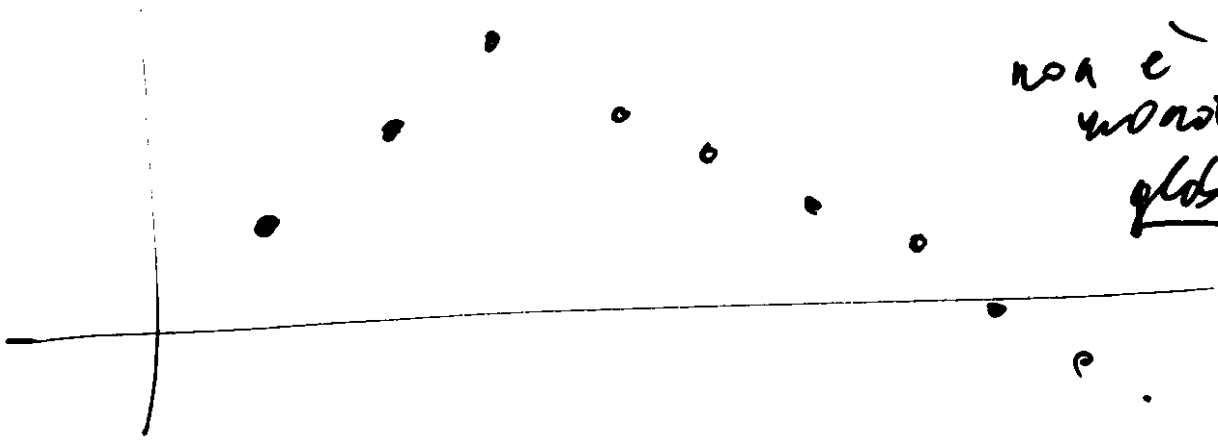


8 mar 2021 - p. 1



non è monotone
(oscillante)

$(-1)^n$ è oscillante



non è monotone globalmente

8 mar 2021 - p3

Teorema Le successioni monotone hanno sempre limite (finito o infinito)

Più precisamente, se la successione è crescente il limite coincide con l'estremo superiore dei valori assunti.
Se la successione è decrescente, il limite è l'estremo inferiore.

Se a_n è (definit.) cresc.

$\lim_{n\to+\infty} a_n$ esiste e vale $\sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$

(esiste sempre per il principio di completezza)

Se a_n è (definit.) decresc.

$\lim_{n\to+\infty} a_n$ è uguale a $\inf\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$

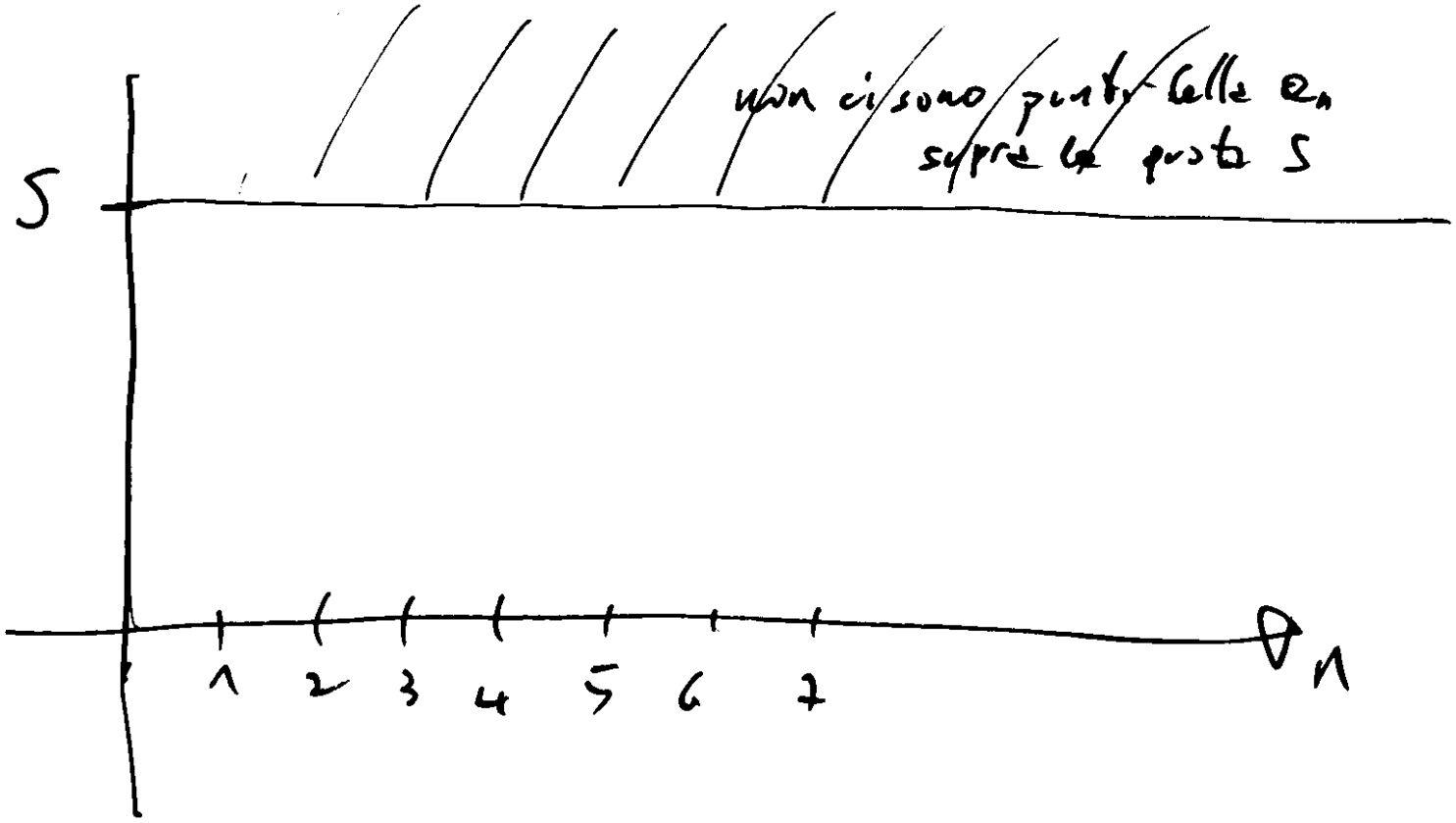
Dim ostrazione Caso che a_n sia definit. crescente e che l'estremo superiore sia finito.

Sia $S = \sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$.

Dobbiamo servirci della definizione dell'estremo superiore:

1) S è un maggiorante della successione, cioè $a_n \le S \quad \forall n$

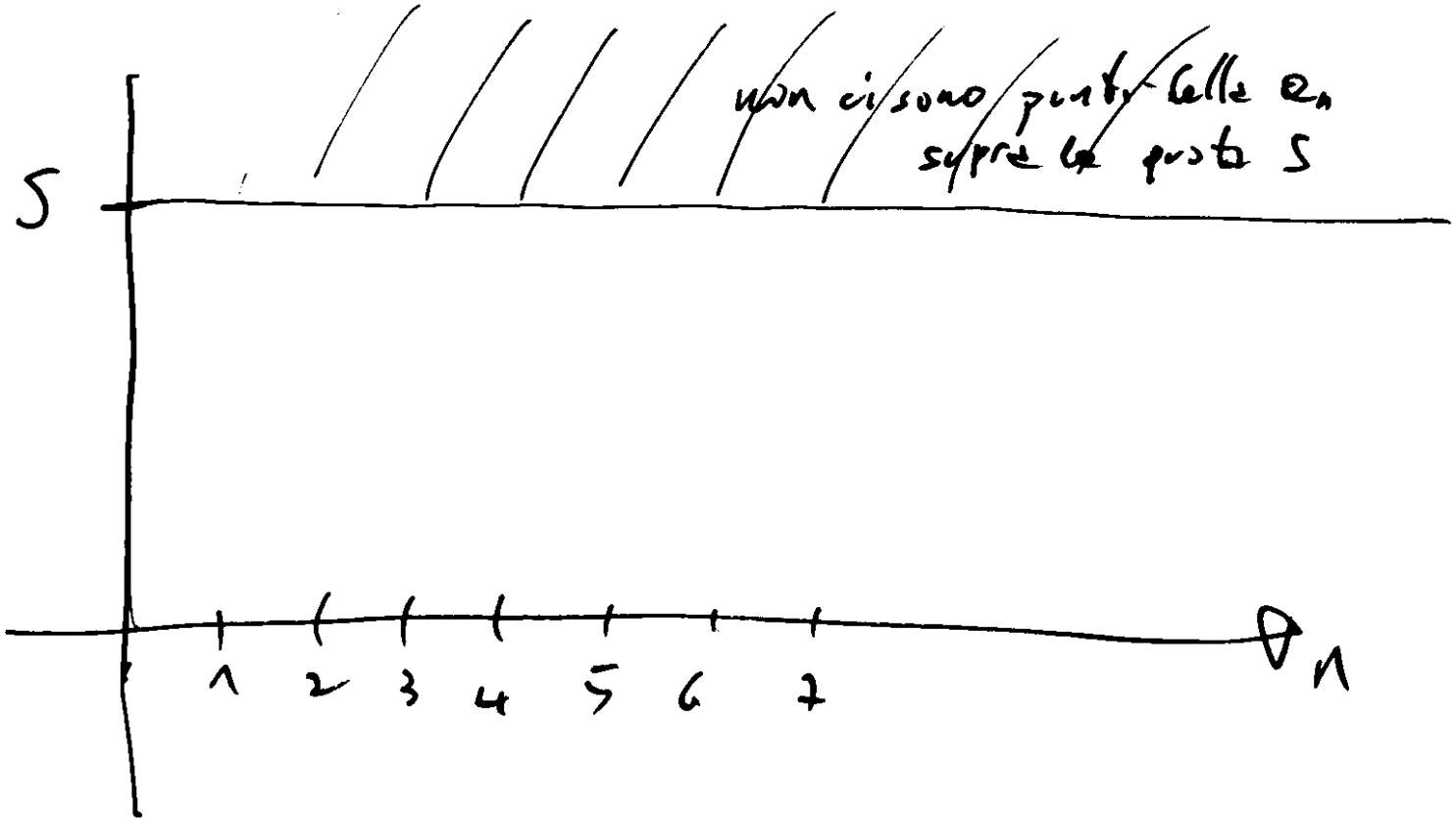
8 mar 2021 - p.4



2) S non è migliorabile, cioè non ci sono maggioranti $< S$.

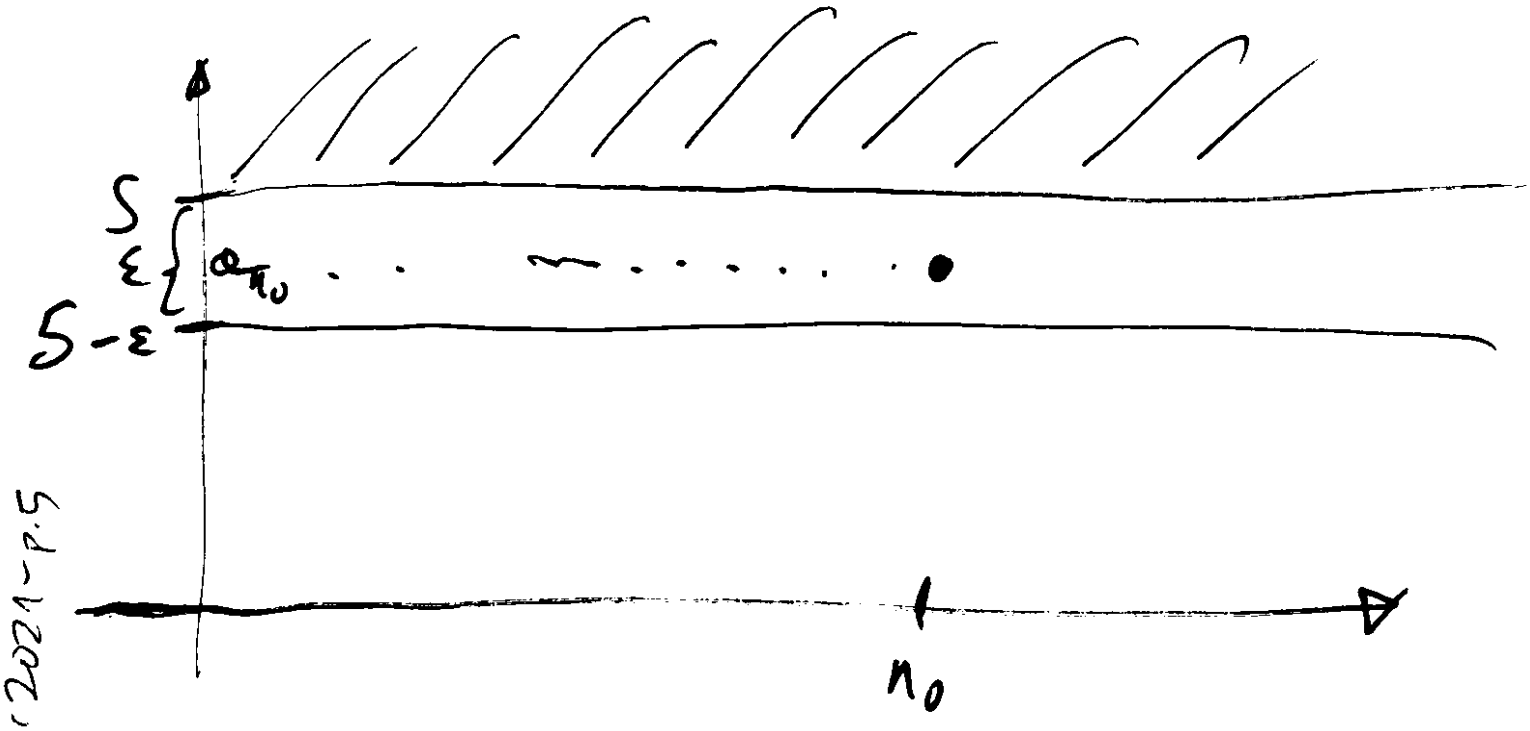
Introduco un $\varepsilon > 0$. Considero $S - \varepsilon$.
Questo $S - \varepsilon$ è $< S$.
$S - \varepsilon$ non può essere maggiorante.
$S - \varepsilon$ non è $\geq$ di ogni elemento di a_n
$S - \varepsilon$ è $<$ di almeno un elemento della successione.
Cioè $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_0} > S - \varepsilon$.

8 mar 2021 - p.4



2) S non è migliorabile, cioè non ci sono maggioranti $< S$.

Introduco un $\varepsilon > 0$. Considero $S - \varepsilon$.
Questo $S - \varepsilon$ è $< S$.
$S - \varepsilon$ non può essere maggiorante.
$S - \varepsilon$ non è $\geq$ di ogni elemento di a_n
$S - \varepsilon$ è $<$ di almeno un elemento della successione.
Cioè $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_0} > S - \varepsilon$.



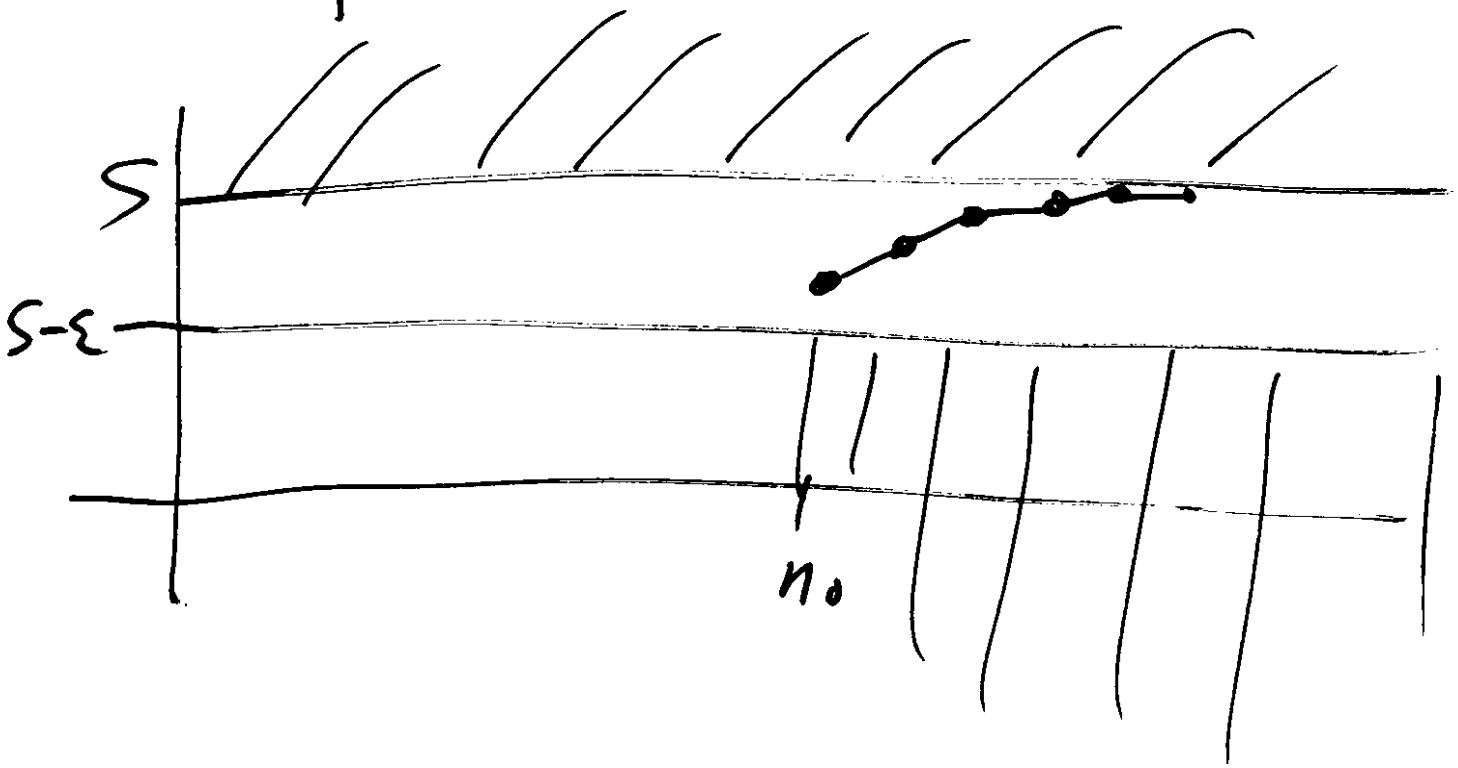
8 mar 2021 - p.5

Perché a_n è definitivamente crescente.

$$S - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq a_{n_0+2} \leq \dots$$

successione

Tutti i valori della successione da n_0 in poi sono $> S - \varepsilon$



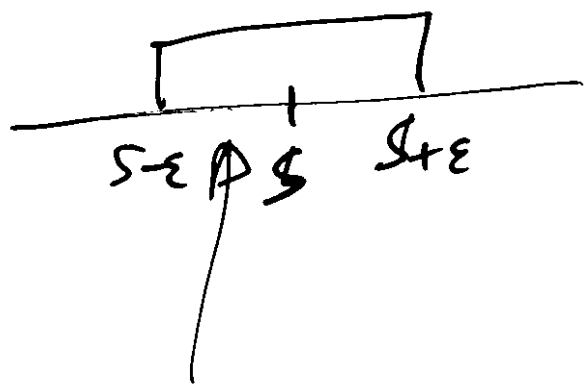
Quindi dato $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$

tale che $\forall n \geq n_0$

$$S - \varepsilon < a_n \leq S$$

$$\Downarrow$$

$$S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon$$



È verificata la definizione di limite:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \text{ esiste e vale } S^-.$$

Gli altri casi sono simili. CVD

8 mar 2021 - p 7

Il teorema serve a garantire l'esistenza di limiti che non riusciamo a calcolare.

LIMITE FONDAMENTALE

$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ esiste ed è un numero compreso fra 2 e 3

più precisamente è un numero irrazionale $\simeq 2{,}71828\ldots$

Il simbolo è e ed è chiamato numero di Nepero (Eulero ha scelto il simbolo)

Conto ingenuo:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} (1+0)^n =$$

($\frac{1}{n} \to 0$)

$$= \lim_{n \to +\infty} 1^n = 1$$

SBAGLIATISSIMO

$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ non è esprimibile con metodi algebrici cioè combinazioni di numeri razionali e radici quadrate, cubiche ecc.

Il valore del limite è un numero nuovo, a cui viene destinato un nuovo simbolo a sé.

La situazione assomiglia a π, il rapporto fra la semicirconferenza e il diametro,

Esplorazione numerica

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
0	non ha senso
1	$(1+1)^1 = 2$
2	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4} = 2{,}25$
3	$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \simeq 2{,}37\ldots$
4	$2{,}44\ldots$
5	$2{,}488\ldots$
6	$2{,}52$
7	$2{,}546$

8 mar 2021 - p. 8 bis

Risultato sperimentale: i valori di $(1+\frac{1}{n})^n$ crescono al crescere di n, almeno fino a che mi fermo.

E' lecito congetturare che la successione sia crescente.

Però il tasso di crescita è sempre più lento.

E' lecito quindi avere qualche dubbio sulla crescenza globale.

VEREMO ORA UNA DIMOSTRAZIONE che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente.

Ce ne sono tante. Ho scelto questa perché è particolarmente elementare.

Non ci sono dimostrazioni banali o semplici.

Dimostrazione che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è (def.) crescente.

Diamo un nome: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Ha senso per $n \geq 1$.

Chiaramente $a_n > 0$ $\left(a_n > 1\right)$.

Obiettivo: dimostrare che $\boxed{a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \geq 1}$

Per far tornare i conti nel modo più semplice riscrivo la condizione come

$$\boxed{a_{n-1} \leq a_n \quad \forall n \geq 2}$$

(per $n=1$ non ha senso)

Essendo $a_{n-1} > 0$, posso dividere ambo i membri per a_{n-1}, e quindi riscrivo l'obiettivo come

$$\boxed{\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 \quad \forall n \geq 2}$$

OBIETTIVO

8 mar 2021 - p. 5

8 mar 2021 - p. 10

voglio dimostrare che è ≥ 1

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n-1}} =$$

voglio usare la regola $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$

$x^{n+m} = x^n x^m$

$$= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}}$$

$$= \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^1 =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} =$$

$$= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} =$$

$$= \left(1 + \left(-\frac{1}{n^2}\right)\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = *$$

prosegue

Viene in mente la di disuguaglianza di Bernoulli:

$$(1+x)^n \geq 1+n\cdot x \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > -1$$

$$\left(1+\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right)^n \geq 1+n\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right)$$

possiamo applicare la disug.?

$n \in \mathbb{N}$ OK

$x > -1$?

$\left(-\frac{1}{n^2}\right) > -1$?

$\Updownarrow$

$\frac{1}{n^2} < 1$?

$\Updownarrow$

$1 < n^2$?

vero perché per noi $n \geq 2$

Effettivamente possiamo applicare Bernoulli.

8 mar 2021 - n. 12

$$(*) = \left(1+\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right)^n \cdot \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{\text{è positivo}}$$

La disug. di Bernoulli

$$\left(1+\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right)^n \overset{\text{vera}}{\geq} 1+n\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right)$$

posso moltiplicare ambo i membri per $\frac{n}{n-1}$ che è >0

$$\left(1+\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right) \geq \left(1+n\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right)\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n-1} = 1$$

8 mar 2021 - p. 13

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots = \dots = \dots = * \geq \dots = \dots$$

(* : disug)

$\dots = 1$

ugualmente tutte vere

Proprietà transitiva

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 \qquad \forall n \geq 2$$

CVD

E' ovvio che la successione a_n è (def.) crescente.

(in realtà è strettamente crescente ma non ci servirà)

Questo garantisce che esiste

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$ e coincide col sup

Rimane un dubbio: il limite potrebbe essere $+\infty$?

Dobbiamo escludere la possibilità che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = +\infty .$$

A questo scopo usiamo una seconda successione ausiliaria:

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Dimostriamo che b_n è definitivamente decrescente.

La dimostrazione è simile a quella di a_n.

obiettivo: $b_{n+1} \le b_n \quad \forall n \ge 1$

prima riscrittura: $b_n \le b_{n-1} \quad \forall n \ge 2$

dividiamo per b_n (che è >0)

$$\boxed{1 \le \frac{b_{n-1}}{b_n} \quad \forall n \ge 2}$$

obiettivo

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} =$$

$$= \left(\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} =$$

$$= \left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} =$$

$$= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} =$$

$$= \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = *$$

Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ x > -1 \end{cases}$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x \qquad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \\ x > -1 \end{cases}$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}$$

$$x = \frac{1}{n^2-1} \overset{?}{>} -1 \qquad n \geq 2$$

è positivo (OK) vera

Si può applicare Bernoulli:

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \geq 1+(n+1)\frac{1}{n^2-1}$$

(vera)

moltiplico tutto i membri per $\frac{n-1}{n} > 0$

$$* = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right) \geq \left(1+(n+1)\left(\frac{1}{n^2-1}\right)\right)\frac{n-1}{n}$$

$$* = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} \geq$$

$$\geq \left(1 + (n+1)\frac{1}{n^2-1}\right)\frac{n-1}{n} =$$

$$= \left(1 + \cancel{(n+1)}\frac{1}{(n-1)\cancel{(n+1)}}\right)\cdot\frac{n-1}{n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\frac{n-1}{n} =$$

$$= \frac{n-1+1}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} =$$

$$= \frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}}\cdot\frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n}} = 1 \cdot$$

Tirando a fila

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} \geq \dots\dots \geq * \geq \dots = 1$$

Conclusão: $\frac{b_{n-1}}{b_n} \geq 1$ CVD

Effettivamente b_1 è debolmente decrescente.

Fatto molto semplice:

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} =$$

$$= \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{=a_n} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1}}_{>1} > a_n$$

$$>0$$

$$2 = a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le \dots \le a_n <$$

$$< b_n \le b_{n-1} \le b_{n-2} \le \dots \le b_1 =$$

$$= b_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1} = 2^2 = 4$$

Proposizione transitiva: $a_n \le 4 \quad \forall n$

4 è un maggiorante della successione

L'estremo superiore è ≤ 4

$\lim_{n\to+\infty} a_n \le 4$

$$2 = a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_5 \leq a_6 \leq \dots a_n <$$

$$< b_n \leq b_{n-1} \leq b_{n-2} \leq \dots$$

$$\leq b_5 \leq b_4 \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$$

$$< 3$$

$$\forall n \geq 5$$

<u>oss</u> $\quad b_n = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 1$

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = \left(\lim_{n \to +\infty} a_n\right) \cdot 1 =$$

$$= e$$

b_n tende ad e <u>decrescendo</u>

a_n - - - - - - crescendo

$$b_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^{5+1} < 3$$

$$a_n \le b_n \le \cdots \le b_5 < 3$$

In realtà $\lim_{n\to+\infty} a_n \le 3$

Abbiamo stabilito che il $\lim_{n\to+\infty} a_n$

esiste finito ed è < 3

$$a_1 = 2$$

Quindi $2 < e < 3$

$$e \simeq 2{,}71828\ldots$$

Oss

Se sono curioso di trovare delle approssimazioni di e basta che inserisci e fra a_n e b_n

$$a_n < e < b_n$$

$n = 1000$

a_n e b_n tendono ad e molto lentamente.
Questo non è un modo pratico per calcolare e.

LIMITE NOTEVOLE

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

fmir

Perché la fatica? Non potevamo calcolare così:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}} = e^1 = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$x = \frac{1}{n} \to 0$$

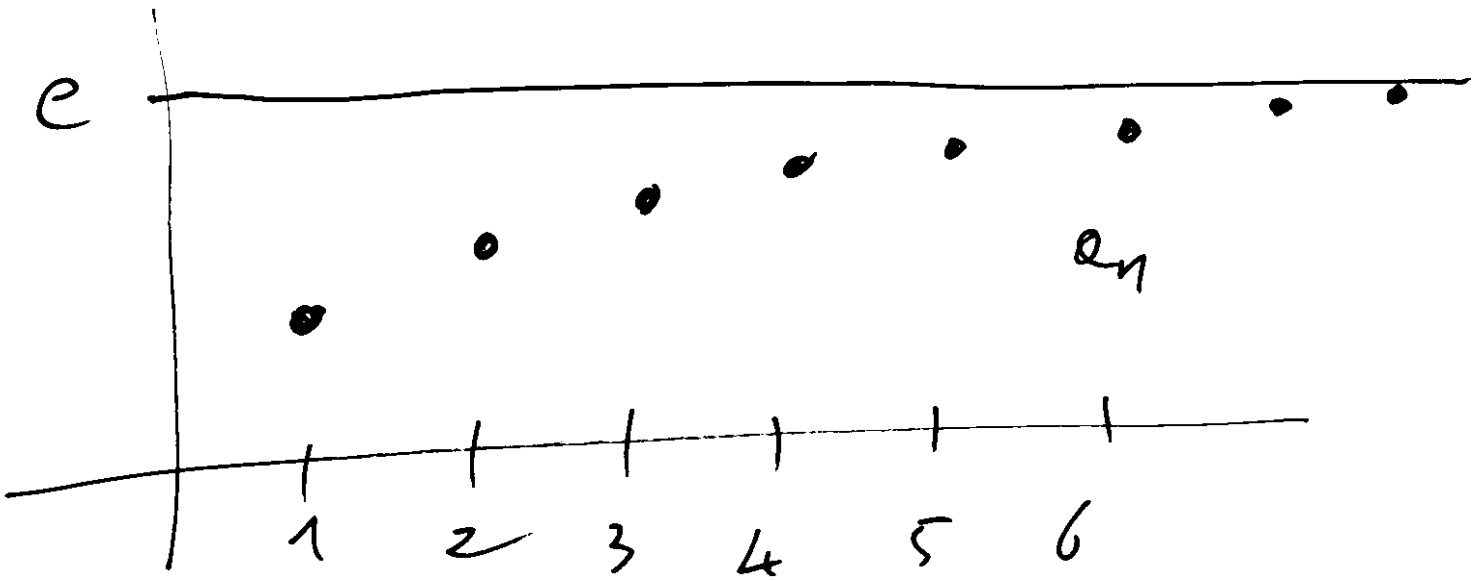
Se non so ancora cos'è e non posso scriverlo, né usare i logaritmi in base e

Procedura logica

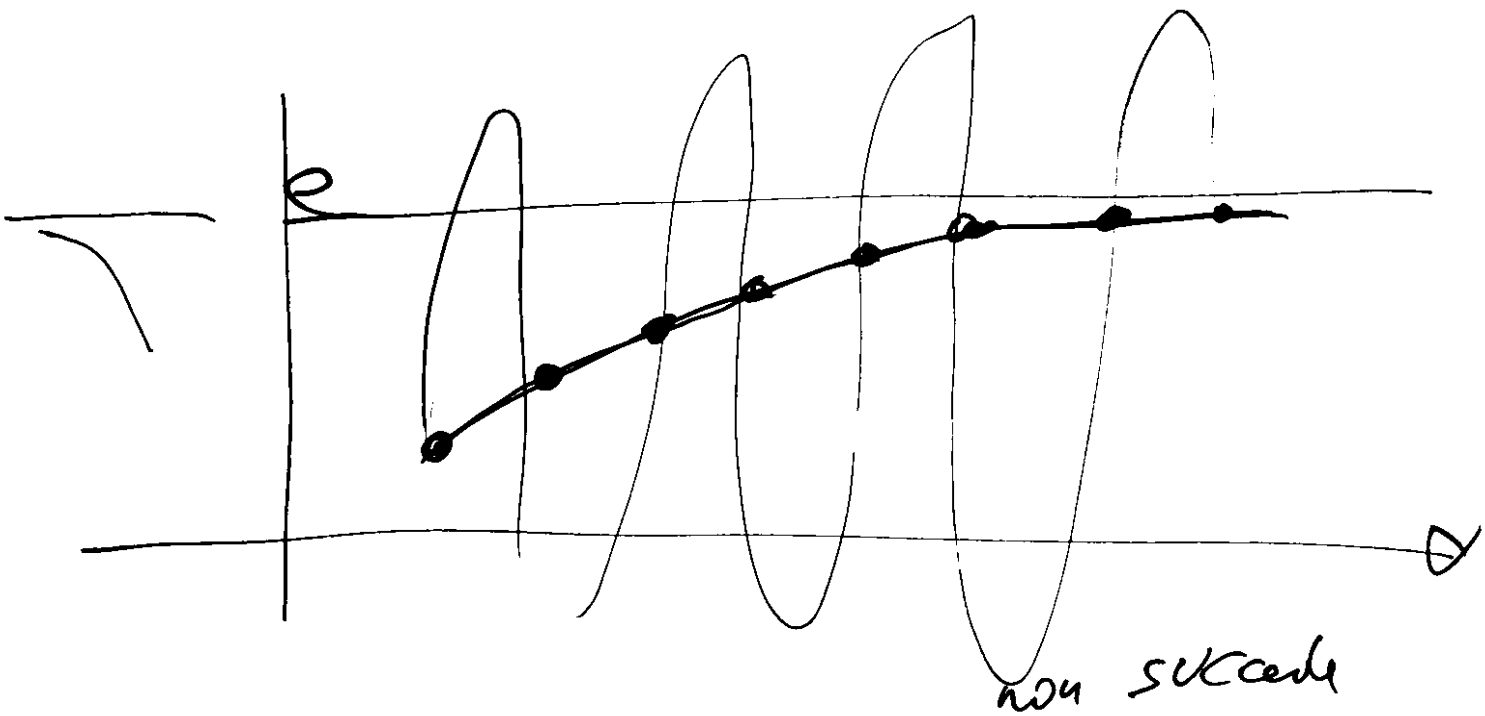
Punto di partenza: $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Passo successivo: limite in variabile reale

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$



$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$



RICAPITOLANDO

$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ da qui segue

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$

$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

Passo successivo

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$\frac{1}{x} = t \to 0^{\pm}$ cambio di variabile

$$\lim_{t \to 0} (1+t)^{1/t} = e$$

esponenziali e logaritmi in base e

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log_e (1+t)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \log_e (1+t) =$$

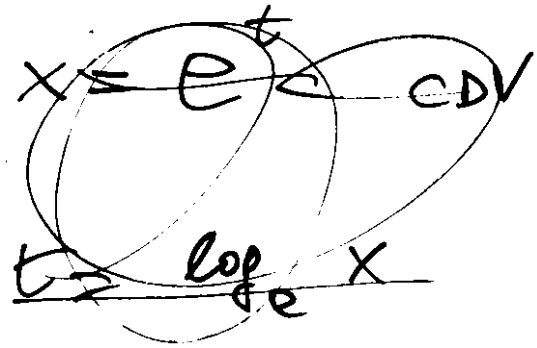
$$= \lim_{t \to 0} \log_e \underbrace{(1+t)^{1/t}}_{\to e} =$$

$$= \log_e \left(\lim_{t \to 0} (1+t)^{1/t} \right) =$$

$$= \log_e e = 1$$

8 mar 2021 7.25

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} =$$



$$x = \log_e t$$

CVD

$$t = e^x$$

$$t \to e^0 = 1$$

$$\lim_{t \to 1} \frac{t-1}{\log_e t} = \lim_{t \to 1} \frac{t-1}{\log_e (t-1+1)}$$

CDV $\quad t - 1 = y \to 0$

$t \downarrow 1$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{y}{\log_e (1+y)} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{1}{\frac{\log_e (1+y)}{y}} = \frac{1}{1} = 1$$

$\to 1$

LIMITE FONDAMENTALE

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

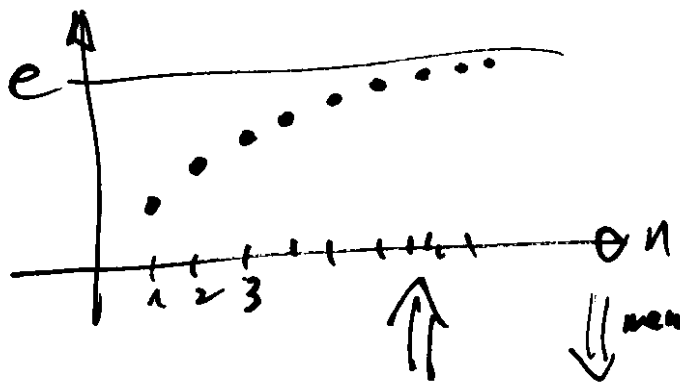
numero (irrazionale) compreso fra 2 e 3

$e \cong 2{,}71828\ldots$

ALCUNI LIMITI CHE DERIVANO DA QUESTO

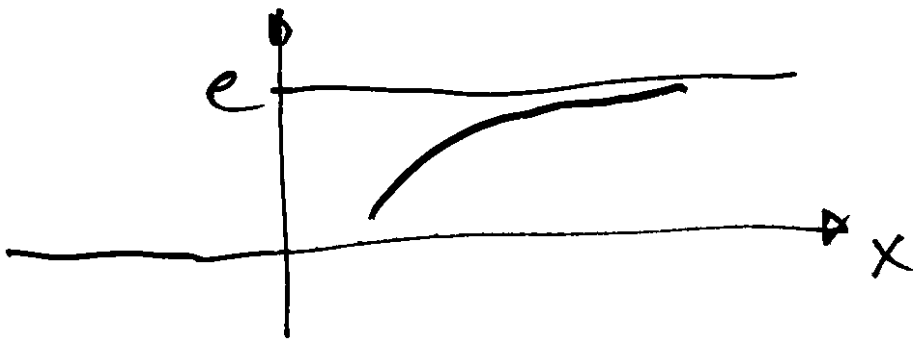
$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

x variabile reale

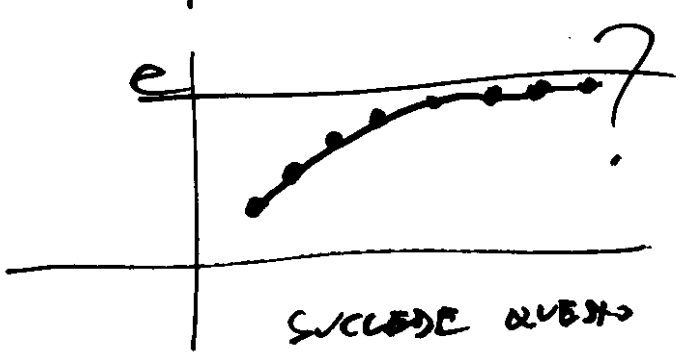


limite in variabile intera n

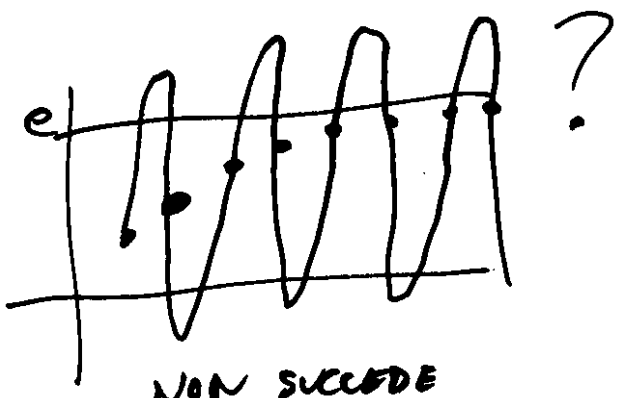
meno banale



limite in variabile reale x



SUCCEDE QUESTO



NON SUCCEDE

SENZA DIMOSTRAZIONE.

ALCUNI LIMITI NOTEVOLI CONSEGUENTI

$$\lim_{t\to 0} (1+t)^{1/t} = e$$

CAMBIO DI VARIABILE $\frac{1}{t} = x$

per $t \to 0^+$ $\quad x = \frac{1}{t} \to +\infty$

per $t \to 0^-$ $\quad x = \frac{1}{t} \to -\infty$

per $t \to 0$ $\quad x \to \pm\infty$

$$\lim_{t\to 0} (1+t)^{1/t} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Introdotto il numero di Nepero, possiamo considerare logaritmi ed esponenziali in base e, che hanno proprietà notevoli

$$\log_e x = \underbrace{\log x}_{\text{in base } e} = \lg x = \ln x$$

$\log$ non 10

logaritmo naturale

$\ln$

$e^x \qquad \exp_e x = \exp(x) \qquad e^{\lg x} = x$

$\lg(\exp(x)) = x \qquad \exp(\lg x) = x$

12 mar 2021 - f. 3

LIMITI NOTEVOLI CHE RIGUARDANO LOG e EXP in base e

$$\lim_{t\to 0} \frac{\lg(1+t)}{t} = 1 \qquad \lg\left(\frac{(1+t)}{t}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\lg(1+t) = \lim_{t\to 0} \lg(1+t)^{1/t} =$$

$$= \lg\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}\right) = \lg_e e = 1.$$

↑ $\lg$ è continuo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$e^x - 1 = t \to 0$ CDV

$e^x = 1+t$

$x = \lg(1+t)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{\lg(1+t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{\lg(1+t)}{t}} = \frac{1}{1} = 1$$

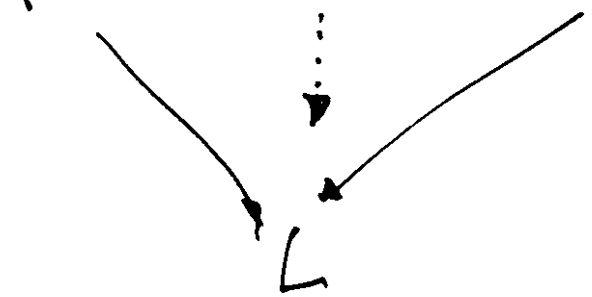
$\frac{\lg(1+t)}{t} \to 1$

RELAZIONI FRA LIMITI E DISUGUAGLIANZE

Una è più nota:

Teorema dei carabinieri

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$



Altra relazione utile nel seguito:

Passando al limite, le disuguaglianze si indeboliscono, ce sono più uguali si mantengono

Teorema Se $f(x) \le g(x)$ $\forall x$ e se esistono $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0} g(x)$ allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Ipotesi $f(x) \le g(x)$

tesi $\lim f(x) \le \lim g(x)$

$\le$ disug. debole si conserva

12 mar 2021 - p.5

stretto

Ipotesi $f(x) < g(x)$

Tesi $\lim f(x)$ (?) $\lim g(x)$

$<$ (ND)

$\leq$ (SI)

$\frac{1}{n} < \frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \not< \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}$

$0 \not< 0$ (ND)

Le disuguaglianza ~~debole~~ stretta si mantiene passando al limite

12 mar 2021 - p. 6

LIMITI CON FATTORIALI 0

ALTRI LIMITI DISCRETI con metodi elementari

ATTENZIONE a non applicare il teorema del prodotto dei limiti quando il numero di fattori è variabile:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ fattori}} =$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

prodotto di funzioni ognuna delle quali ha limite finito

Algebra dei limiti: limite del prodotto = prodotto dei limiti

$$= \left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\cdots\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= 1\cdot 1\cdots 1 = 1 \quad \text{risultato sbagliato}$$

Dov'è l'errore?

12 mar 2021 - p 7

Nel nostro esempio il numero di frazioni che moltiplichiamo cambia con n.

In questa situazione non è lecito applicare il teorema dell'algebra dei limiti, perché questo vale per 2 frazioni, per 3 frazioni, per un numero fissato di frazioni

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m} = \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{m \text{ fattori}} \overset{\text{ok}}{=}$$

(m fisso indipendente da n)

$$= \underbrace{\left(\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}_{1}\cdots\underbrace{\left(\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}_{n} = \underbrace{1\cdots 1}_{m} = 1$$

Trabocchetto in cui è facile cadere.

12 mar 2021 - p. 8

FATTORIALI

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n =$$

$$= n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

$$1! = 1 \qquad 0! = 1$$

semplificazioni frequenti

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} = n$$

$n!$ cresce in modo enormemente veloce, manda il computer in overflow.

$0! = 1 \qquad 1! = 1 \qquad 2! = 2 \qquad 3! = 6$

Non sorprende che

$$\lim_{n \to +\infty} n! = +\infty$$

Disuguaglianza notevole

$$n! \geq n \qquad \forall n \geq 1$$

Dim $\quad n \underbrace{(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1}_{\text{tutti} \geq 1} \geq n$

In generale, se ho un prodotto di numeri positivi,

se cancello un fattore ≥ 1,

il prodotto rimpicciolisce,

se cancello un fattore ≤ 1,

il prodotto cresce

Torniamo al fattoriale

$$n! = n\underbrace{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}_{\text{fatt} \geq 1} \geq n$$

so il lim $n \to +\infty$

Teorema del confronto

$$n! \geq n$$

$$+\infty$$

Deduco che $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n} \qquad \frac{\infty}{\infty} \text{ indet.}$$

$$\frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{n} =$$

$$= \underbrace{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}_{\geq 1} \geq n-1 \to +\infty$$

conseguenza: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n} = +\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^2} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{n!}{n^2} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{n^2} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{n} =$$

$$= \frac{n-1}{n}\underbrace{(n-2)(n-3)\cdots 2\cdot 1}_{\geq 1} \geq \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\to 1}\cdot(n-2) \to +\infty$$

conclusione $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^2} = +\infty$

12 mar 2021 - p. 11

$$\lim_{n\to+\infty} n! = \lim_{n\to+\infty} n\,(n-1)\,(n-2)\cdots 2\cdot 1 = +\infty$$

$n \to +\infty$, $(n-1) \to +\infty$, $(n-2) \to +\infty$, $2 \to 2$, $1 \to 1$

risultato giusto, ma il ragionamento non corretto.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\,(n-1)\cdots 2\cdot \frac{1}{n}$$

$n \to +\infty$, $(n-1) \to +\infty$, $2 \to 2$, $\frac{1}{n} \to 0$

12 mar 2021 - p 12

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^5} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{n!}{n^5} = \frac{n\cdot(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^5}\Big((n-5)\underbrace{(n-1)\cdots 2\cdot 1}_{\geq 1}\Big) \geq$$

$$\geq \underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^5}}_{\to 1}\ \underbrace{(n-5)}_{\to+\infty} \to +\infty$$

Più in generale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^p} = +\infty \qquad \text{per ogni } p\in\mathbb{N}$$

il fattoriale è un infinito più grande di tutte le potenze. polinomio

12 mar 2021 + p 13

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{n!}{2^n} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}^{n \text{ fattori}}}{\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2\cdot 2}_{n \text{ fattori}}} =$$

$$= \underbrace{\frac{n}{2}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{2}\cdots}_{\text{tutti} > 1} \underbrace{\frac{3}{2}}_{>1}\cdot\underbrace{\frac{2}{2}}_{=1}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{<1} \geq \frac{1}{2}$$

conto

non serve a niente

$$= \frac{n}{2}\cdot\boxed{\underbrace{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{2}}_{\text{tutto vale} \geq 1}}\cdot\frac{1}{2} \geq \underbrace{\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\to+\infty}$$

conto

Conclusione:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n} \text{ esiste e vale } +\infty$$

12 mar 2021 - p. 14

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!}$$

crab

$$0 \le \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2\cdot 2}^{n \text{ fattori}}}{\underbrace{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}_{n \text{ fattori}}} =$$

$$= \frac{2}{n}\cdot\underbrace{\left|\frac{2}{n-1}\cdots\frac{2}{3}\right|}_{\text{bottoni} < 1}\cdot\left(\frac{2}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{1}\right) \le \underbrace{\frac{2}{n}\cdot\frac{2}{1}}_{\text{crab.}}$$

$<1 \quad =1 \quad >1$

<1 $\qquad$ 0

0

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

12 mar 2021 - p. 15

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{3^n} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{n!}{3^n} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}^{n \text{ fattori}}}{\underbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdots 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}_{n \text{ fattori}}} =$$

$$= \frac{n}{3}\cdot\left[\frac{n-1}{3}\cdot\frac{n-2}{3}\cdots\frac{4}{3}\right]\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} \geq$$

$\left[\quad\right]$: > 1 — $\frac{3}{3}$: $= 1$ — $\frac{2}{3}$: < 1 — $\frac{1}{3}$: < 1

$$\geq \frac{n}{3}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} \to +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{3^n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$$

LIMITI CON FATTORIALI

$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$

$n! = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}_{\text{tutti} \geq 1} \geq n$ crescente

$n \to +\infty$

quindi $\lim_{n\to+\infty} n!$ esiste e vale $+\infty$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty$ $\quad$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{3^n} = +\infty$

$\frac{n!}{5^n}$ $\quad$ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\frac{n!}{5^n} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}^{n \text{ fattori}}}{\underbrace{5\cdot 5\cdot 5\cdots 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5}_{n \text{ fattori}}} =$$

$$= \underbrace{\frac{n}{5}\cdot\left|\frac{n-1}{5}\cdot\frac{n-2}{5}\cdots\frac{6}{5}\right|}_{\text{tutti} > 1}\cdot\underbrace{\left|\frac{5}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\right|}_{\leq 1}$$

$$\geq \frac{n}{5}\cdot\frac{n-1}{5}\cdots\frac{6}{5} \longrightarrow +\infty$$

informazione inutile

15 mar 2021 - P. 1

15 mar 2021 - p.2

$$\frac{n!}{5^n} = \frac{n}{5} \cdot \underbrace{\left| \frac{n-1}{5} \cdot \frac{n-2}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{6}{5} \right|}_{>1 \text{ definitely}} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} \geq$$

$$\geq \underbrace{\frac{n}{5}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{4!}{5^4}}_{\text{costante}} \longrightarrow +\infty$$

conclusion: $\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{5^n} = +\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{5^n}{n!}$$

$$0 \leq \frac{5^n}{n!} = \underbrace{\frac{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 5}{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1}}_{\text{definitely}} \leq \underbrace{\frac{5}{n}}_{\to 0} \cdot \frac{5!}{5^5}$$

< 1

$\to 0$

$\to 0$

15 mar 2021 - p.3

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{8^n}$$

$$\frac{n!}{8^n} = \frac{n}{8} \cdot \underbrace{\left|\frac{n-1}{8} \cdots \frac{9}{8}\right|}_{>1} \cdot \underbrace{\left|\frac{8}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{1}{8}\right|}_{\leq 1} \geq$$

$$\geq \frac{n}{8} \cdot \frac{8!}{8^8} \longrightarrow +\infty$$

conclusione $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{8^n} = +\infty$

In generale il procedimento funziona per tutti i limiti del tipo

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{p^n} = +\infty} \quad \text{con } p \geq 1$$

se $0 < p < 1$ non è più indeterminata

$$\frac{\infty}{0} = \infty$$

MORALE il fattoriale è un infinito più forte di qualsiasi esponenziale

15 mar 2021 - 7.4

Un infinito ancora più grosso del fattoriale

$$n^n$$

n	n^n
1	$1^1 = 1$
2	$2^2 = 4$
3	$3^3 = 27$
4	$4^4 =$

Verifica che tende all'∞

$$n^n = \overbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}^{n \text{ fattori} \geq 1} \geq n \to +\infty$$

OK, $\lim_{n \to +\infty} n^n = +\infty$

Confrontiamo col fattoriale

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{\overbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}^{n \text{ fattori}}}{\underbrace{n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1}_{n \text{ fattori}}} =$$

$$= \overbrace{\left| \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdots \frac{n}{2} \right| \cdot \frac{n}{1}}^{\text{buttiamo}} \geq$$

$$\underbrace{\quad}_{\text{tutti} \geq 1}$$

$$\geq n \to +\infty$$

Conclusione: $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

n^n è più forte del fattoriale

15 mar 2021 - p.5

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdots\frac{n}{3}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{1}$$

PAGATO SSO

$\frac{n}{n} \to 1$, $\frac{n}{n-1} \to 1$, $\frac{n}{n-2} \to 1$, ??? , $\frac{n}{3} \to +\infty$, $\frac{n}{2} \to +\infty$, $\frac{n}{1} \to +\infty$

tutti quelli del tipo $\frac{n}{n-K} \to 1$ con K intero fisso

tutti quelli del tipo $\frac{n}{K} \to +\infty$ K intero fisso

---

$$\frac{n^n}{n!} \to +\infty$$

variante $\frac{n^n}{(n+1)!} \to ?$

$$\frac{n^n}{(n+1)!} = \frac{\overbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}^{n \text{ fattori}}}{\underbrace{(n+1)(n)(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}_{n+1 \text{ fattori}}} =$$

$$= \frac{\overbrace{n\cdot nn\cdots\cdot n\cdot n}^{n \text{ fattori}}}{\underbrace{(n+1)\,n\,(n-1)\cdots 3\cdot 2}_{n \text{ fattori}}} =$$

$$= \frac{n}{n+1}\cdot\overbrace{\underbrace{\frac{n}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\cdots\frac{n}{3}}_{\geq 1}\cdot\frac{n}{2}}^{>1} \geq \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n}{2}$$

$\frac{n}{n+1} < 1$, $\frac{n}{n} = 1$, $\frac{n}{n-1} > 1$, $\frac{n}{n+1} \to +\infty$

altro metodo

$$\frac{1 \cdot \overbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}^{n \text{ fattori}} \cdot n}{\underbrace{(n+1)(n)(n-1)\cdots 2\,1}_{n+1}} = \frac{1}{n+1} \cdot \left| \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdots \frac{n}{2} \right| \cdot \frac{n}{1}$$

$\left| \cdots \right| < 1$, ≥ 1

$$\geq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{1} \to 1 \quad \text{non serve}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \left| \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdots \frac{n}{3} \right| \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{1} \geq$$

$\left| \cdots \right| \geq 1$

$$\geq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{1} \to +\infty$$

Esercizio: $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^n}{(n+2)!} = +\infty$

COEFFICIENTI BINOMIALI

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

numero di sottinsiemi di k elementi presi da un insieme di n elementi distinti

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{2n}{n}$$

$$2n! \begin{cases} 2(n!) \\ (2n)! \end{cases}$$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!\;n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} =$$

$$= \frac{\overbrace{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots\cdots 2\cdot 1}^{2n \text{ fattori}}}{\underbrace{\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}_{n \text{ fattori}} \cdot \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}_{n \text{ fattori}}}_{2n \text{ fattori}}}$$

$$= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)\,n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 \cdot n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} =$$

$$= \frac{\overbrace{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+2)(n+1)}^{n \text{ fattori}}}{\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}_{n \text{ fattori}}} =$$

$$= \underbrace{\frac{2n}{n}}_{\geq 1} \cdot \frac{2n-1}{n-1} \cdot \frac{2n-2}{n-2} \cdot \cdots \underbrace{\frac{n+2}{2}}_{\geq 1} \cdot \underbrace{\frac{n+1}{1}}_{\geq 1}$$

15 mar 2021 - p 8

sospetto: tutti ≥ 1

dimostrazione? $\frac{n+k}{k}$ forse positivo $k=1,\dots,n$

$$\frac{2n}{n} \quad \frac{2n-1}{n-1} \quad \frac{2n-2}{n-2} \quad \dots \quad \frac{n+2}{2} \quad \frac{n+1}{1}$$

$k=n \quad k=n-1 \qquad\qquad k=2 \quad k=1$

$2n-1 = n+(n-1) =$ vero

$\frac{n+k}{k} \geq 1$?

$\Uparrow$

$n+k \geq k \iff n \geq 0$ vero

torniamo all'espressione

$$\binom{2n}{n} = \underbrace{\frac{2n}{n} \quad \frac{2n-1}{n-1} \quad \frac{2n-2}{n-2} \quad \dots \quad \frac{n+2}{2}}_{\geq 1 \text{ bottiglie}} \cdot \frac{n+1}{1} \geq n+1 \to +\infty$$

conclusione: $\lim_{n\to\infty} \binom{2n}{n} = +\infty$

INVERTIAMO L'ORDINE

$$\frac{(2n)(2n-1)\cdot\ldots\cdot(n+2)(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n} =$$

$$= \frac{2n}{1}\left|\frac{2n-1}{2}\ \frac{2n-2}{3}\ \ldots\ \frac{n+2}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right| \geq 2n \to +\infty$$

(numeratore: >1, >1)

← numeratore

← limitiamoci al denom.

tutti >1

bottiamo via

$$0 < \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2n}\left|\frac{2}{2n-1}\ \frac{3}{2n-2}\ \ldots\ \frac{n-1}{n+2}\ \frac{n}{n+1}\right| \leq \frac{1}{2n} \to 0$$

($\frac{n-1}{n+2} < 1$, $\frac{n}{n+1} < 1$)

< 1

0

0

GERARCHIA DEGLI INFINITI

L'infinito più semplice è (in variabile intera)

$$\boxed{n}$$

Un infinito più grande è

$$n^2 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n} = +\infty$$

Ancora più grande:

$$n^3 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^2} = +\infty$$

Ancora più grande

$$n^4$$
$$n^5$$
$$n^6$$
$$\vdots$$

I monomi diventano sempre più grandi all'aumentare dell'esponente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}}$$ vince il grado più alto

Gli esponenziali crescono sono infiniti più grandi di tutti i polinomi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$$

verifica si può fare usando la disug. di Bernoulli

$$\frac{2^n}{n} = \sqrt{(\sqrt{2})^n} \left(\frac{2^{n/2}}{\sqrt{n}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}^n}{\sqrt{n}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{(1+\overbrace{(\sqrt{2}-1)}^{x})^n}{\sqrt{n}}\right)^2 \geq \qquad (1+x)^n \geq 1+nx \quad x>-1$$

$$\geq \left(\frac{1+n(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{n}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\,(\sqrt{2}-1)\right)^2 \to +\infty$$

($\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$; $\sqrt{n} \to +\infty$; $(\sqrt{2}-1) > 0$; la somma $\to +\infty$; il quadrato $\to +\infty$)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\text{esponenziale crescente}}{\text{monomio}} = +\infty$$

GERARCHIA

$$n \prec n^2 \prec n^3 \prec n^4 \prec \underbrace{\cdots}_{\substack{\text{tutti i monomi} \\ \text{infiniti monomi}}} \prec 2^n \prec 3^n$$

$$n \prec n^2 \prec \underbrace{\cdots}_{\text{monomi}} \prec 2^n \prec 3^n \prec 4^n \prec \underbrace{\cdots}_{\substack{\text{tutti gli esponenziali} \\ \text{crescenti}}} \prec n! \prec n^n$$
esponenziali

$$\frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \to +\infty \qquad \left(\frac{3}{2} > 1\right)$$

$$n^{(n^n)} \qquad (n^n)^n$$

$$n^{2n}$$

trucco generale: se ho un infinito, per trovarne uno più grande, basta elevarlo al quadrato

$$\frac{a_n^2}{a_n} = a_n \to +\infty$$

$$n \prec n^2 \prec n^3 \prec \dots \prec 2^n \prec 3^n \prec 4^n \prec \dots \prec n! \prec n^n \prec (n^n)^2 \prec$$

$$\prec (n^n)^3 \prec (n^n)^4 \dots \prec (n^n)^n$$

...

Se abbiamo una gerarchia di infiniti

$$\cdot \prec \cdot \prec \cdot \prec \dots \prec$$

infinito più grande

tutti

INFINITI LENTI

n

$\sqrt{n}$ è un infinito più piccolo di n

$$\frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$$

$\sqrt[3]{n}$ è più lento di $\sqrt{n}$

$\sqrt[4]{n}$ - - - - $\sqrt[3]{n}$

$$\sqrt[n]{n} \dots \prec \sqrt[4]{n} \prec \sqrt[3]{n} \prec \sqrt{n} \prec n$$

$\sqrt[n]{n}$ non è un infinito

radici

15 mar 2021 - p. 1/4

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \left(e^{\lg n}\right)^{1/n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\lg n}{n}} = e^0 = 1$$

$\lg n \prec$ tutte le radici

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lg n}{\sqrt[k]{n}} = \qquad k \text{ costante}$$

$$\sqrt[k]{n} = x \to +\infty$$

$$n = x^k$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\lg x^k}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{k \lg x}{x} = 0$$

$$\sqrt[3]{\lg n} \prec \sqrt{\lg n} \prec \lg n \prec \ldots \text{radici} \ldots \prec \sqrt[3]{n} \prec \sqrt{n} \prec n$$

$$\lg(\lg n)$$

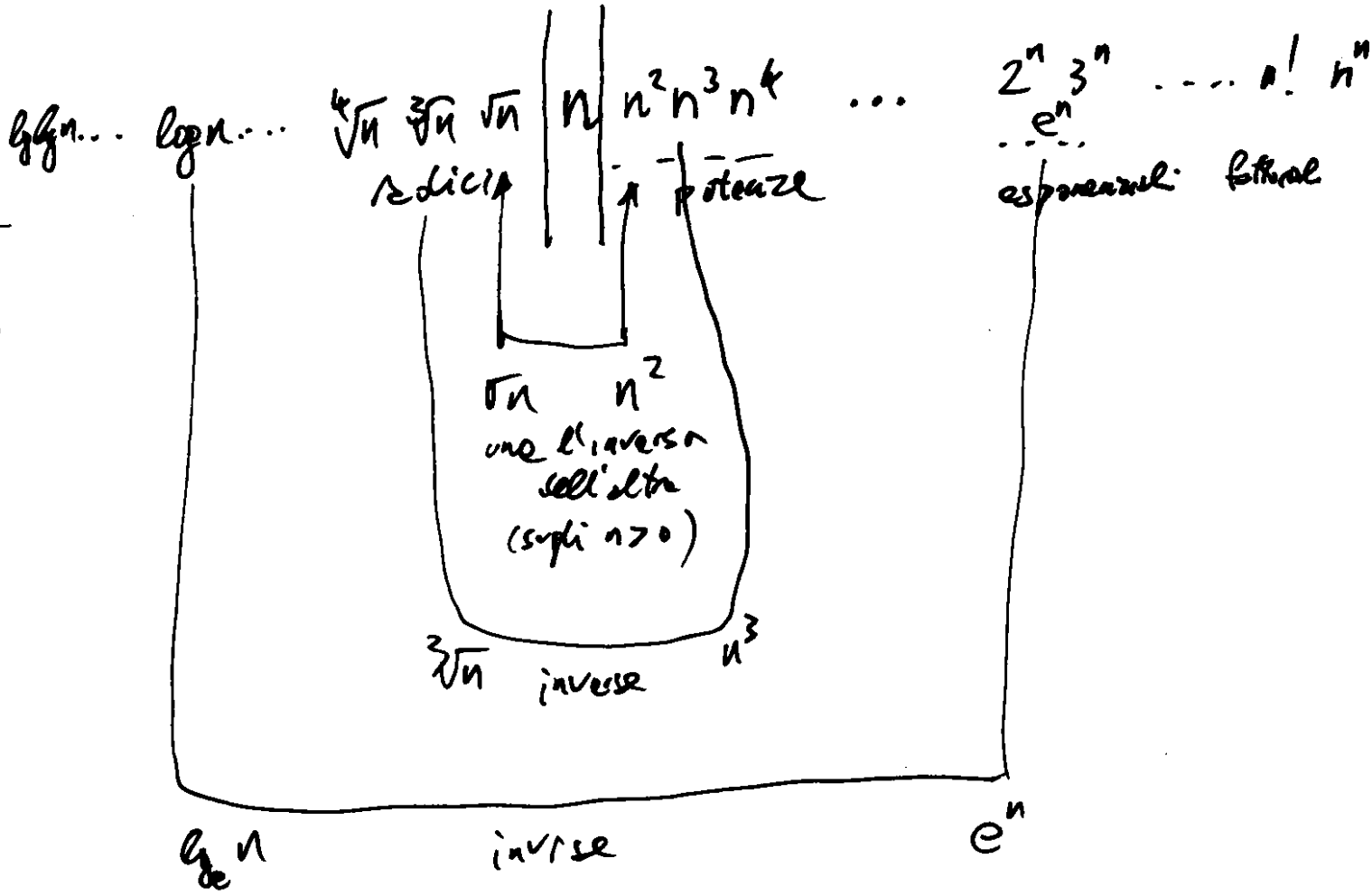
$\lg n \prec \ldots \prec \sqrt[3]{n} \prec \sqrt{n} \prec \boxed{n} \prec n^2 \prec n^3 \prec \cdots \prec 2^n \prec 3^n \prec 4^n \prec \ldots$

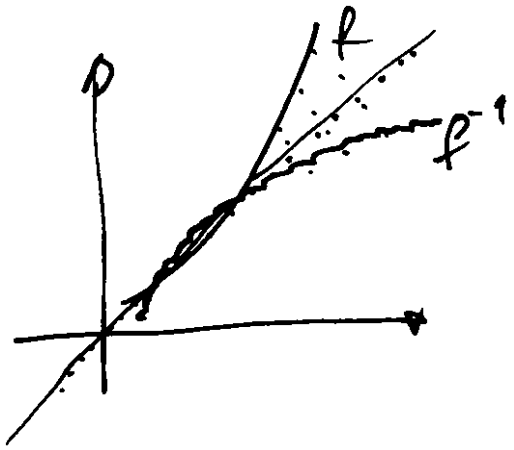
$\prec n! \prec n^n \prec \ldots$

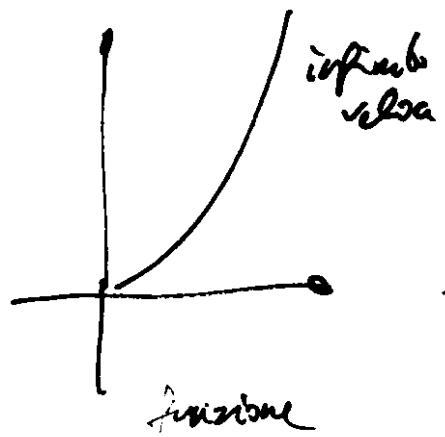
15 mai 2021 - p. 15

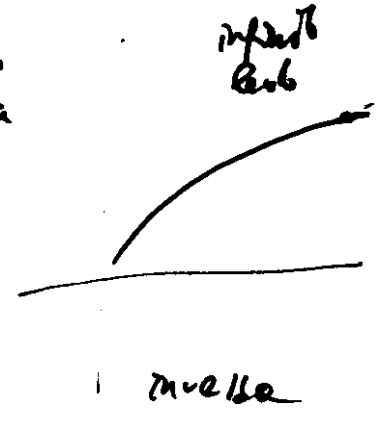
19 mar 2021 - p. 1

GERARCHIA DEGLI INFINITI









esploriamo la zona intermedia
fra potenze ed esponenziali

$n\ n^2\ n^3\ n^4 \dots \quad \dots 2^n\ 3^n \dots$

$n^5\ n^6 \dots \quad \dots \left(\frac{4}{3}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n$

potenze con esponente via via più alto

esponenziali con base via via più bassa >1

cercasi un infinito intermedio fra tutte le potenze e tutti gli esponenziali

proposta: $e^{\sqrt{n}}$ $\qquad \sqrt{e^n} = e^{n/2}$ è un esponenziale $(\sqrt{e})^n$

$e^{\sqrt{n}}$ è più grande di tutte le potenze

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{n^p} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{e^{p \lg n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\sqrt{n} - p\lg n} = \quad \sqrt{n} - p\lg n \to +\infty$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\sqrt{n}\left(1 - p\frac{\lg n}{\sqrt{n}}\right)} = e^{+\infty} = +\infty$$

$e^{\sqrt{n}}$ è più piccolo di tutti gli esponenziali

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{e^{n\lg a}} = \quad (a>1,\ \lg a>0)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\sqrt{n} - n\lg a} = \quad \sqrt{n} - n\lg a \to -\infty$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \lg a\right)} = e^{-\infty} = 0$$

potenza

$$n \quad n^2 \quad n^3 \quad \dots \quad e^{\sqrt{n}} \quad \dots \quad \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad 2^n \quad 3^n$$

esponenziale

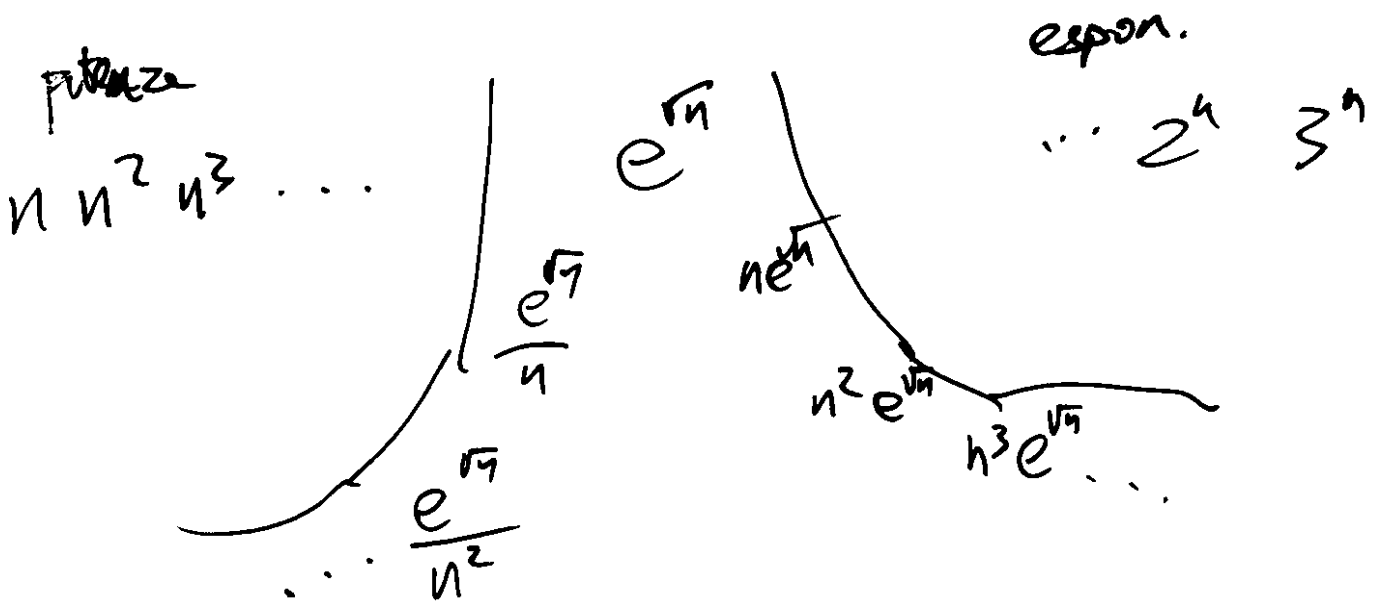
$$e^{\sqrt[3]{n}} \qquad n e^{\sqrt{n}}$$

$$\frac{e^{\sqrt{n}}}{n}$$

$$e^{\sqrt{n}} + 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{n}} + 1}{e^{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{e^{\sqrt{n}}}\right) = 1$$

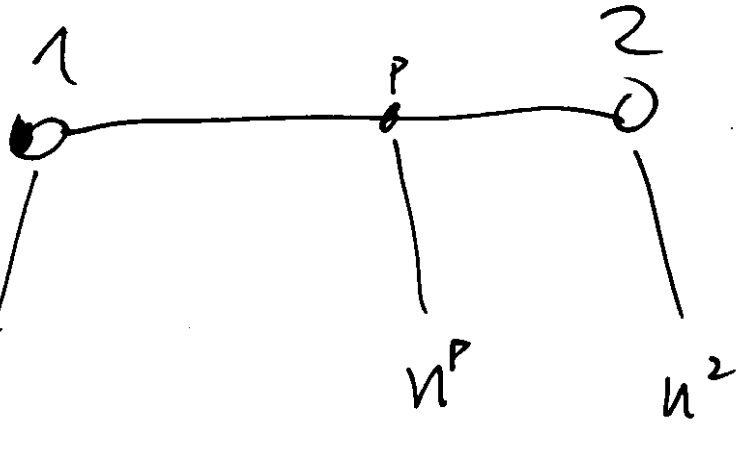
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\left(e^{\sqrt{n}}\right)}{e^{\sqrt{n}}} = 2$$

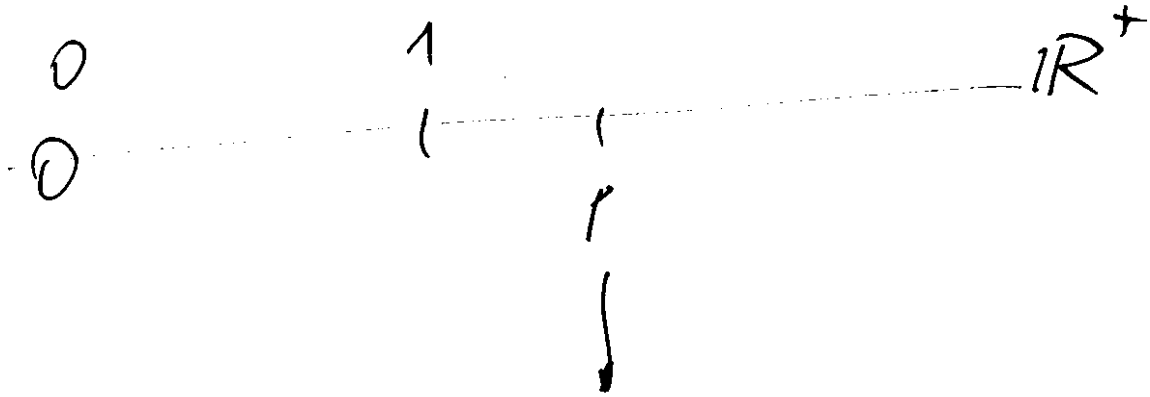


$$n^1 \quad n^{4/3} \quad n^{3/2} \quad n^{5/3} \quad n^2$$

$n^p \quad 1 < p < 2$
sono tutti intermedi fra n e n^2

formano un continuo di infiniti intermedi





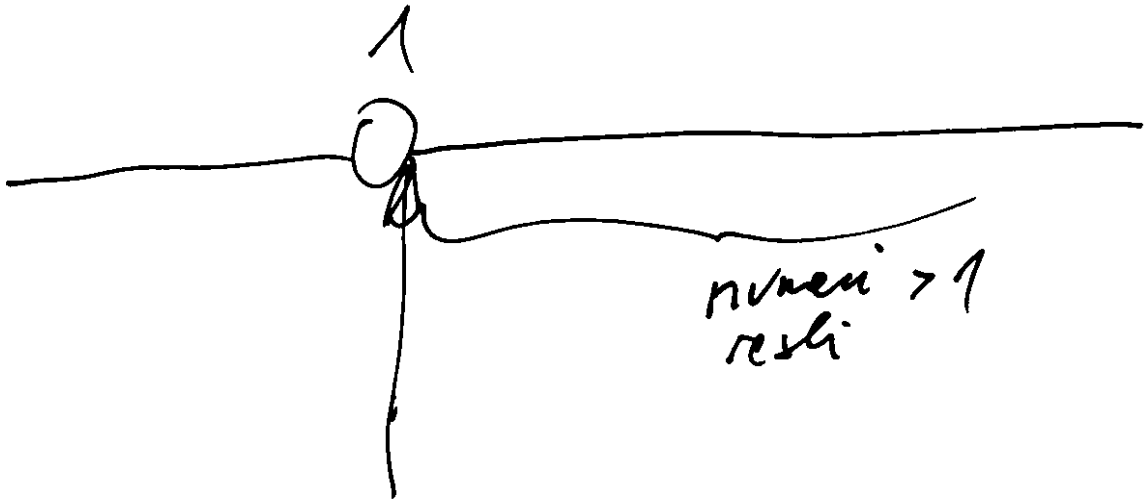
n^p funzione continua
di infiniti parametri
ha p reale > 0

comprende le radici

$$\sqrt{n} = n^{1/2}$$

$$\sqrt[3]{n} = n^{1/3}$$

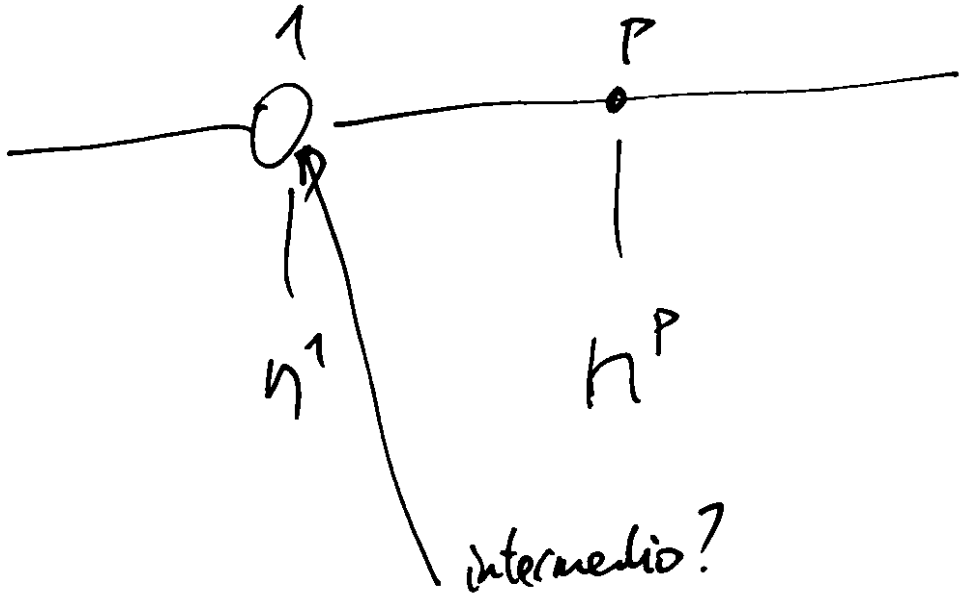
Sappiamo che non c'è nessun numero reale intermedio fra 1 e tutti i numeri >1



Se consideriamo gli infiniti parametrizzati

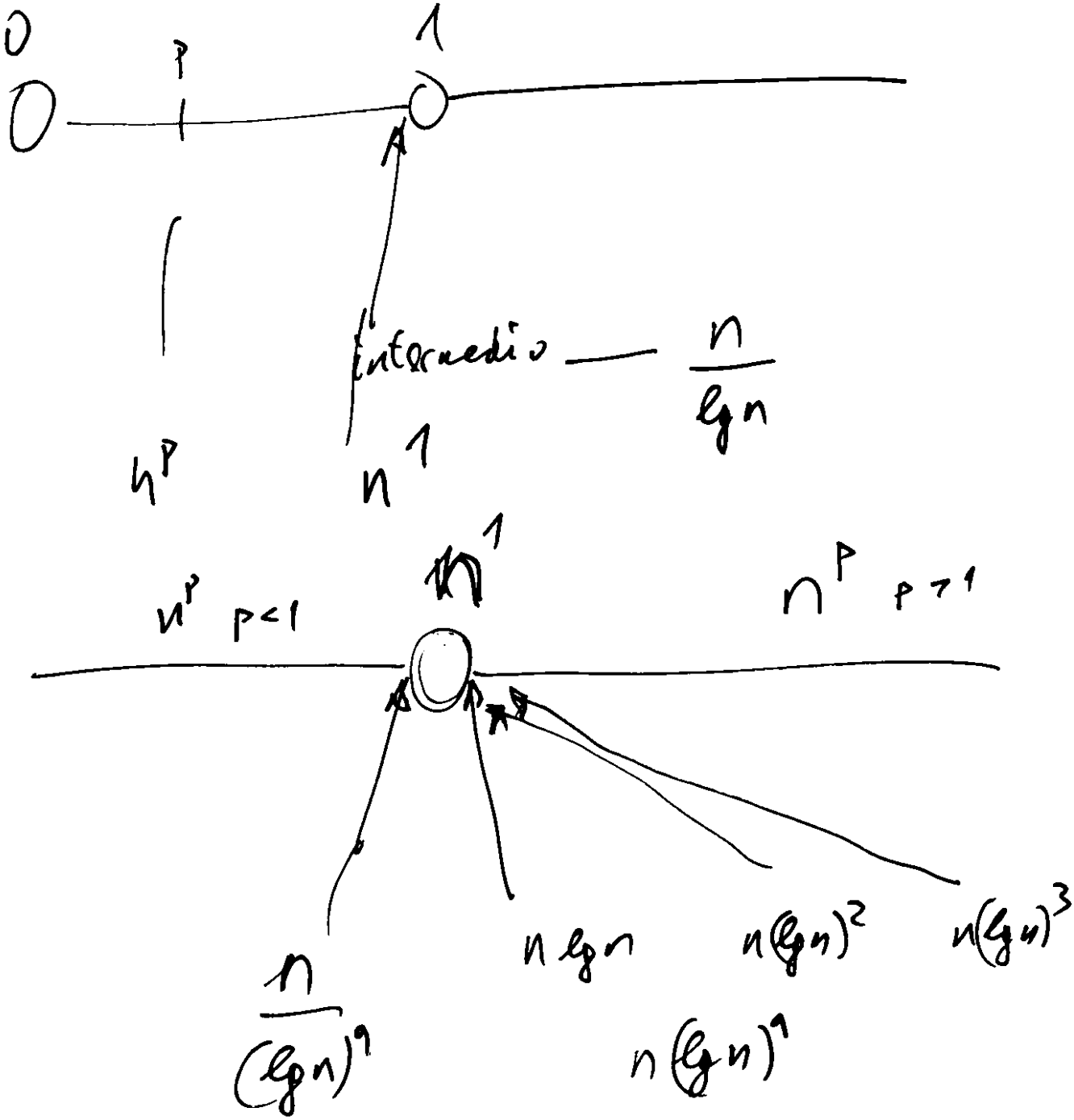
$$n^p$$

esistono infiniti intermedi fra n^1 e tutti gli n^p con $p>1$?



proposta: $n \cdot \lg n$

19 mar 2021 - 7.6



SIMBOLI DI LANDAU - BACHMAN -

O grande

Definizione Date due funzioni $f(n)$, $g(n)$ scriveremo $f(n) = O(g(n))$ e

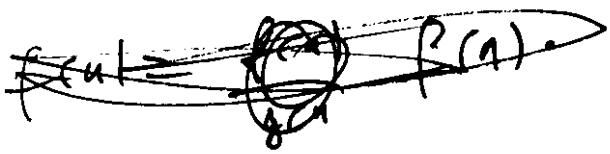
leggiamo $f(n)$ uguale O grande di $g(n)$

se succede che

$$f(n) = g(n) \cdot (\text{qualcosa di limitato})$$

compreso fra due costanti per n grande

$f(n) = n^2 - 2n$, $g(n) = n^2$



$$f(n) = g(n) \cdot \frac{f(n)}{g(n)}$$

$$f(n) = n^2 - 2n = n^2 \cdot \left(\frac{n^2 - 2n}{n^2}\right) =$$

è limitato?

$$= n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

$\frac{2}{n} \to 0$

1 tende a una costante, quindi è limitato

$n^2 - 2n = n^2 \cdot$ (qualcosa di limitato)

$n^2 - 2n = O(n^2)$

Significato intuitivo di O

$f(n) = O(g(n))$

$f(n) = g(n) \cdot$ (qualcosa di limitato, compresa la costante)

~~costante~~ $|f(n)| \leq$ costante $|g(n)|$

$f(n)$ è controllato nella sua crescita (o decrescita) da una costante per $g(n)$

$n^2 - 2n = O(n^2)$

n^2 controlla la crescita di $n^2 - 2n$

$n^2 + 2n = O(n^2)$

$n^2 + 2n \leq \text{costante} \cdot n^2$

$$\frac{n^2+2n}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} \leq 1+2=3$$

$n \geq 1$

$$n^2 + 2n \leq 3n^2 \qquad \forall n \geq 1$$

↑

il valore della costante non interessa per l'O grande, è sufficiente che esista tale costante

Se so che $f(n) = O(g(n))$ so che

$$|f(n)| \leq \text{costante} \cdot |g(n)|$$

↑

non importa quanto vale

$f(n)$ è "dell'ordine di" $g(n)$

↑

o piccolo

$$f(n) = o(g(n))$$

vuol dire che

$$f(n) = g(n) \cdot \left(\begin{array}{c} \text{qualcosa che} \\ \underline{\text{tende a}}\ 0 \\ \text{per } n \to +\infty \end{array} \right)$$

Significato intuitivo: $f(n)$ è molto più piccolo di $g(n)$

$$o(g(n)) = o \cdot g(n)$$

o zero, non il numero zero, ma di qualcosa che tende a zero

Esempio

$$n^2 - 3n = o(n^3)$$

$$n^2 - 3n \cdot \frac{}{} n^3 \cdot \frac{n^2 - 3n}{n^3} = o(n^3)$$

$\frac{n^2-3n}{n^3} \to 0$

19 mar 2021 p. 11

Altri simboli di Landau

$f(n) = \Theta(g(n))$

\ theta maiuscolo

Θ theta minuscolo

vuol dire che

$f(n) = g(n) \cdot$ (qualcosa che è limitato e lontano da zero)

$0 < \text{costante} \leq |\text{qualcosa}| \leq \text{costante}$

$n^2 + 3n = \Theta(n^2) =$

$= n^2 \cdot \dfrac{n^2+3n}{n^2}$

$\downarrow$ è lontano da 0 all'∞

1 che da 0

$f(n) = \Omega(g(n))$ omega maiuscolo

vuol dire che

$f(n) = g(n) \cdot$ (qualcosa che è lontano da zero)

$|\text{qualcosa}| \geq \text{costante} > 0$

$n^3 + 2n = \Omega(n^2)$

$= n^2 \cdot \dfrac{n^3+2n}{n^2}$

$\to \infty$ è lontano da zero

ω omega minuscolo

$f(n) = \omega(g(n))$

vuole dire che

$f(n) = g(n) \cdot$ (qualcosa che tende a ∞)

$\ddot{\omega} \cdot g(n)$

TILDE equivalenza asintotica

$f(n) \sim g(n)$

vuol dire

$f(n) = g(n) \cdot$ (qualcosa che tende a 1)

$n^2 - 3n = n^2 \cdot \frac{n^2 - 3n}{n^2}$

$\frac{n^2 - 3n}{n^2} \to 1$

$\boxed{n^2 - 3n \sim n^2}$

FUNZIONI CONTINUE
PROPRIETÀ GLOBALI

Richiami

Def Una funzione f è **continua in un punto** $x_0 \in \text{dom} f$ se

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- equivalentemente in termini di ε, δ:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \text{dom} f$$
$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

~~Proprietà utili delle funzioni~~

Def Una funzione si dice CONTINUA (e basta) se è continua in tutti i punti del dominio.

Oss Se un punto x_0 non appartiene al dom f non ha molto senso parlare di continuità di f in x_0. Il problema se una funzione è continua o no lo poniamo solo per i punti del dominio.

Es $f(x) = \frac{1}{x}$ Secondo alcune impostazioni, nel punto $x_0 = 0$ è discontinua, cioè non continua. Nella impostazione di questo corso f è CONTINUA (e basta) $x_0 = 0$ non appartiene al dominio.

Teoremi generali sulle funzioni continue:

somma, rapporto, composizione di funzioni continue è continua.

Fatto: le funzioni elementari

polinomi, funzioni razionali (rapporti di polinomi), ~~loro~~ radici, funzioni trigonometriche, esponenziali e logaritmi sono funzioni CONTINUE.

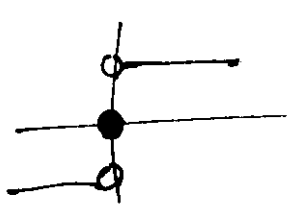
$$\frac{\sin(x^2 - 3x + \log x)}{\sqrt{x^3 - \tan x} + \log(3 + e^x)}$$

è continua

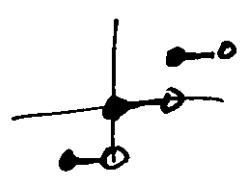
senza preoccuparsi di che dominio ha.

Funzioni discontinue che conosciamo:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$\lfloor x \rfloor$ = parte intera



$\lceil x \rceil$

REGOLA PRATICA (valida in questo corso)

se la formula di una funzione esplicita non contiene mai sgn $\lfloor\ \rfloor$ $\lceil\ \rceil$, è continua.

Proprietà utili delle funzioni continue:

Se f è continua (sul dominio)

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)$$

perché il secondo membro abbia senso.

$$\lim_{x\to} \exp(f(x)) = \exp\left(\lim_{x\to} f(x)\right)$$

Richiamo:

Se a_n è monotòna (successione) allora

esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n$ (finito o infinito)

(le successioni monotòne hanno sempre limite)
(non oscillano)

Disuguaglianze e limiti:

$(\forall x)$

Se $f(x) \le g(x)$ allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$$ (se esistono)

---

oss $\left(f(x) < g(x) \ \forall x\right) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$

→ si indebolisce

ENUNCIATO DEL TEOREMA DELL'ESISTENZA DEGLI ZERI

Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato,

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua

Supponiamo che $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segno opposto (cioè o $\begin{cases} f(a)>0 \\ f(b)<0 \end{cases}$ o $\begin{cases} f(a)<0 \\ f(b)>0 \end{cases}$)

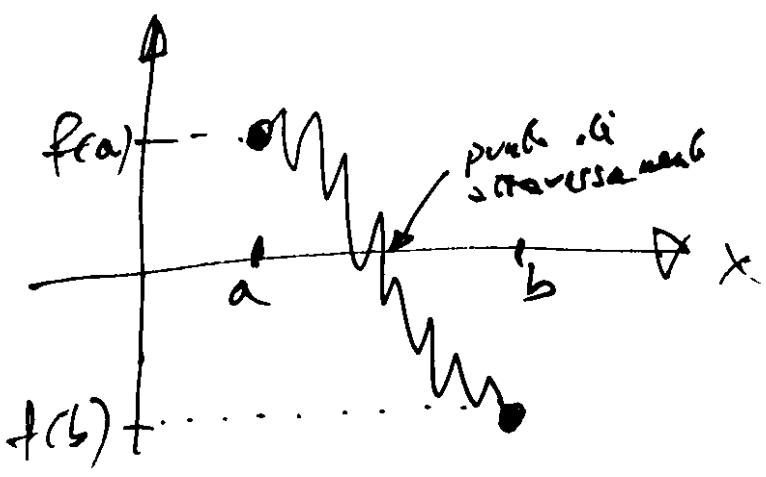
$$\begin{cases} f(a)>0 \\ f(b)<0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} f(a)<0 \\ f(b)>0 \end{cases}$$

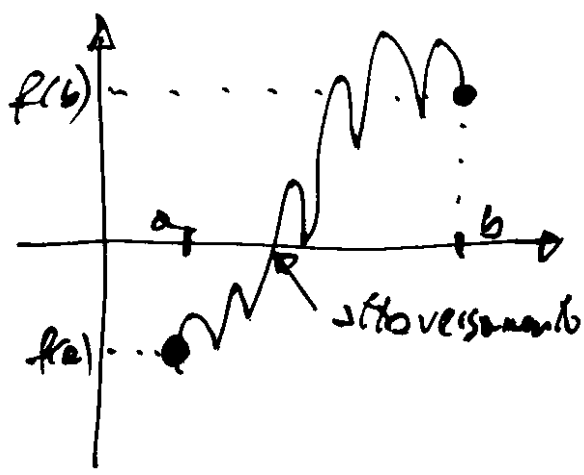
Allora (tesi) esiste $\bar{x} \in [a,b]$ tale che

$$f(\bar{x}) = 0$$

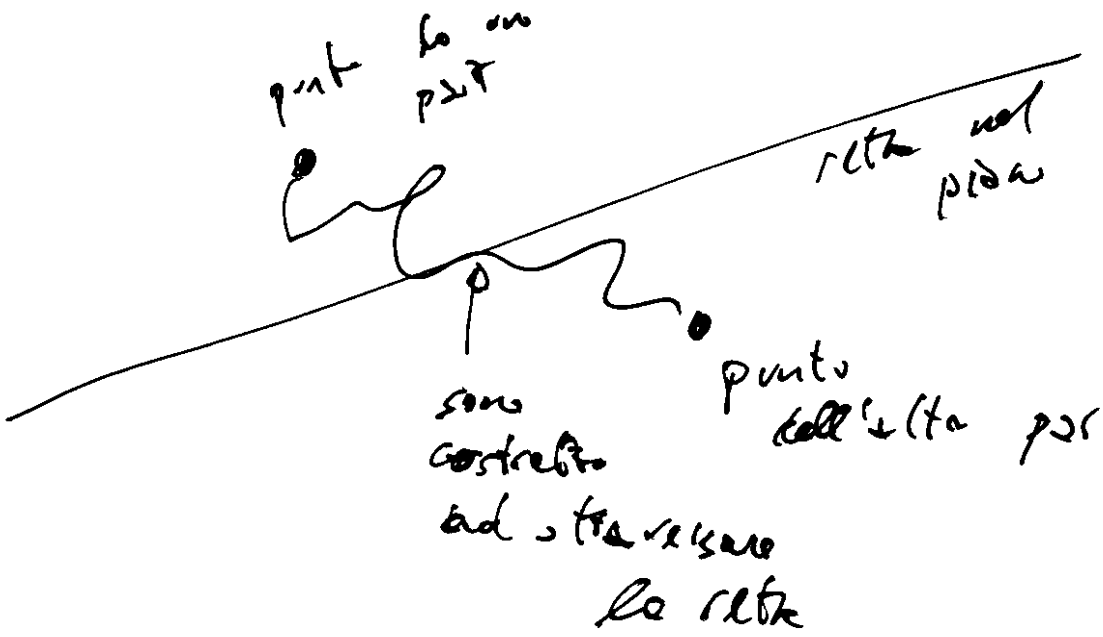
($\bar{x}$ è detto uno zero della funzione, cioè un valore che annulla la funzione)

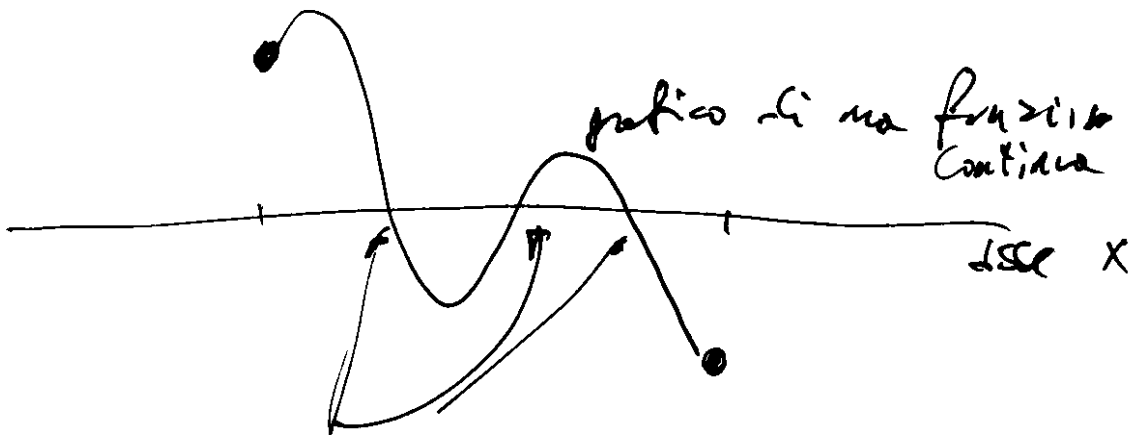
Interpretazione geometrica



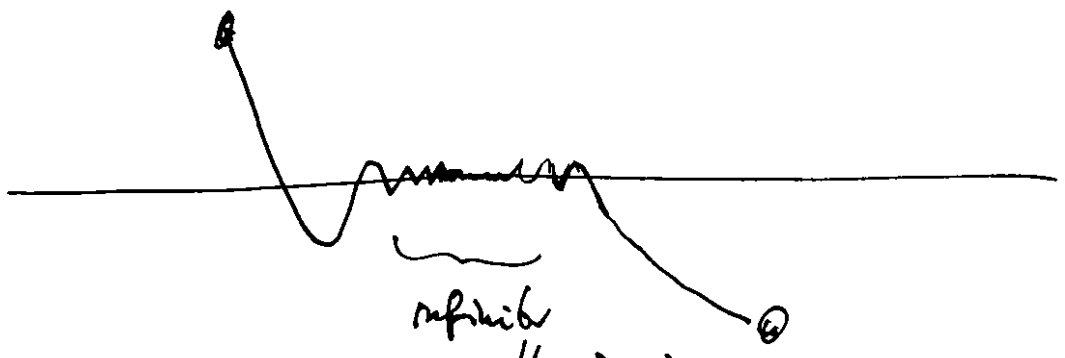


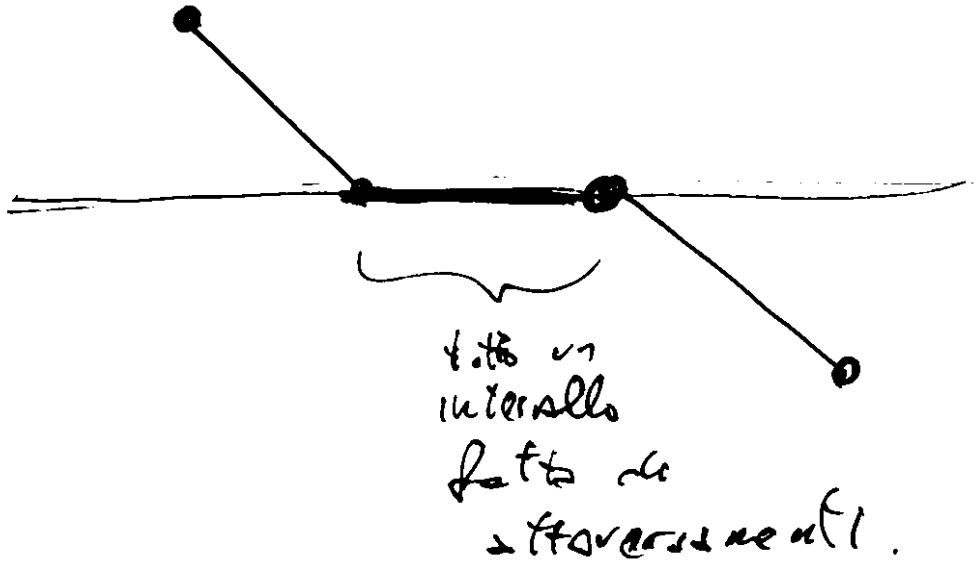
IDEA INTUITIVA





punti di attraversamento possono essere più d'uno





Il teorema dice che c'è

<u>almeno uno</u>.

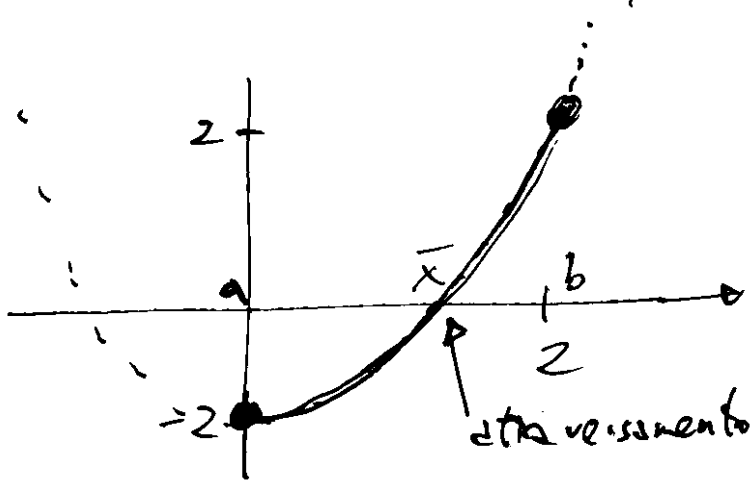
E' ESSENZIALE che imposti il teorema sui reali

se imposti tutto sui razionali

sarebbe falso.

Esempio $f(x) = x^2 - 2$ continua

$a = 0$, $b = 2$

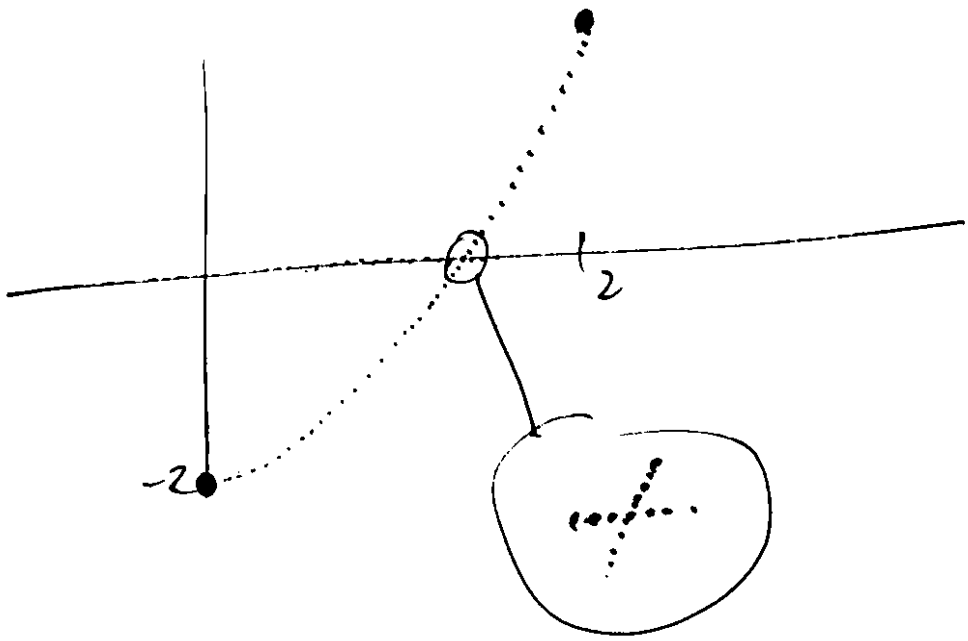


$f(\bar{x}) = 0 \iff \bar{x}^2 - 2 = 0$

$\iff \bar{x}^2 = 2$

($\iff \bar{x} = \pm\sqrt{2}$ sui reali)

$\iff$ FALSO (sui razionali)



$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\lim_{x \to x_0} (x^2 - 2) = x_0^2 - 2$

Vera $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

è continua

IL TEOREMA DELL'ESISTENZA DEGLI ZERI

Teorema Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segni opposti. Allora esiste $\bar{x} \in [a,b]$ tale che

$$f(\bar{x}) = 0.$$

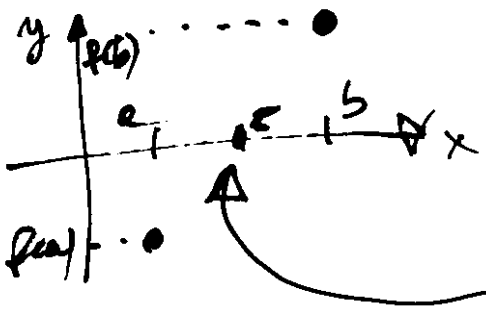
Dimostrazione usando il metodo di **bisezione** (si presta a diventare un algoritmo pratico).

bisezione vuol dire tagliare in due.

$f(a)$ e $f(b)$ hanno segni opposti. Ci sono 2 casi:

$f(a) < 0$, $f(b) > 0$, oppure $f(a) > 0$, $f(b) < 0$.

Ci mettiamo nel primo caso. Il secondo sarà analogo.



Tagliamo in due l'intervallo $[a,b]$ usando il punto medio

$$c = \frac{a+b}{2}$$ (media aritmetica)

$$\left(c = \frac{b-a}{2} \right)$$ ERRORE

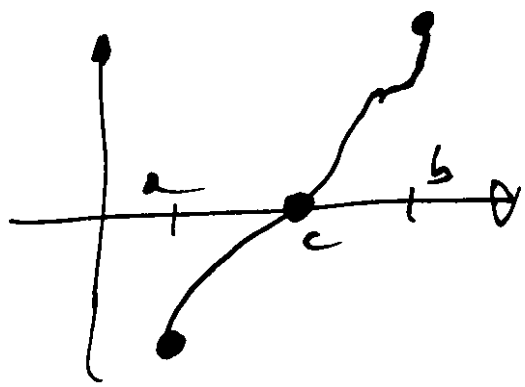
questa è la semilunghezza dell'intervallo

Ci chiediamo quanto vale la funzione nel punto medio, o meglio, ci chiediamo il segno della funzione in c

segno di $f(c)$ (non il segno di c)

Ci sono tre possibilità:

1) $f(c) = 0$

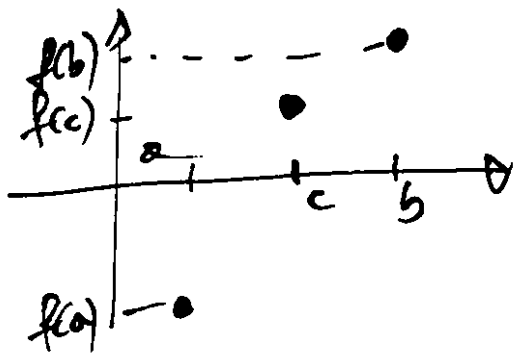


il grafico di f passa esattamente per il punto medio dell'intervallo. Questo è un caso molto fortunato, che può succedere però non possiamo contarci.

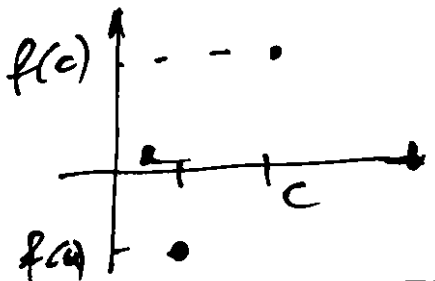
Se invece succedesse possiamo fermarci e prendere $\boxed{\bar{x} = c}$, che verifica le proprietà richieste dal teorema.

$$f(c) = f(\bar{x}) = 0 .$$

2) $f(c) > 0$



osserviamo che se concentriamo l'attenzione sull'intervallo $[a, c]$



La funzione è < 0 nell'estremo di sinistra

è > 0 . . . . destra.

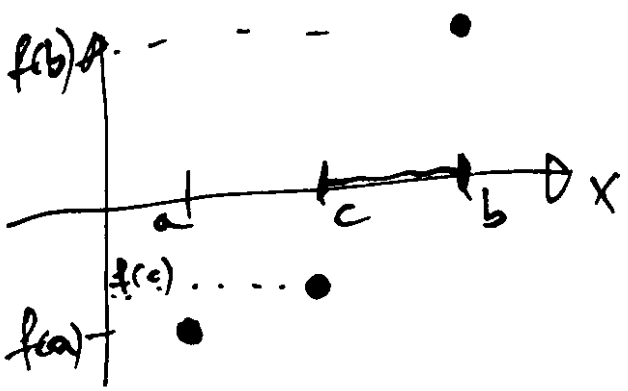
La stessa situazione che avevamo nell'intervallo di partenza $[a, b]$

Introduciamo la notazione

$$a_0 = a, \quad b_0 = b \qquad [a_0, b_0] = I_0$$

$$a_1 = a, \quad b_1 = c \qquad [a_1, b_1] = I_1$$

3) $f(c) < 0$



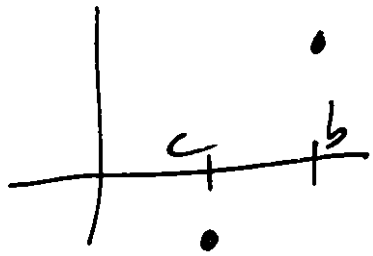
Concentriamo l'attenzione sulla seconda metà dell'intervallo:

$$[c, b]$$

Nell'estremo sinistro f è < 0

Nell'estremo destro f è > 0

La stessa situazione dell'intervallo iniziale



Introduciamo la notazione

$a_0 = a, \; b_0 = b \quad I_0 = [a_0, b_0] = [a, b]$
come prima

$a_1 = c, \; b_1 = b, \quad I_1 = [a_1, b_1] = [c, b]$

Sia nel caso 2. che nel caso 3. abbiamo ottenuto un sottointervallo I_1 che è una metà dell'intervallo di partenza e:

$$f(a_1) < 0, \quad f(b_1) > 0$$

Concentriamoci su $I_1 = [a_1, b_1]$.

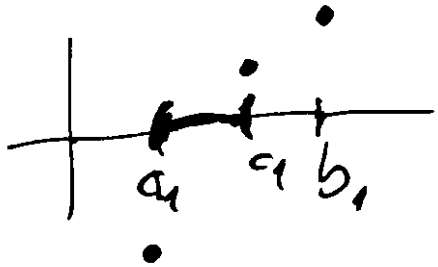
Troviamo il punto medio $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.

Chiediamoci qual è il segno di $f(c_1)$

tre casi:

1) $f(c_1) = 0$ FINE $\bar{x} = c_1$

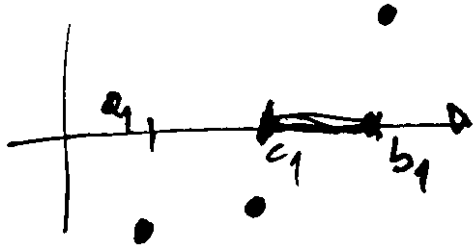
2) $f(c_1) > 0$



poniamo $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$ $I_2 = [a_2, b_2]$

c'è cambio di segno

3) $f(c_1) < 0$



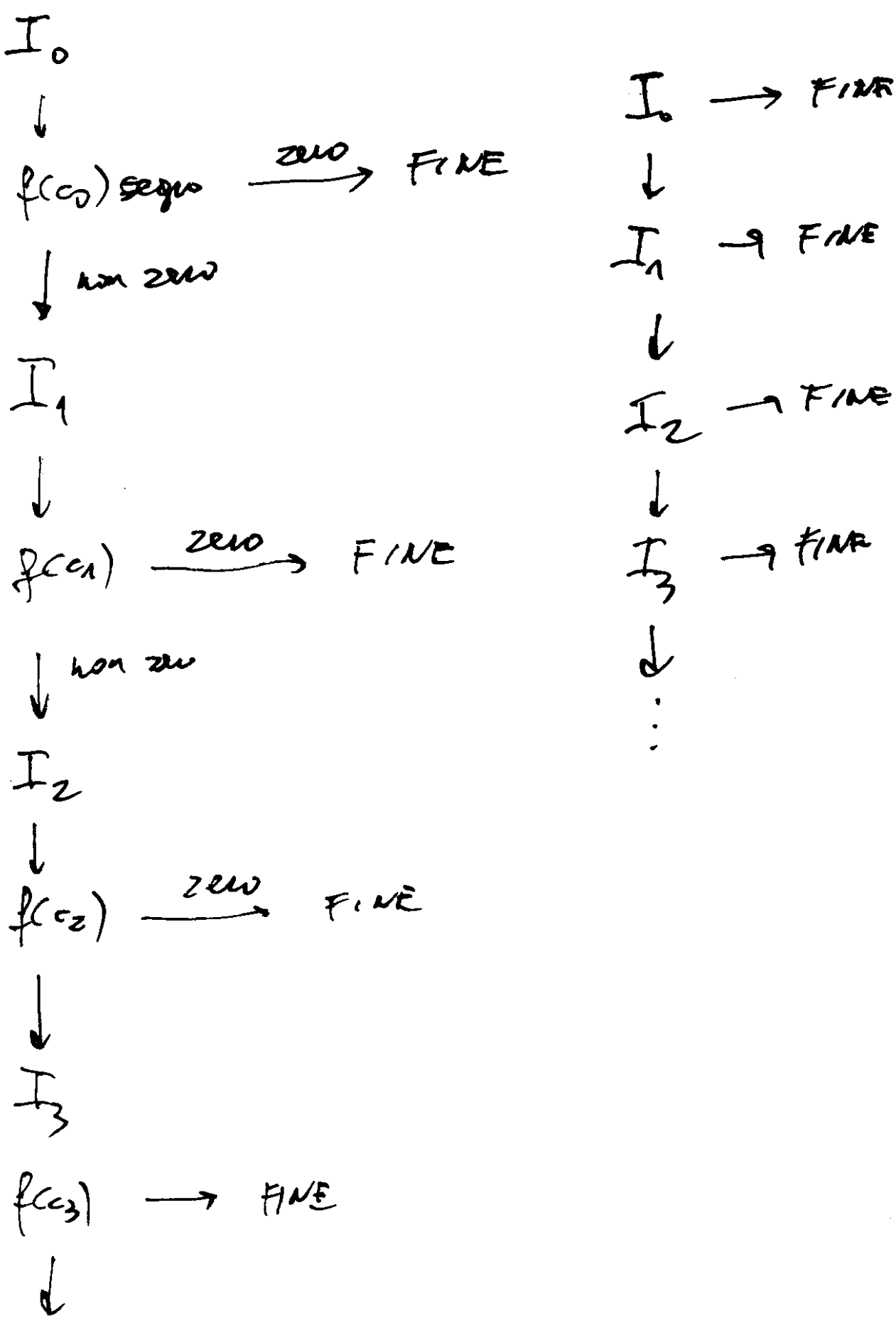
c'è cambio di segno nel secondo sotto intervallo

poniamo $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$, $I_2 = [a_2, b_2]$

Ripetiamo il procedimento considerando $[a_2, b_2]$, trovo il punto medio ecc.

ITERATIVO

Schema del procedimento



Ci sono due possibilità:

1) il procedimento esce dopo un numero finito di passi, che dà in output un c_n in cui $f(c_n)=0$.

2) il procedimento non esce mai.

Ve avanti all'infinito.

Può succedere, anzi, è la norma.

Nel caso 1 la proprietà dell'enunciato è vera.
Mettiamo ci nel caso 2, che è l'unico che richiede ancora dimostrazione.

$$I_0 = [a_0, b_0] \quad , \quad I_1 = [a_1, b_1], \dots$$

$$\dots \; I_n = [a_n, b_n], \dots$$

Abbiamo infiniti intervalli con le seguenti proprietà:

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$$

il precedente contiene il successivo.

La lunghezza degli intervalli si dimezza ad ogni passo

(lunghezza di I_0) $= b-a$

$$(\text{lunghezza di } I_1) = b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$$

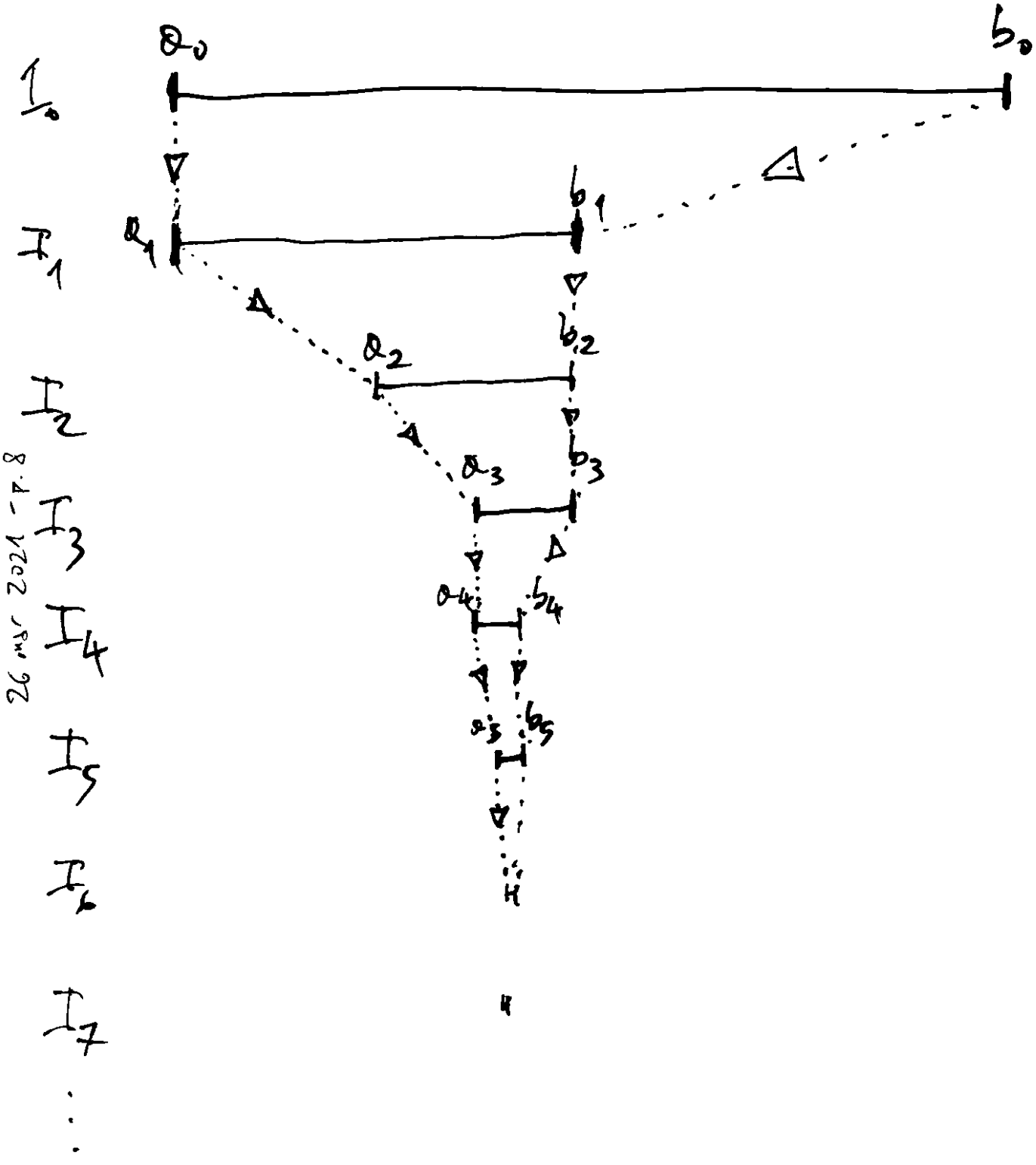
$$(\dots \text{ di } I_2) = b_2 - a_2 = \frac{b-a}{4}$$

$$\vdots$$

$$(\text{lunghezza di } I_n) = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0 \text{ per } n \to +\infty$$

$$\begin{cases} f(a_n) < 0 \\ f(b_n) > 0 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(cambio di segno della stessa tipologia di quella di partenza)



Osserviamo che in qui caso

$$a_0 \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le \dots$$

cioè la successione (a_n) è debolmente crescente.

In ogni caso

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$$

cioè la successione dei b_n è debolmente decrescente

Ricordiamo il teorema sulle successioni monotone: hanno sempre limite (questo uso il fatto che lavoriamo in $\mathbb{R}$, sarebbe falso in $\mathbb{Q}$)

Esistono $\lim_{n\to+\infty} a_n =: \bar{a}$

$\lim_{n\to+\infty} b_n =: \bar{b}$

Inoltre, poiché $a \leq a_n \leq b_n \leq b$ $\forall n$ passando al limite le disuguaglianze si conservano:

$$a \leq a_n \leq b_n \leq b$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$a \leq \bar{a} \leq \bar{b} \leq b$$

Questo ci garantisce che $\bar{a}$, $\bar{b}$ sono finiti.

(il teorema delle succ. monotone garantisce esistenza, non finitezza)

In realtà $\bar{a} = \bar{b}$.

Infatti, sapendo che la lunghezza dell'intervallo

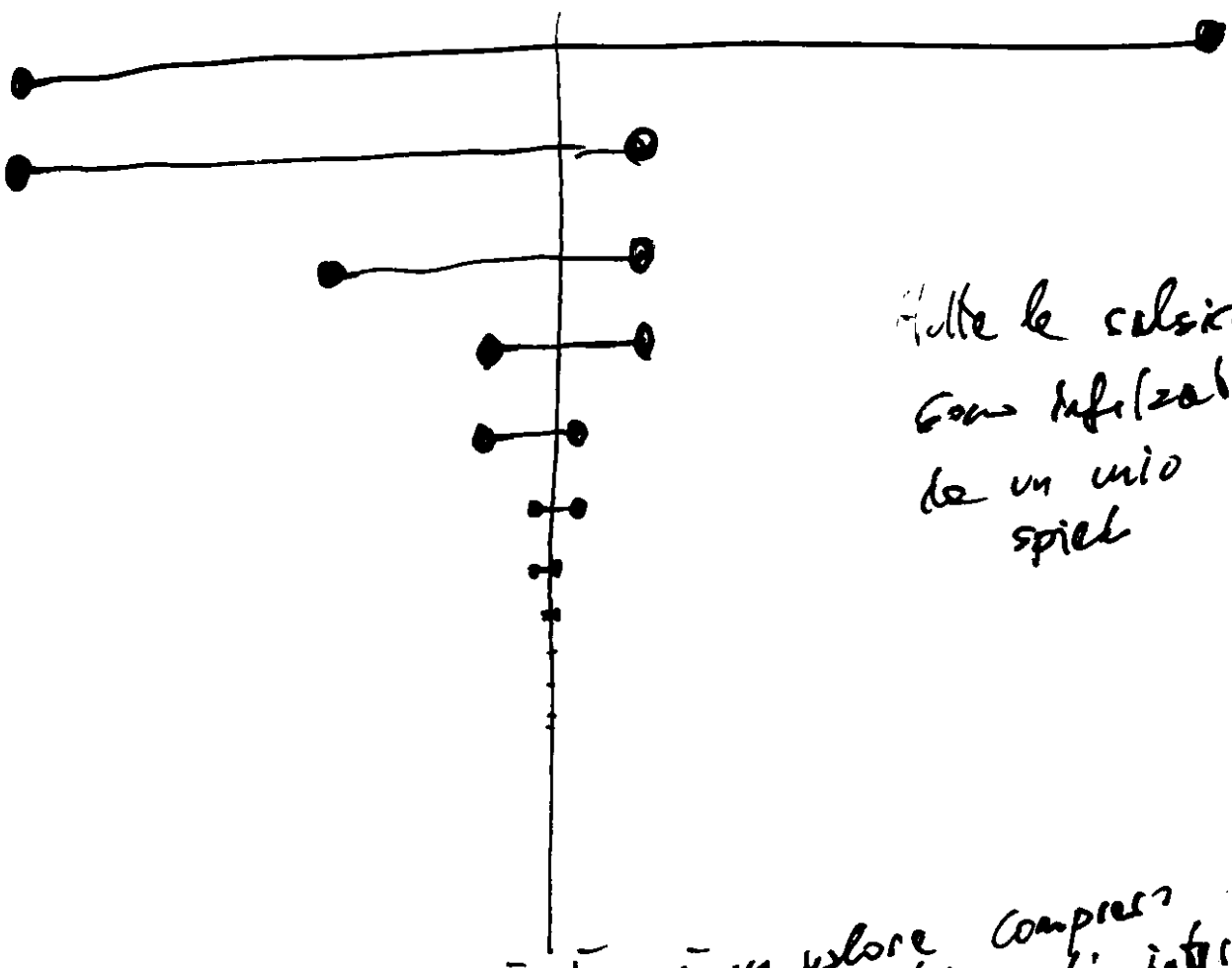
$I_n = [a_n, b_n]$ tende a $\bar{\ell}$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

passando al limite $\quad$ quasi ovunque

$$\bar{b} - \bar{a} = 0$$

da cui $\bar{b} = \bar{a}$



Tutte le calcite come infinite da un unico punto

$\bar{c} = \bar{b}$ è un valore compreso in tutti gli intervalli

Siamo in direzione d'arrivo:

Ripeschiamo il cambio di segno:

$$\begin{cases} f(a_n) < 0 & \forall n \\ f(b_n) > 0 & \forall n \end{cases}$$

$= \lim_{n \to +\infty} f(a_n)$? Esiste?

Sì, perché la funzione f è continua

$$= f\left(\lim_{n \to +\infty} a_n \right) = f(\bar{a})$$

D'altra parte

$$f(a_n) < 0$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$f(\bar{a}) \leq 0$$

passo al limite la disug. si indebolisce

$= \lim_{n\to+\infty} f(b_n)$ esiste? Sì ...

$= f\left(\lim_{n\to+\infty} b_n\right) = f(\bar b)$

D'altra parte

$f(b_n) > 0 \quad \forall n$

passando al limite la disug. si indebolisce

$f(\bar b) \geq 0$

mettiamo insieme

$\bar a = \bar b$

$f(\bar a) \leq 0$

$f(\bar b) \geq 0$

otteniamo che

$0 \leq f(\bar b) = f(\bar a) \leq 0$

conclusione $f(\bar a) = f(\bar b) = 0$

Possiamo prendere $\bar x = \bar a = \bar b$

Questo è uno zero della funzione. CVD

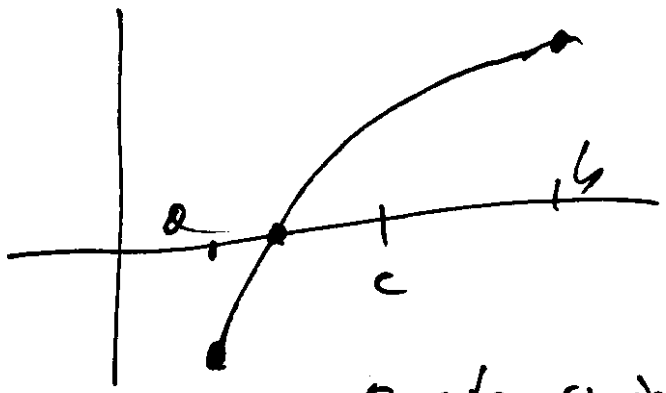
26 mar 2021 – 7.13

Attenzione ai tranelli

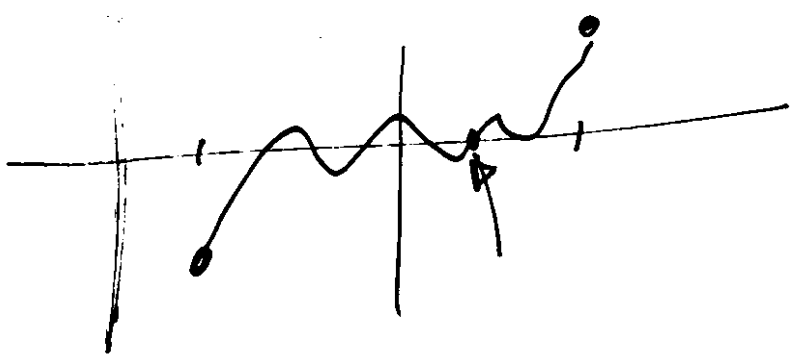
1) non confondere $\frac{b-a}{2}$ con $\frac{a+b}{2}$
semilunghezza punto medio

2) la scelta del sottointervallo ad ogni passo dipende dal segno di $f(c_n)$
non di c_n

3) La scelta del sottointervallo viene fatta ~~da~~ dam in base a ~~dove sta lo zero~~



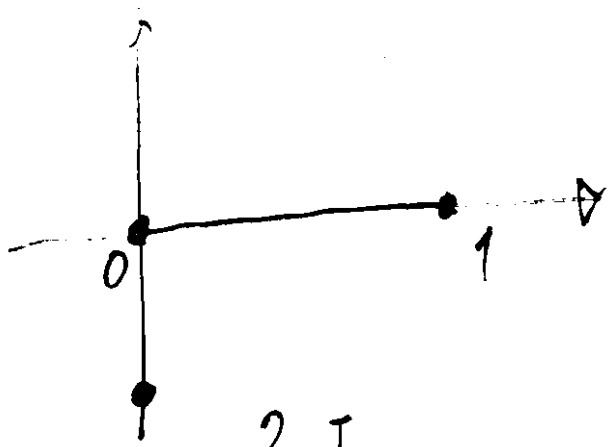
Non va bene. Questo ragionamento presuppone che lo zero $\bar{x}$ esista, anzi, che si sappia dove quello si trova.
Non si può fare per sconosciuto che esista



Questo ha senso se ~~sono~~ ho lo zero già in mano

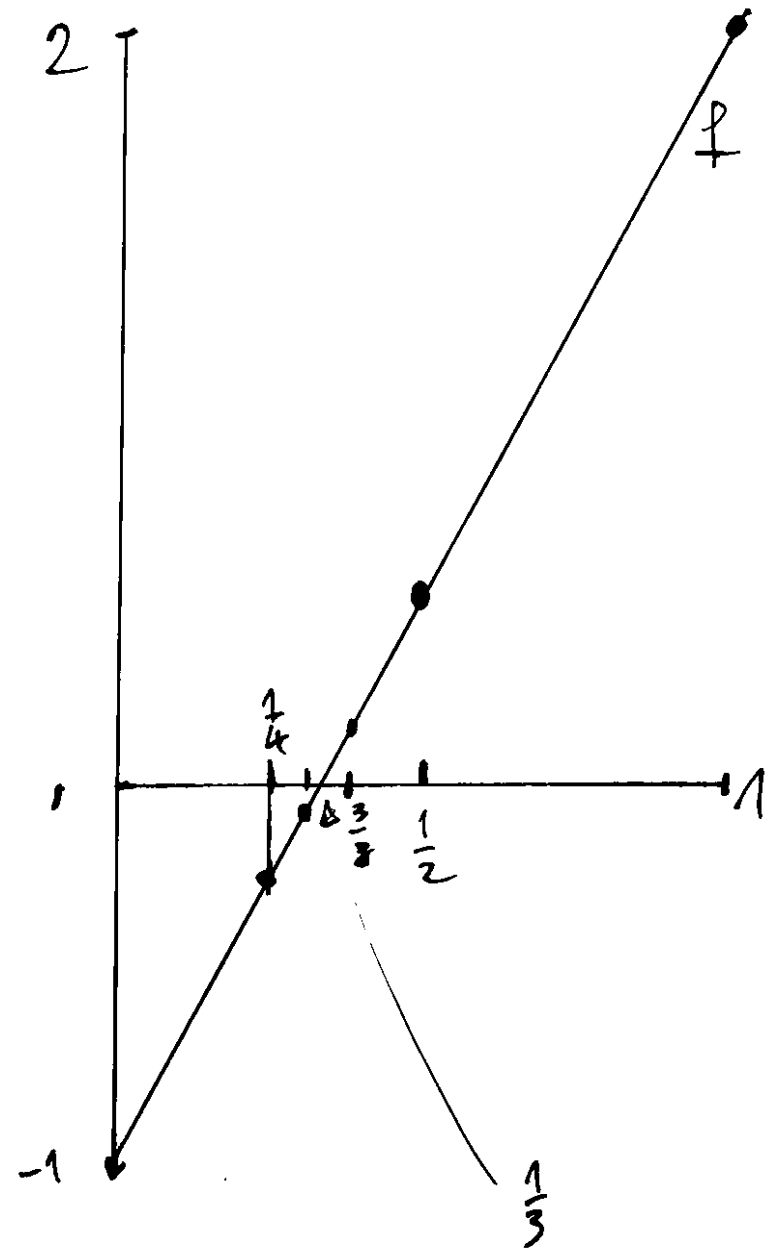
4) essere convinti che il procedimento di bisezione terminerà in un numero finito di passi.

Può non succedere, anche in situazioni molto semplici.



$f(x) = 3x - 1$

$[a,b] = [0,1]$



La bisezione non termina mai

Guardiamo come sono fatti i punti medi

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{3}{8}$$

$$c_3 = \frac{5}{16} \ldots$$

Si nota una regolarità?

Denominatori: sono le potenze di 2

i numeratori sono numeri interi

Può succedere che a un certo momento dell'iterazione uno di questi sia lo zero cercato?

$$c_n = \frac{1}{3} ?$$

$$\frac{\text{intero}}{2^n} = \frac{1}{3} ?$$

Impossibile

Dividendo 2^n per suoi fattori non otteniamo mai 3

3 non è un fattore primo di 2^n.

"alla fine trovo lo zero"

La fine non c'è

Il teorema in linea di principio richiede una quantità infinita di calcoli.

Non è un algoritmo.

Però possiamo trasformarlo in un algoritmo di approssimazione.

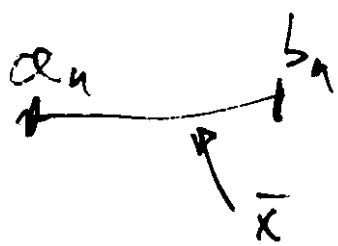
Fissiamo un intorno di quanto vogliamo avvicinarci allo zero, per esempio a meno di 10^{-10},

Basterà terminare la bisezione quando l'intervallo $[a_n, b_n]$ ha lunghezza

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} < 10^{-10}$$

Il numero di passi è prevedibile in anticipo.

a_n e b_n approssimano lo zero a meno di 10^{-n}



Così è un vero algoritmo, che è usabile in pratica. Esistono metodi più veloci per funzioni che hanno più proprietà della sola continuità.

TEOREMA DELL'ESISTENZA DEGLI ZERI

Teorema Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segno opposto.
Allora esiste $\bar{x} \in [a,b]$ tale che

$$f(\bar{x}) = 0.$$

Esempio $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+3x-2}$ su $[0,1]$

f è continua sul dominio.

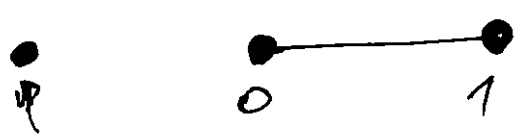
$$f(0) = \frac{1}{-2} < 0, \qquad f(1) = \frac{1}{2+3-2} = \frac{1}{3} > 0$$

Stando il teorema dovrebbe annullarsi in un punto intermedio. Quale?
Questa f non si annulla mai.
Come lo vediamo col teorema?
Variante: $g(x) = \dfrac{x+1}{2x^2+3x-2}$ $[0,1]$

g è continua sul dominio

$$g(0) = \frac{1}{-2} < 0, \qquad g(1) = \frac{2}{2+3-2} > 0$$

Dove si annulla? $g(x) = 0 \iff x+1 = 0 \iff x = -1$



Però è fuori

Troviamo il dominio di $f + g$

$$2x^2 + 3x - 2 \neq 0$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

$$x = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -2 \end{cases}$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}, -2 \right\}$$

$\frac{1}{2}$ è fuori dal dominio di f e di g

Possiamo scrivere $f : [0,1] \to \mathbb{R}$?

(NO)!!! In $\frac{1}{2}$ non è definita

$f : [0,1] \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \to \mathbb{R}$ è continua però non possiamo applicargli il teorema

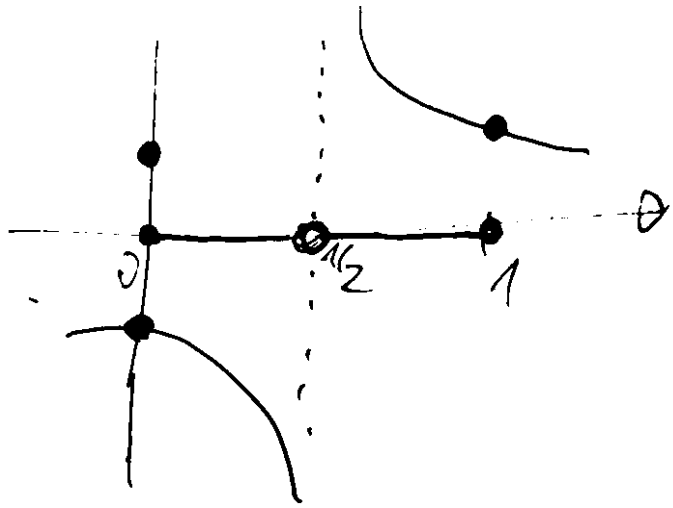
Per il teorema è essenziale che il dominio sia fatto un intervallo.

Ricordiamoci che un INTERVALLO è un insieme di numeri reali senza lacune

$[0,1] \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ è un insieme che ha una lacuna

È sufficiente una lacuna per far crollare il teorema

Quando si vuole applicare il teorema dell'esistenza degli zeri è necessario controllare che il dominio sia tutto l'intervallo

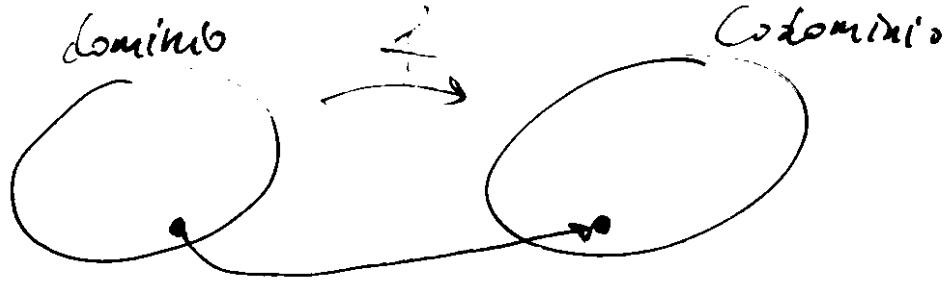


$$f(x) = \frac{1}{2x^2+3x-2}$$

Non ci devono essere lacune nel dominio se si vuole applicare il teorema

PASSIAMO AL CODOMINIO

in astratto

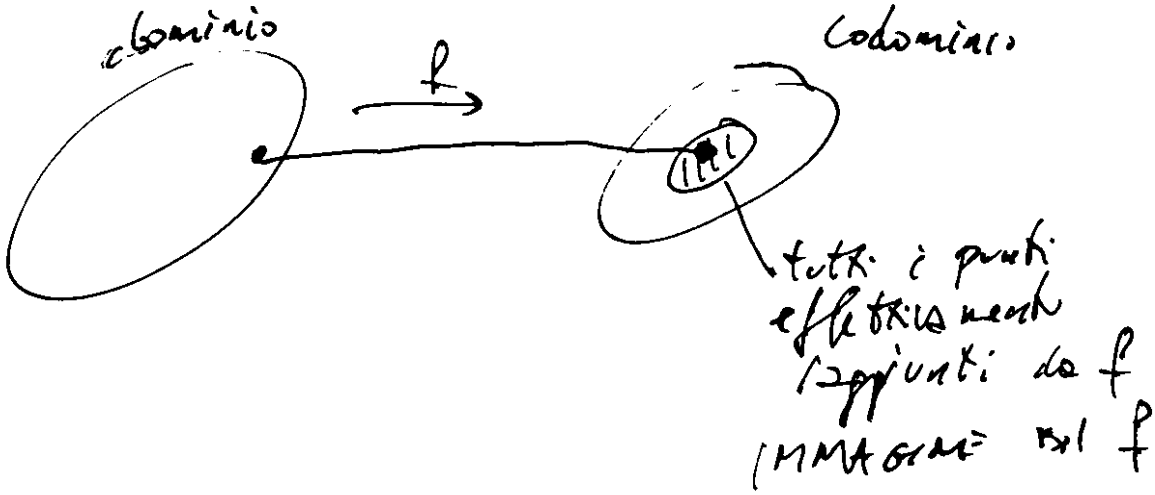


f : dominio $\longrightarrow$ codominio

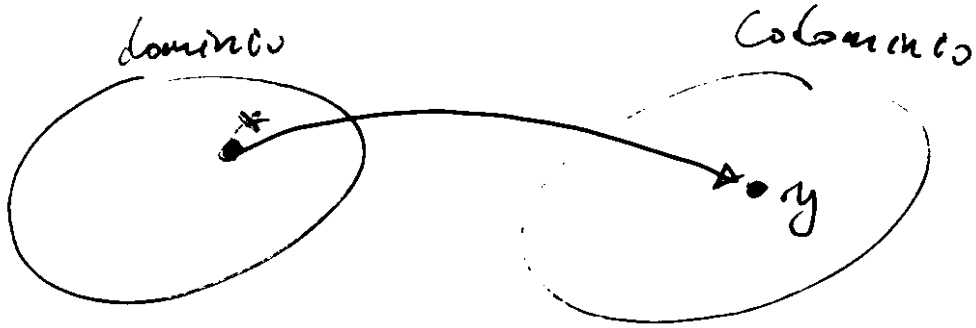
Nella definizione di funzione non è richiesto che tutti i punti del codominio siano raggiunti da una freccia

quando questo succede la funzione è chiamata **suriettiva**.

Introduce il concetto di IMMAGINE della funzione (RANGE).



$$\text{Immagine}(f) = \{ y \in \text{codominio} \mid \exists x \in \text{dominio tale che } f(x) = y \}$$



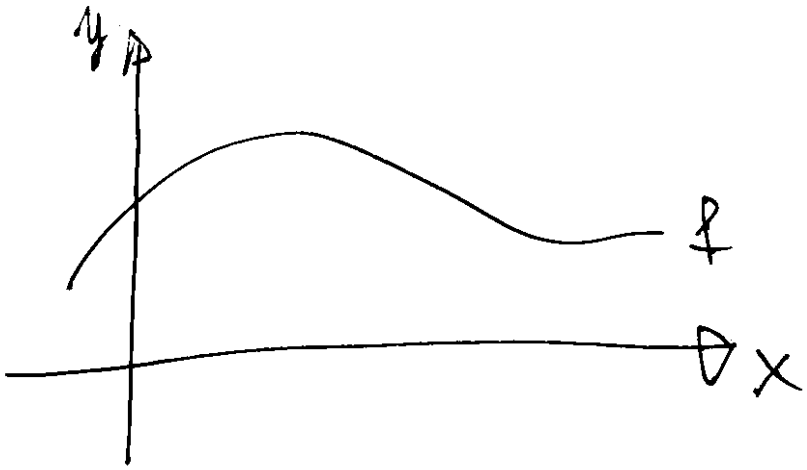
$\exists x$ tale che $f(x) = y$?

Se sì, $y \in$ immagine

Se no, $y \notin$ immagine

Il valore di x non è importante per l'immagine, basta che esista.

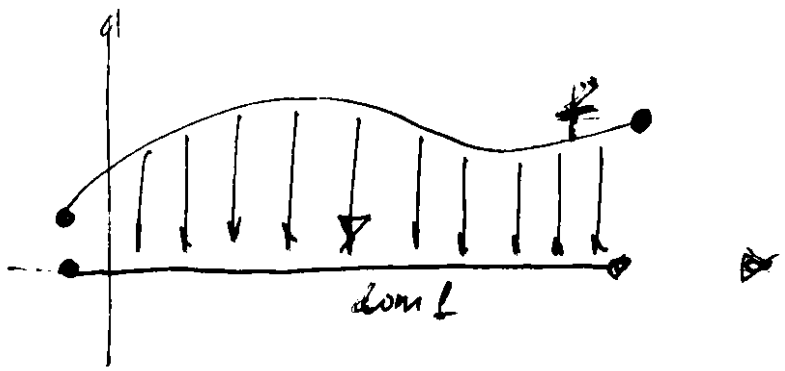
Caso di funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che ci interessa in questo corso.



Abbiamo il GRAFICO della funzione

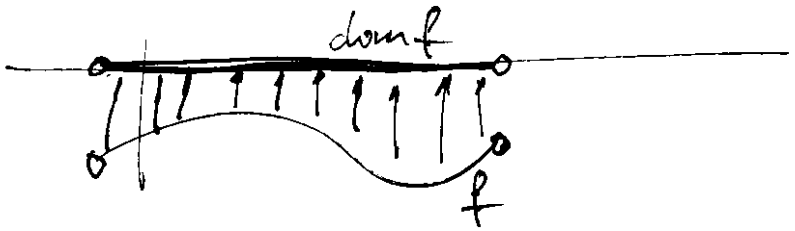
Se conosco il grafico, come trovo dominio e immagine?

Regola semplice intuitiva



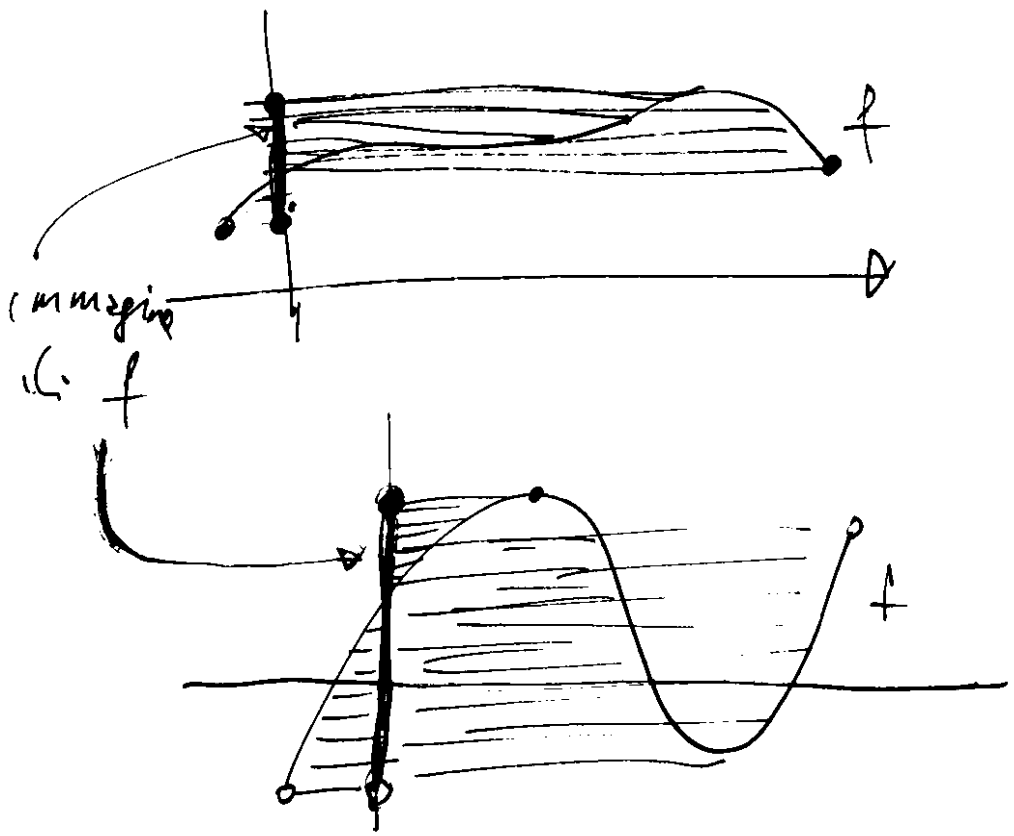
Si fa ~~piovere~~ piovere il grafico in verticale sull'asse x

La parte dell'asse x ricoperta dalla pioggia è il dominio



29 mar 2021 p-6

Per trovare l'immagine dato il grafico, basta fare ruotare di orizzontale il grafico rispetto l'asse y



Teorema dei valori intermedi

1° enunciato Se I è un intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$ è continua, allora l'immagine di f è ancora un intervallo.

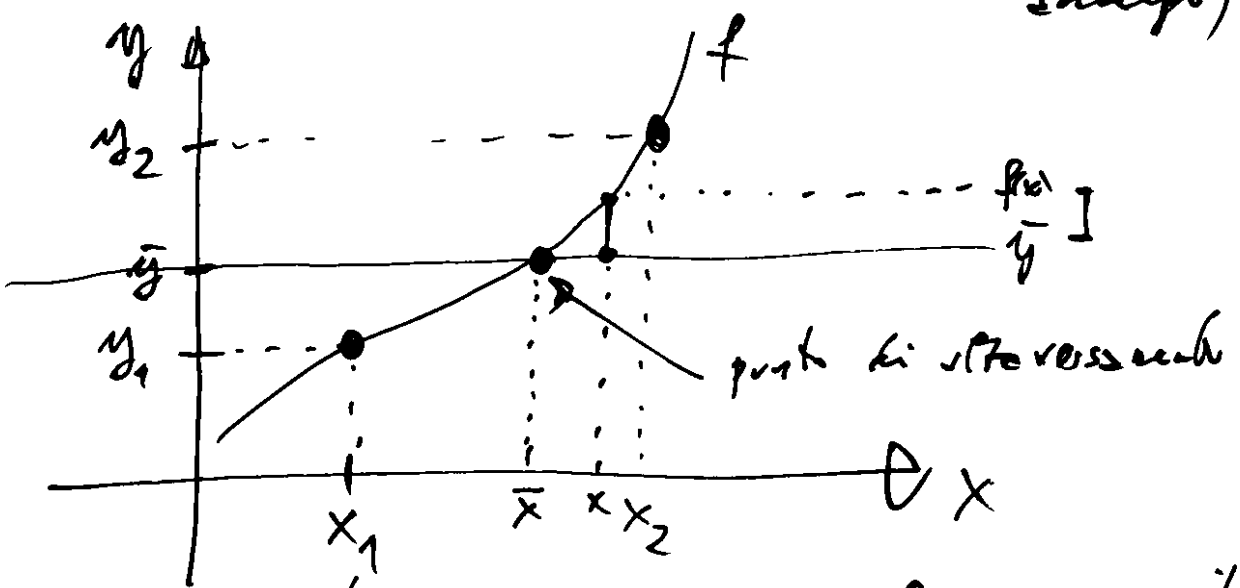
2° enunciato Le funzioni continue mandano intervalli in intervalli.

3° enunciato Se f è una funzione continua su un intervallo, ogniqualvolta assume due valori, assume anche tutti i valori intermedi.

29 mar 2021 - p. 7

Dimostrazione del 3° enunciato.

Sia I un intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua.
Supponiamo che assuma due valori y_1, y_2
prendiamo un valore intermedio $\bar{y}$ fra i due.
Vogliamo dimostrare che f assume anche $\bar{y}$.
Per fissare le idee supponiamo che $y_1 < \bar{y} < y_2$
Sappiamo che y_1 e y_2 sono assunti,
cioè che sono valori della funzione,
cioè che esistono $x_1, x_2 \in I$ tali
che $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$.
Supponiamo che $x_1 < x_2$ (l'altro caso è analogo)



Formalmente: prendiamo una funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \bar{y}$$

$\mathrm{dom}\, g = \mathrm{dom}\, f = I$
g è continua perché f è continua e $\bar{y}$ è costante.

Consideriamo l'intervallo $[x_1, x_2]$

g è definita su tutto $[x_1, x_2]$

$$g(x_1) = \underbrace{f(x_1)}_{y_1} - \bar{y} = y_1 - \bar{y} < 0$$

$$g(x_2) = \underbrace{f(x_2)}_{y_2} - \bar{y} = y_2 - \bar{y} > 0$$

I valori di g agli estremi di $[x_1, x_2]$ hanno segno opposto.
Per il teorema dell'esistenza degli zeri deve esistere un $\bar{x} \in [x_1, x_2]$ tale che

$$g(\bar{x}) = 0$$

$$\| $$

$$f(\bar{x}) - \bar{y}$$

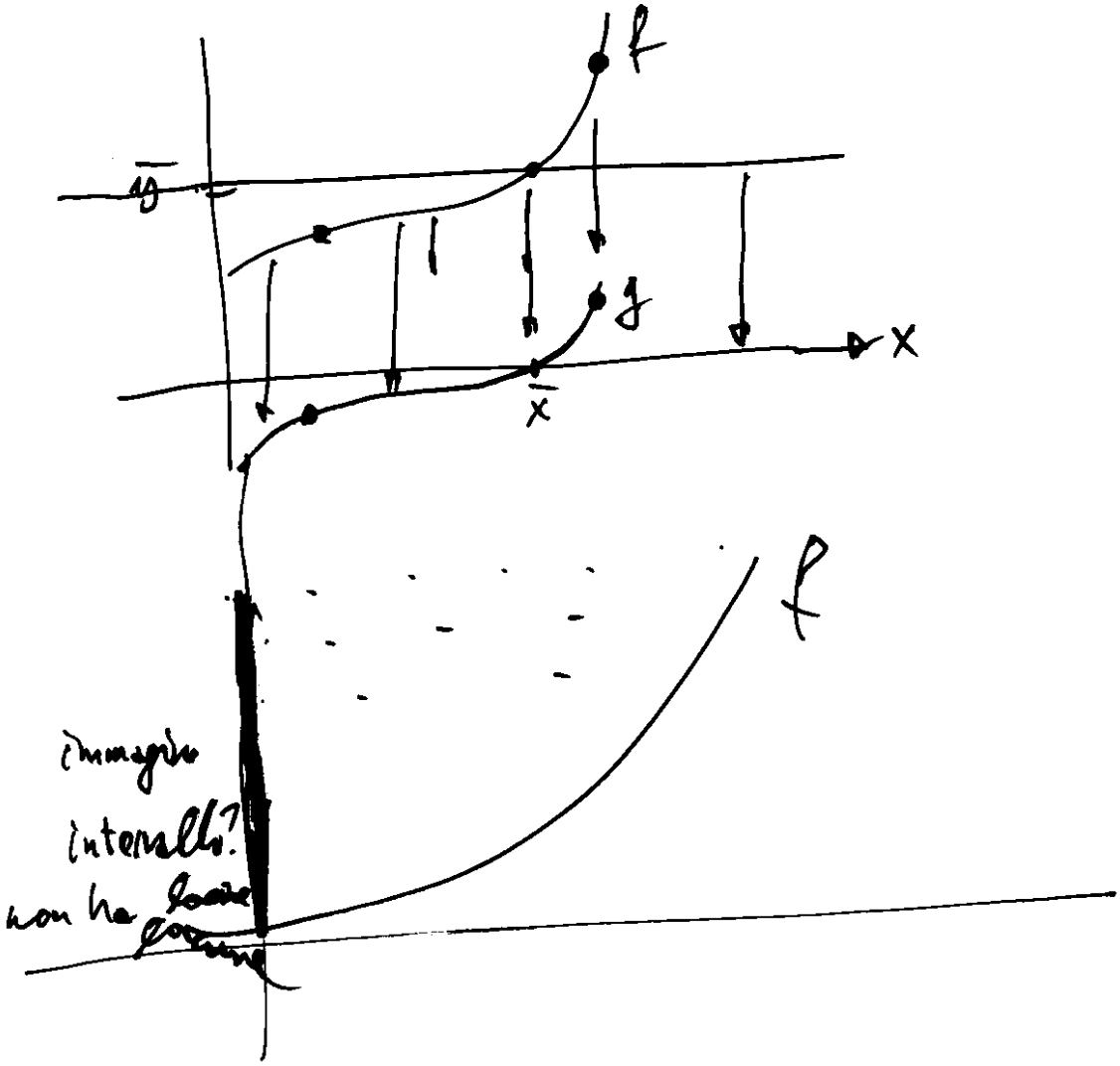
quindi $f(\bar{x}) - \bar{y} = 0$ cioè

$$f(\bar{x}) = \bar{y},$$

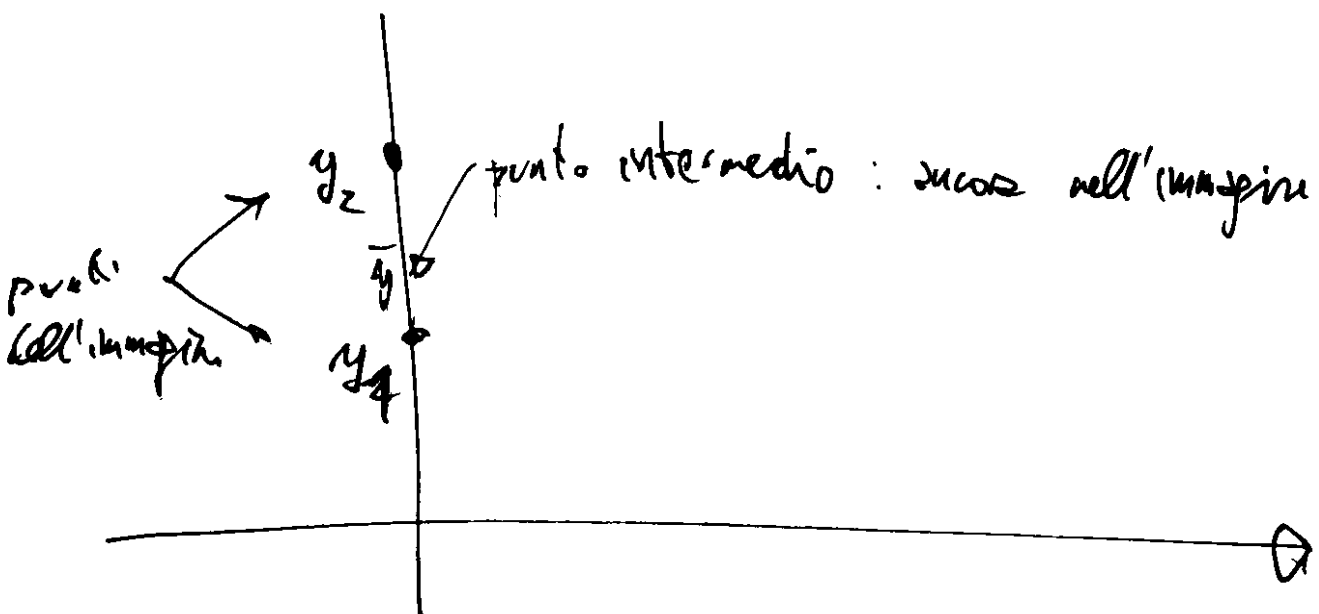
cioè $\bar{y}$ è un valore assunto dalla funzione. cvd

<u>OSS</u> Il grafico di g si ottiene dal grafico di f traslandolo in verticale fino a quando la retta $y = \bar{y}$ non coincide con l'asse x.

29 mar 2021 - p. 9



l'<u>immagine</u> di una funzione è anche l'<u>insieme dei valori assunti</u> dalla funzione



Un insieme di numeri reali non ha buchi se ogniqualvolta ho due punti dell'insieme, tutti i punti intermedi sono ancora nell'insieme

Successioni monotone:

$a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$: def. crescente

.

.

.

Funzioni monotone

Definizione Una funzione f si dice

1) strettamente crescente se

$\forall x_1, x_2 \in \text{dom } f \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

2) debolmente crescente se

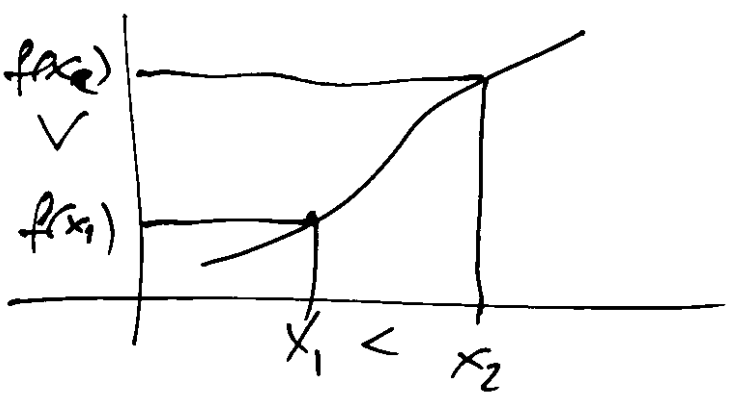
$\forall x_1, x_2 \in \text{dom } f \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

3) strettamente decrescente se

$\forall x_1, x_2 \in \text{dom } f \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

4) debolmente decrescente se

$\forall x_1, x_2 \in \text{dom } f \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$



crescenti:

$x_1 \neq x_2$

$f(x_1) \neq f(x_2)$

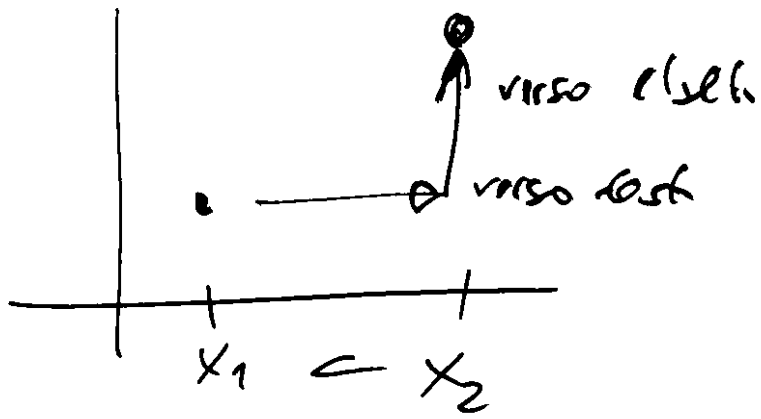
sono nello stesso ordine

Le funzioni crescenti in termini insiemistici conservano l'ordine

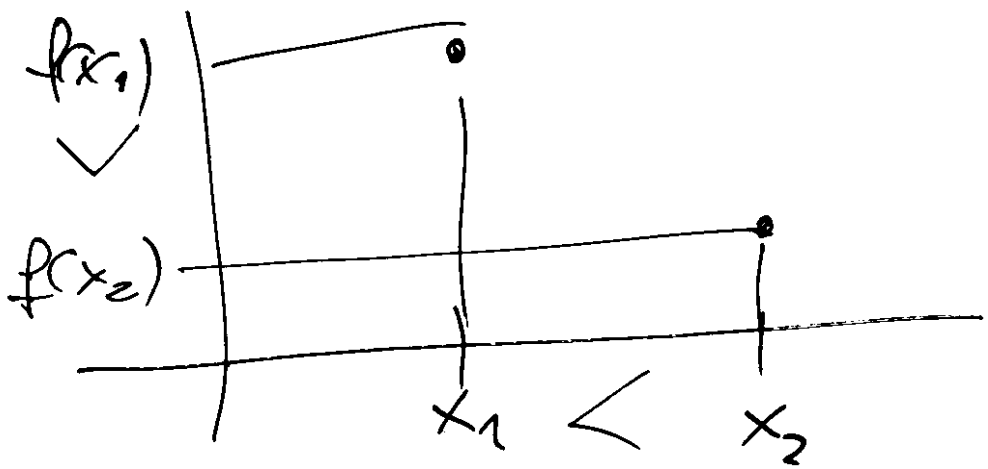
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

str. — lab.

ordine in partenza — ordine in arrivo



DECRESCENTE



$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

str. — lab.

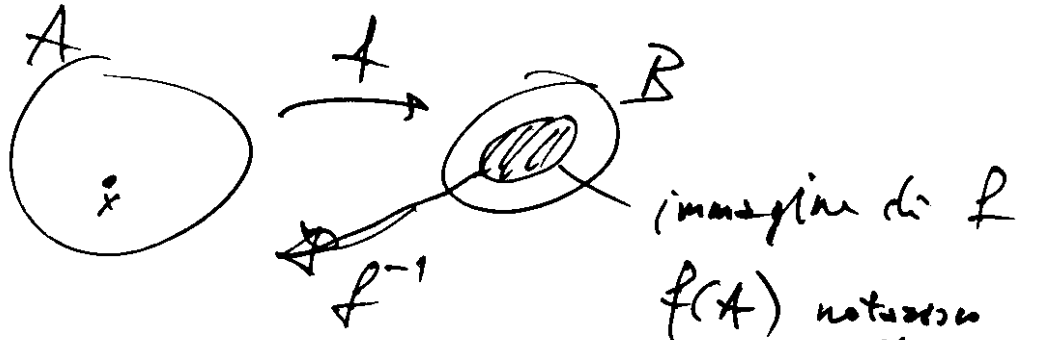
Le funzioni decrescenti invertono l'ordine

Esempio ~~$f(x)=x$~~ $f(x)=\frac{1}{x}$ sugli $x>0$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$$

Una funzione si dice MONOTONA se è o crescente o decrescente (debolmente o strettamente)

Una funzione è INVERTIBILE se è INIETTIVA (in questo corso non richiediamo che sia anche SURIETTIVA)



$$f^{-1}: f(A) \to A$$

29 mar 2021 T. 13

Teorema sull'invertibilità di funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$,
$f: I \to \mathbb{R}$ una funzione.
Allora si equivalgono le tre condizioni seguenti

1) f è strettamente monotona e continua
2) f è continua e invertibile (cioè iniettiva)
3) f è strettamente monotona e l'immagine di f è un intervallo.

Inoltre, se queste condizioni sono verificate
la funzione inversa di f è anch'essa continua
ed è strettamente monotona
dello stesso tipo di f.

f str. cresc $\Longrightarrow$ f^{-1} è str. cresc.

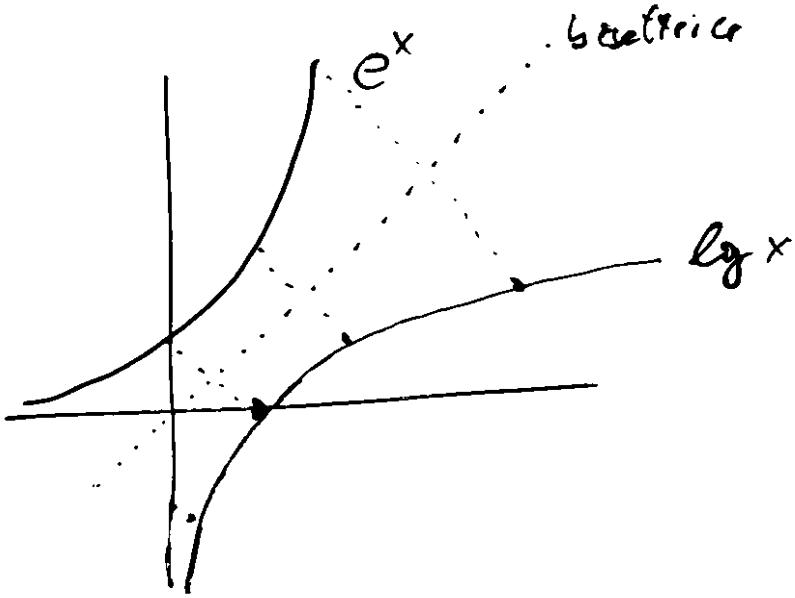
f str. decr. $\Longrightarrow$ f^{-1} è str. decr.

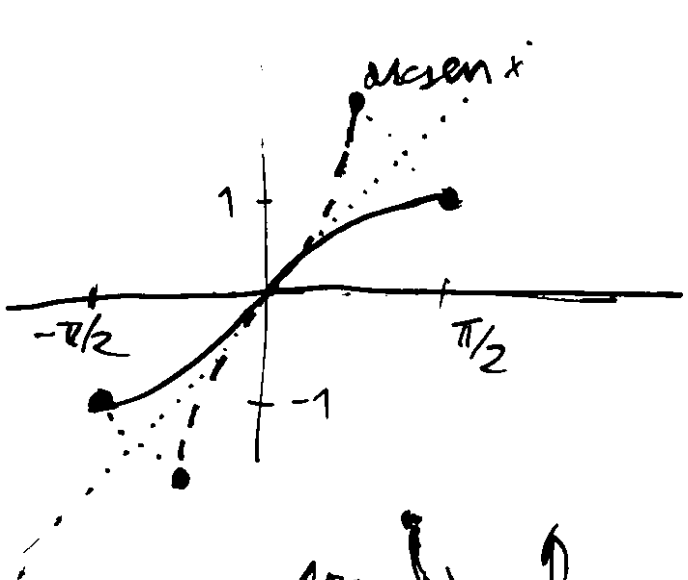
Morale: per le funzioni continue su intervalli
invertibilità equivale a monotonia stretta,
e l'inversa è anch'essa continua.

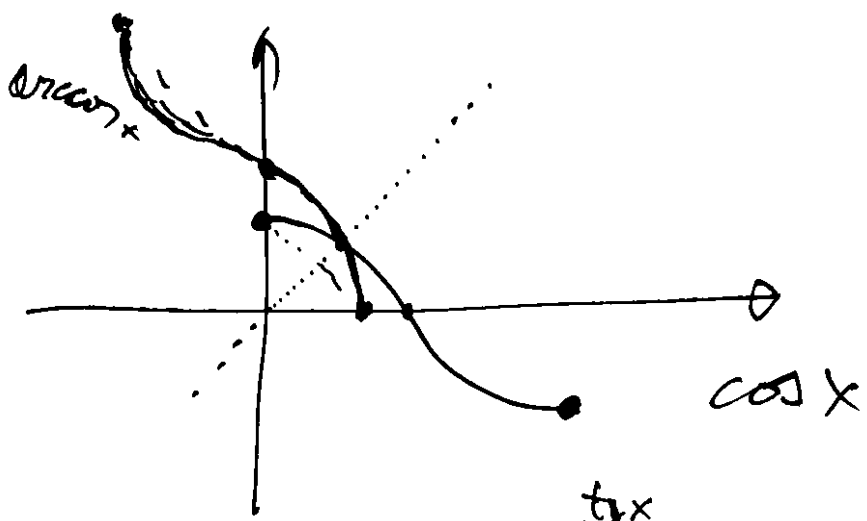
L'inverso di una funzione continua è
anch'esso continua.

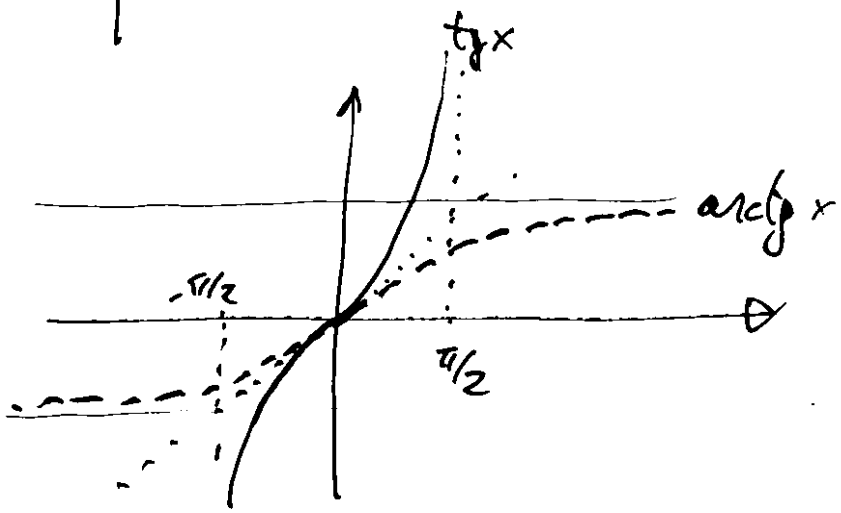
Funzioni inverse notevoli

29 mar 2021 - p. 14









29 mar 2021 - p. 15

Teorema di Weierstrass sui massimi e minimi

Premesse: applichiamo già il concetto di massimo o minimo di un insieme di numeri, cioè il numero più grande o più piccolo dell'insieme (se esiste).

Per una funzione le cose si complicano

$f : A \to \mathbb{R} \qquad A \subseteq \mathbb{R}$

possiamo considerare l'insieme dei valori assunti da f, cioè l'immagine di f che indichiamo con $f(A)$.

Questo è un insieme di numeri reali, e quindi ha senso parlare di massimo o minimo di $f(A)$.

$\max f(A)$, $\min f(A)$

Questo si chiamerà anche <u>valore massimo</u> > <u>minimo assoluto</u> di f

Spesso non ci interessa solo il valore assunto, ma anche <u>dove</u> è assunto.

La terminologia si complica e si fa facilmente confusione

x	$f(x)$	
0	1	
1	2	← valore massimo
2	0	
3	-1	← valore minimo

punto di max → 1

punto di min → 3

$A = \{0, 1, 2, 3\}$

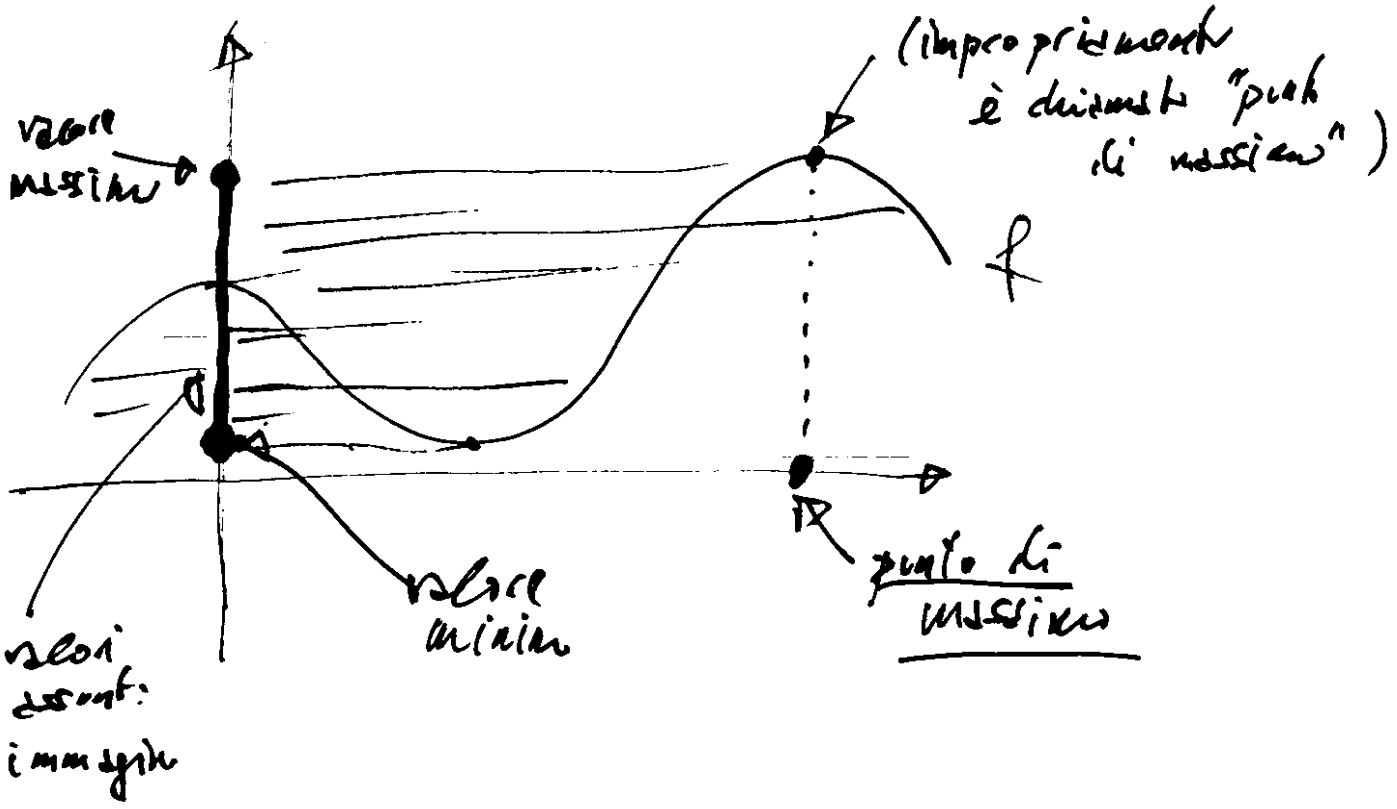
$f : A \to \mathbb{R}$

$\max f(A) = \max\{1, 2, 0, -1\} = 2$

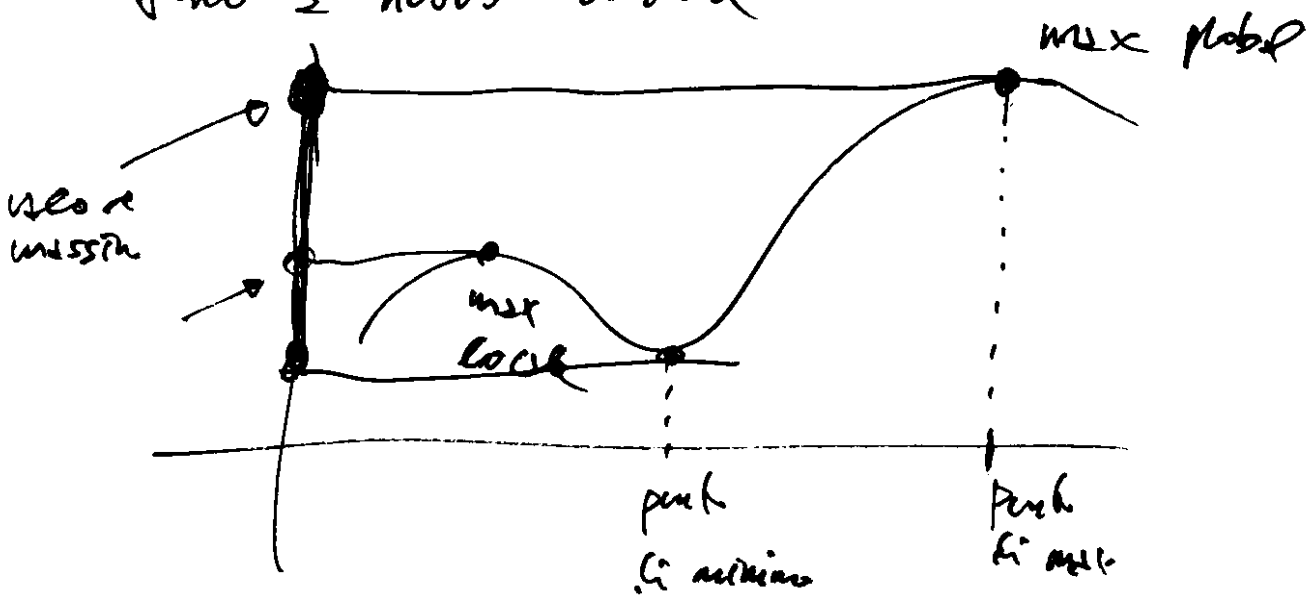
$\min f(A) = \min\{1, 2, 0, -1\} = -1$

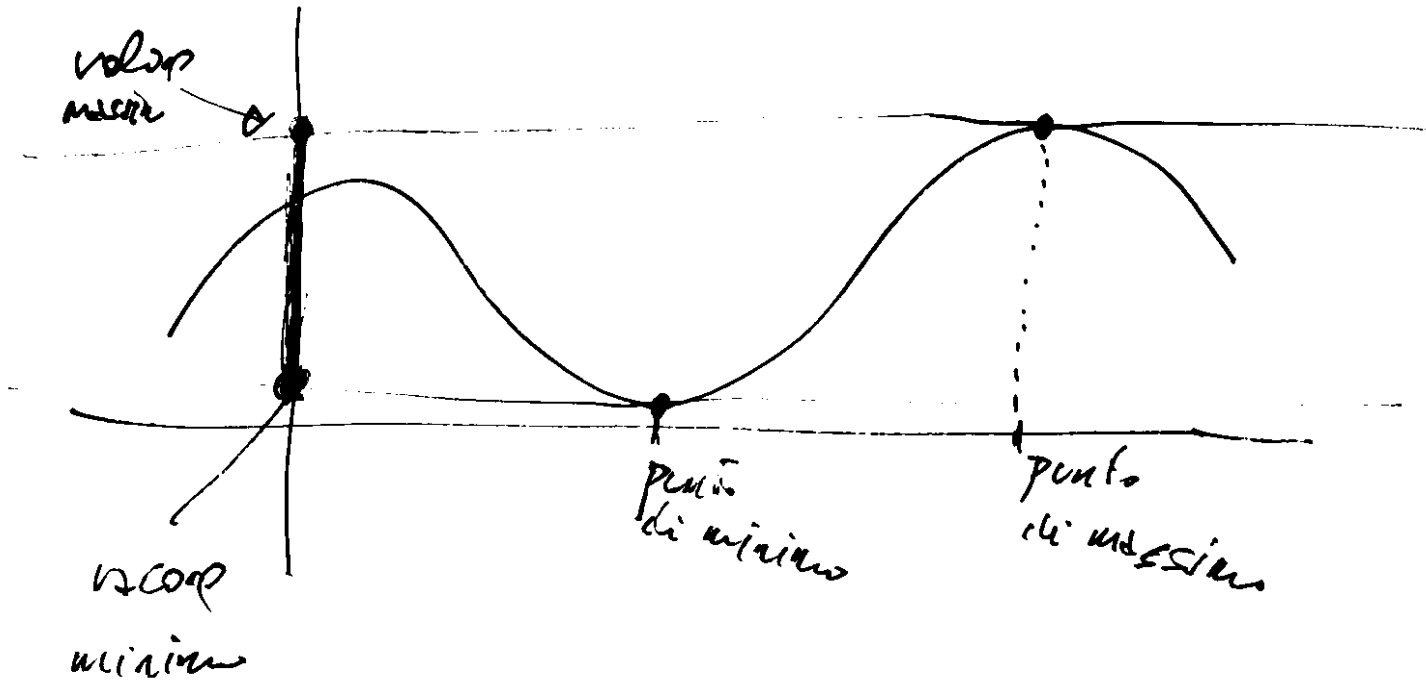
Def Un punto di massimo per una funzione f è un ~~valore~~ punto del dominio in cui la funzione assume valore massimo.

Un punto di minimo è un punto del dominio in cui la f assume valore minimo.

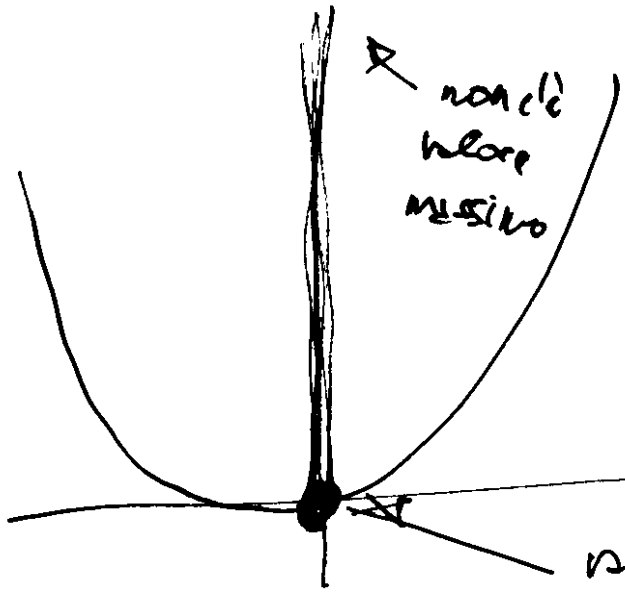


Questo concetto di massimo e minimo di funzione è GLOBALE. Sarà sottinteso fino a nuovo ordine



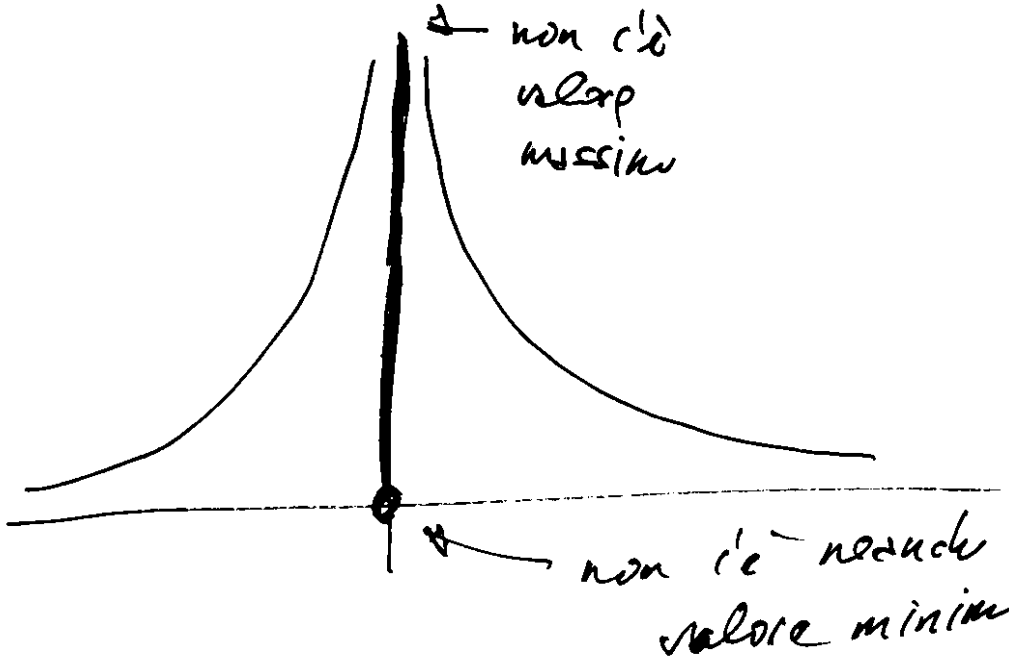


29 mar 2021 p. 18



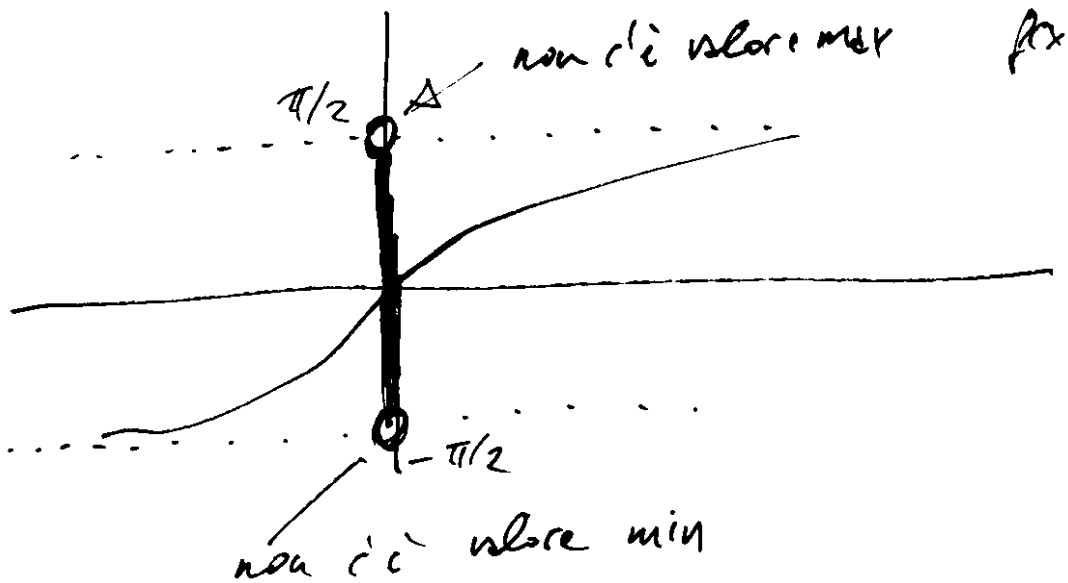
$f(x) = x^2$

$\text{dom } f = \mathbb{R}$



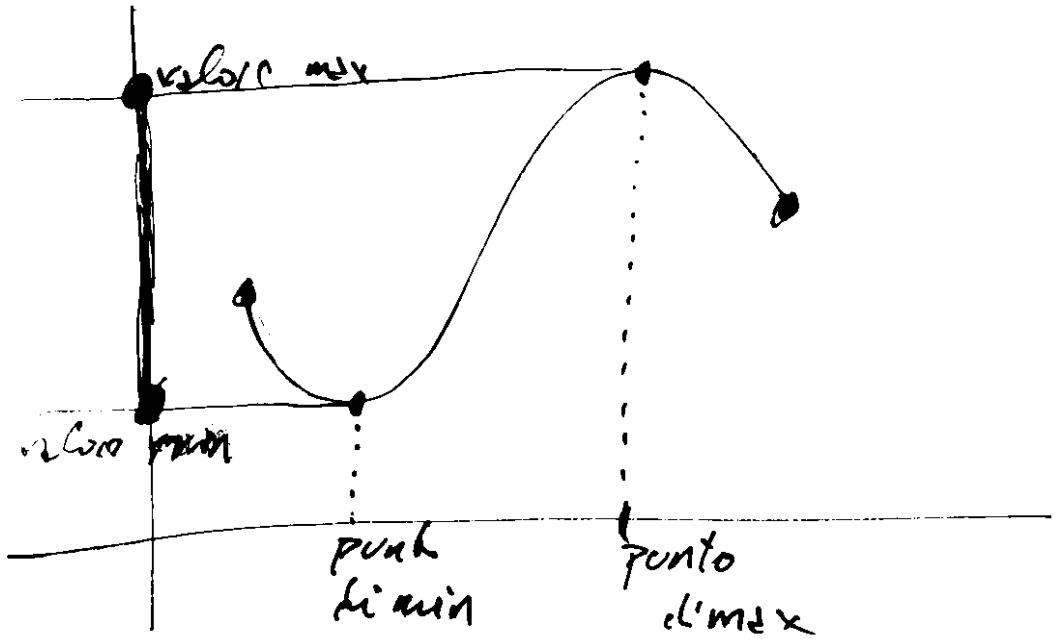
$f(x) = \frac{1}{x^2}$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$f(x) = \text{arctg } x$

29 mar 2021 - p 19



IL TEOREMA DI WEIERSTRASS SUI MASSIMI E MINIMI DIMOSTRATO CON BISEZIONE

Teorema Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua sull'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$.

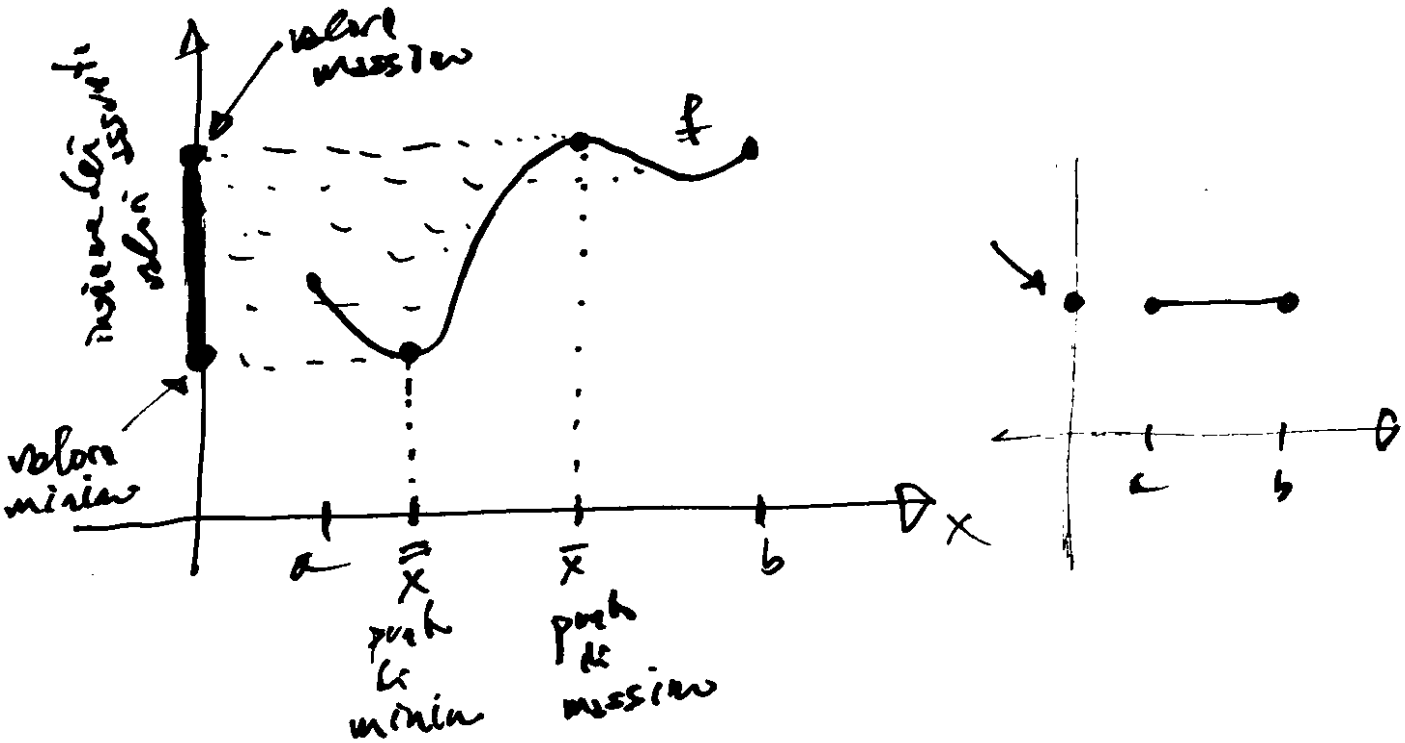
Allora l'insieme dei valori assunti da f ha massimo e minimo.

In altre parole, esistono $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in [a,b]$ tali che $\forall x \in [a,b]$

$$f(\bar{\bar{x}}) \le f(x) \le f(\bar{x})$$

- $f(\bar{\bar{x}})$: valore minimo
- $f(x)$: tutti gli altri valori
- $f(\bar{x})$: valore massimo

- $\bar{\bar{x}}$: punto di minimo
- $\bar{x}$: punto di massimo



Dimostrazione L'insieme dei valori assunti si indica con $f([a,b]) = \{ f(x) \mid x \in [a,b] \}$ (sottinsieme dell'asse y)

Ci accorgiamo solo del massimo, perché il minimo è analogo.

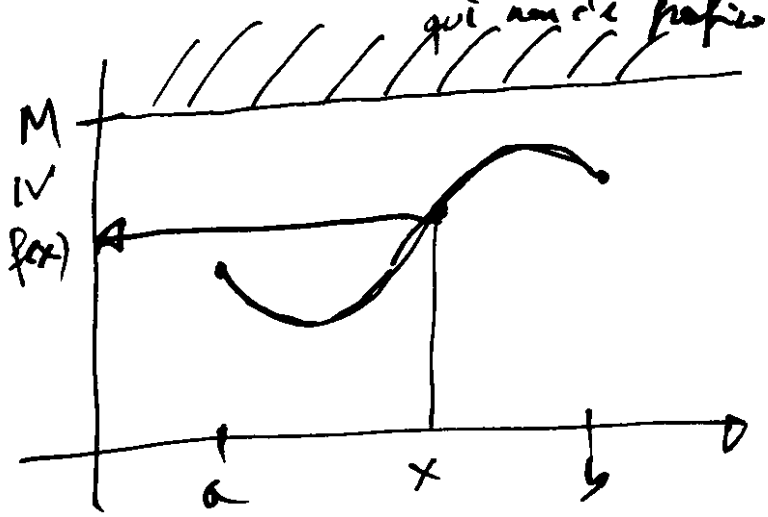
$f([a,b])$ è un sottinsieme di $\mathbb{R}$. Sappiamo che non tutti i sottinsiemi di $\mathbb{R}$ hanno massimo. Però per il principio di completezza hanno sempre estremo superiore. Poniamo

$$M = \sup f([a,b]).$$

Che proprietà ha M?

1) M è un maggiorante, cioè $M \geq$ ogni elemento dell'insieme

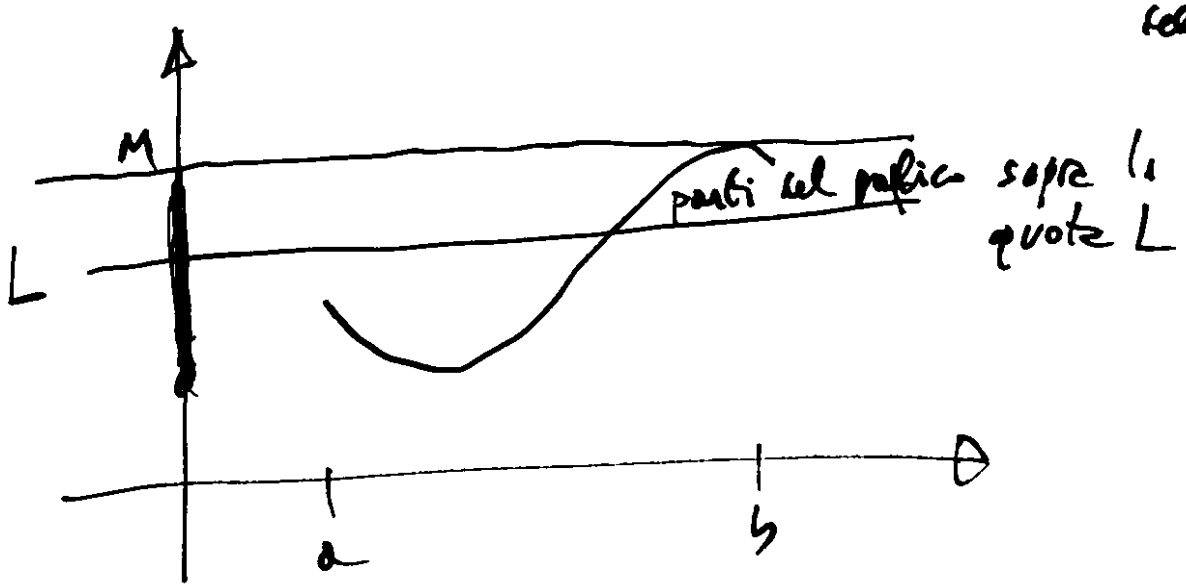
cioè $\boxed{M \geq f(x) \quad \forall x \in [a,b]}$



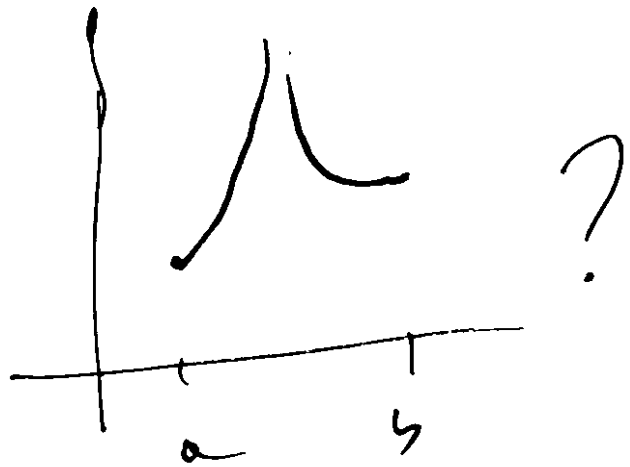
Il grafico sta al di sotto della quota M (obbligato)

2) M è il più piccolo dei maggioranti, cioè se prendiamo $L < M$, L non è un maggiorante, cioè

$$L < M \Rightarrow \exists x \in [a,b] \text{ tale che } \underbrace{f(x) > L}_{\text{classe collezione}}$$



Per quanto ne sappiamo ora, non possiamo escludere che M sia $+\infty$



Non possiamo dare per scontato che

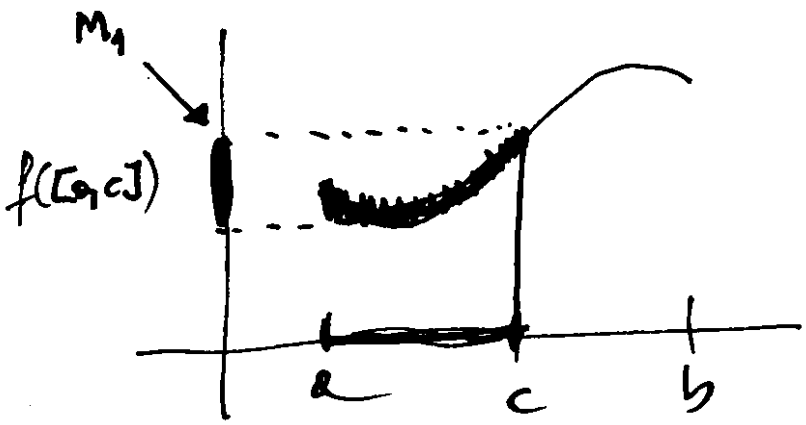
M sia FINITO.

Va dimostrato.

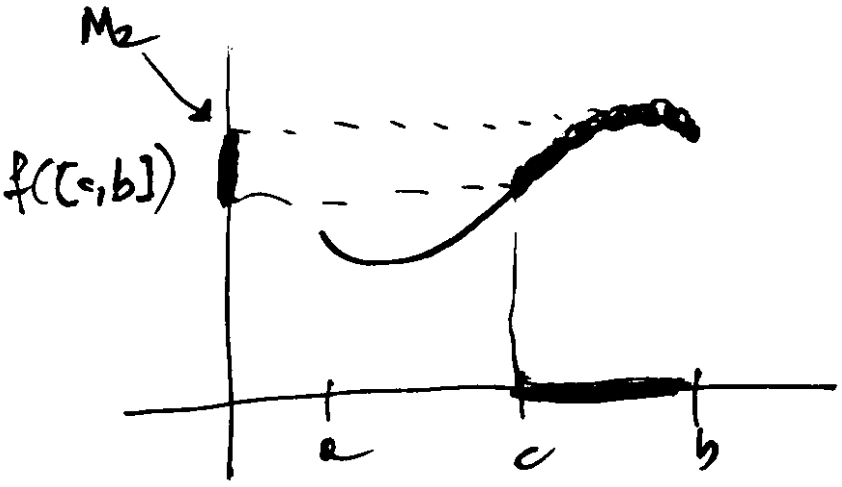
BISEZIONE: dividiamo l'intervallo in due parti uguali: $c = \frac{a+b}{2}$

2 sottointervalli $[a, c]$, $[c, b]$

Consideriamo gli insiemi immagine delle sottointervalli separatamente



$M_1 = \sup f([a,c])$



$M_2 = \sup f([a,c])$

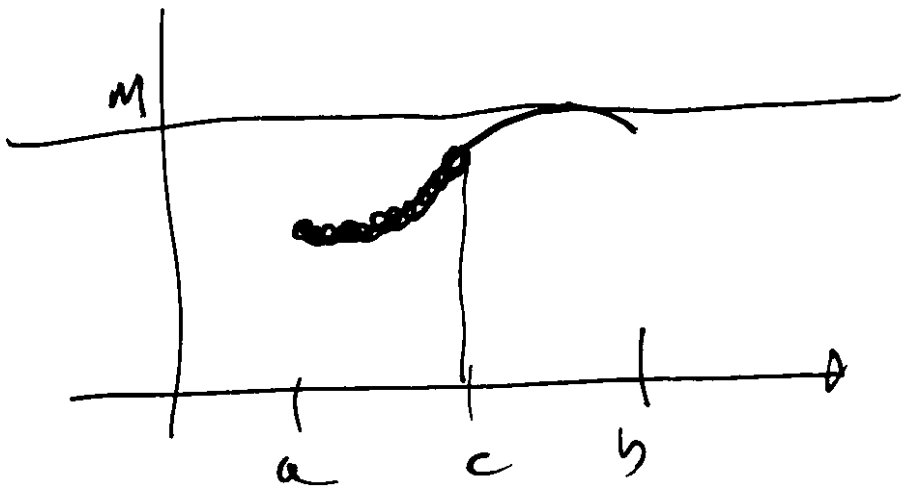
Dico che $M_1 \leq M$, $M_2 \leq M$ e almeno una fra M_1 e M_2 è uguale a M

$M_1 \leq M$, $M_2 \leq M$

una è $=$

Mostriamo che $M_1 \leq M$:

M è un maggiorante di <u>tutti</u> i valori di f e quindi anche dei valori $f(x)$ quando $x \in [a, c]$

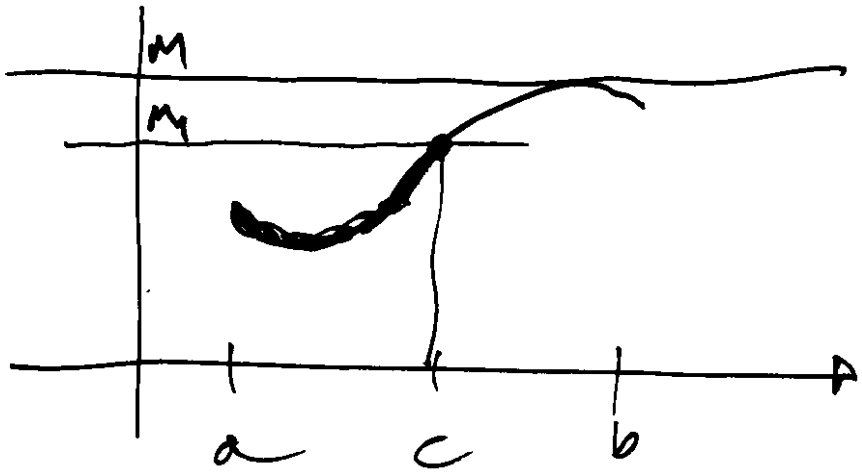


M è maggiorante di $f([a, c])$

è $\geq$ del più piccolo fra i maggioranti di $f([a, c])$,

il più piccolo è M_1.

quindi $M_1 \leq M$



Analogamente con M_2

Abbiamo stabilito che $M_1 \leq M$ e $M_2 \leq M$.

Dobbiamo dimostrare che almeno una di queste due è uguaglianza.

Per assurdo, supponiamo che nessuna delle due sia uguale, cioè $M_1 < M$ e $M_2 < M$.

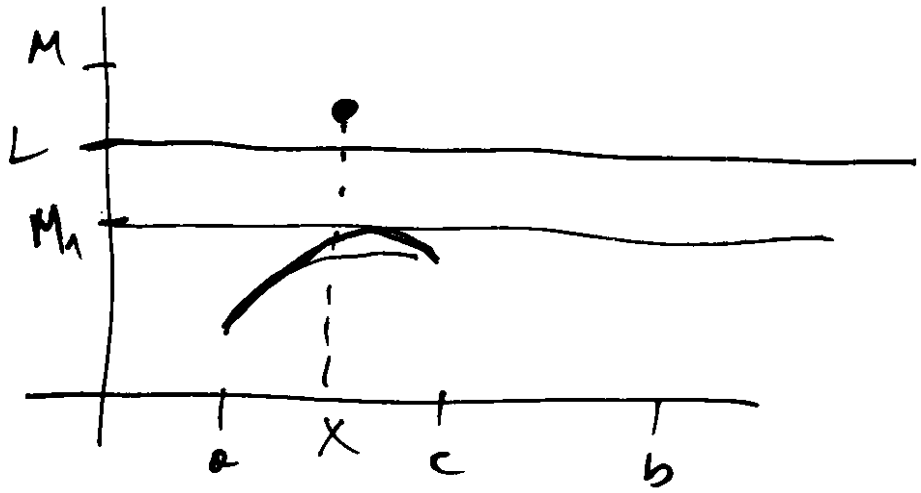
Quindi esiste un L intermedio fra M_1, M_2 da una parte e M dall'altra

$$M_1 < L < M$$
$$M_2 < L < M$$

$L < M$, quindi non è un maggiorante di $f([a,b])$, cioè $\exists x \in [a,b]$ tale che

$$f(x) > L$$

9 aprile 2021 - n 7



Primo caso $x \in [a, c]$

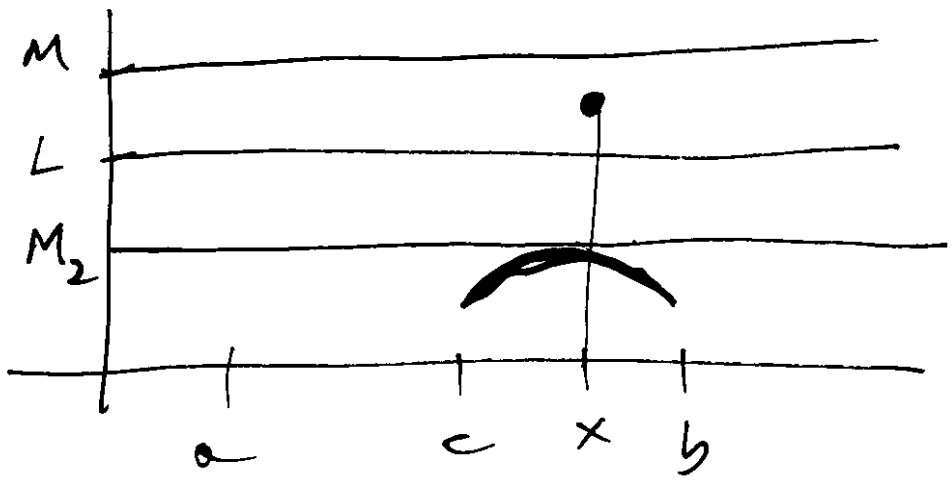
Ma allora ~~$f(x)$~~ ~~M_1~~

$$f(x) > L > M_1 = \sup f([a,c])$$

e M_1 non è un maggiorante di $f([a,c])$

ASSURDO.

Secondo caso $x \in [c, b]$



Anche assurdo

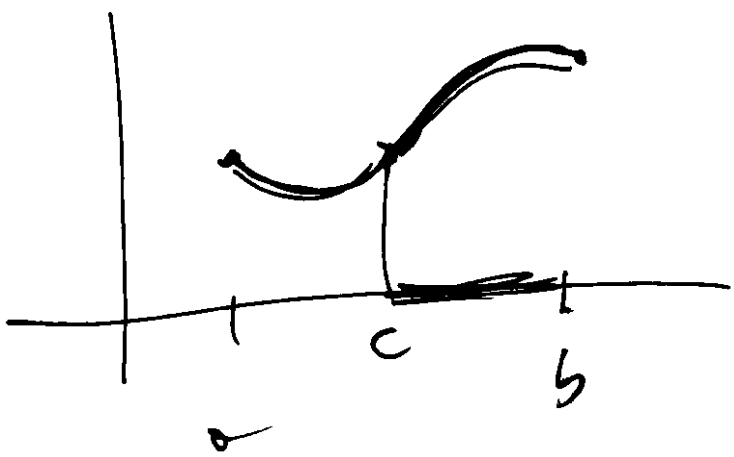
Rimane dimostrato che almeno uno tra
M_1 e M_2 è uguale a M.

Mi concentro sulla metà dell'intervallo dove
cade M con $\sup f(\text{metà})$

se $M_1 = M$ pongo $[a_1, b_1] = [a, c]$

se $M_2 = M$ pongo $[a_1, b_1] = [c, b]$

Se sono tutti uguali è indifferente la scelta.



Graficamente: prendo la metà più in alto.

L'intervallo originale sarà $[a_0, b_0] = [a, b]$

Procedura con la bisezione:
dividiamo in due l'intervallo $[a_1, b_1]$
e scegliamo la metà che ha lo stesso sup.
e così via.

La bisezione non termina mai.

9 aprile 2021 → p. 9

La bisezione produce una successione di intervalli

$$I_n = [a_n, b_n]$$

con queste proprietà:

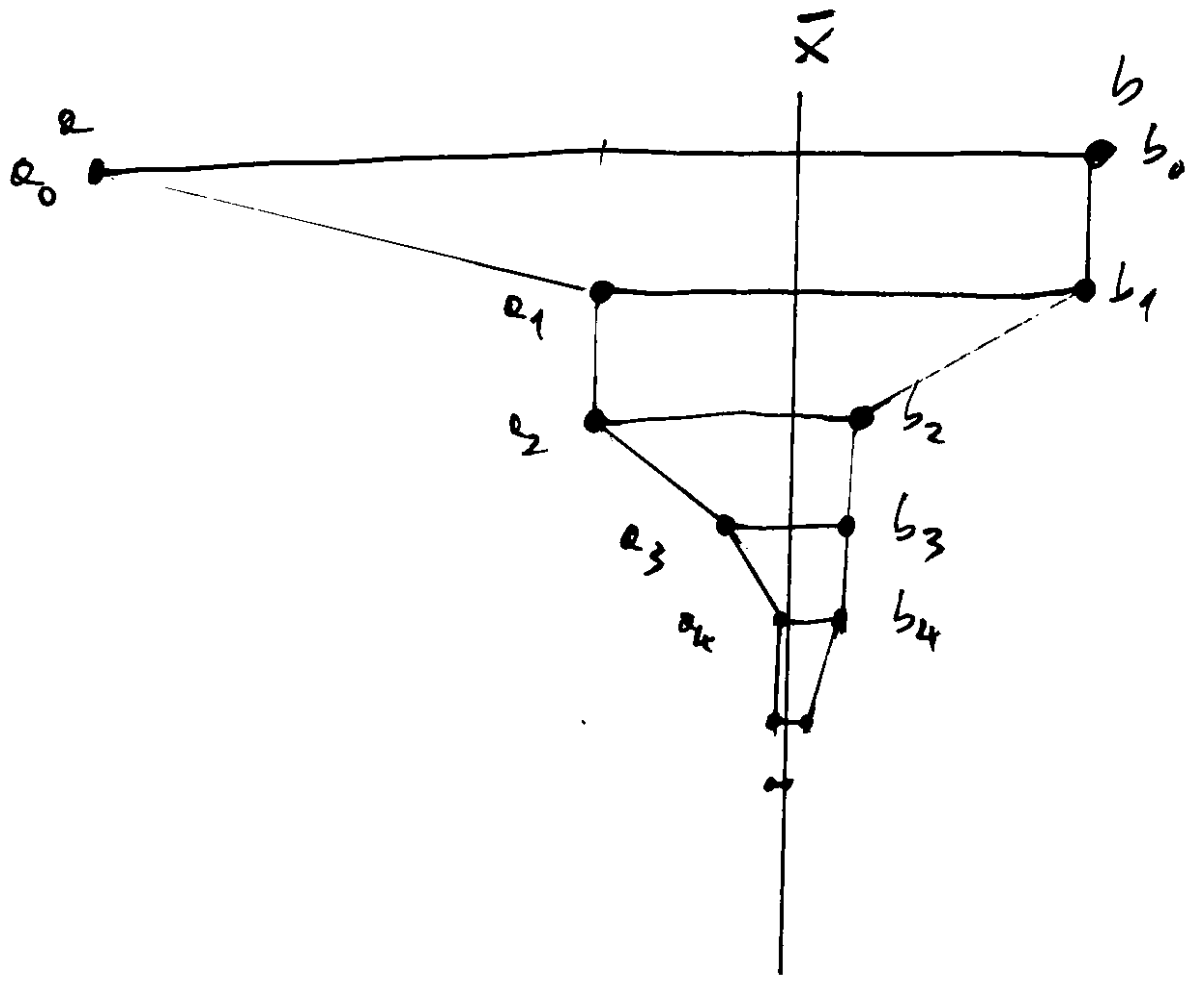
$I_n \supsetneq I_{n+1}$, I_{n+1} è lungo metà di I_n

$$a = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$$

$$b = b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots$$

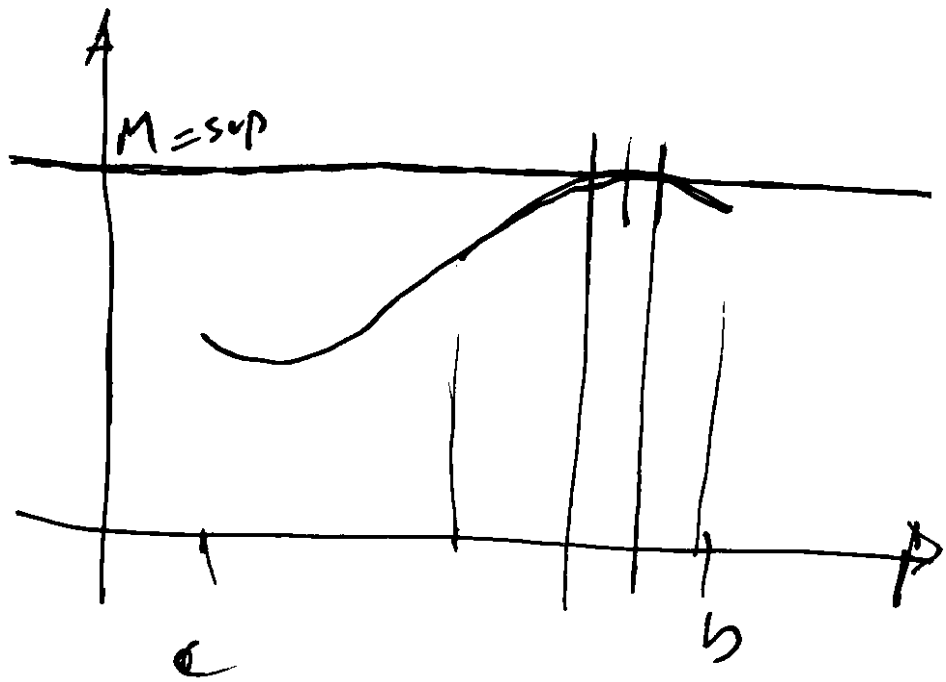
La successione degli a_n cresce debolmente

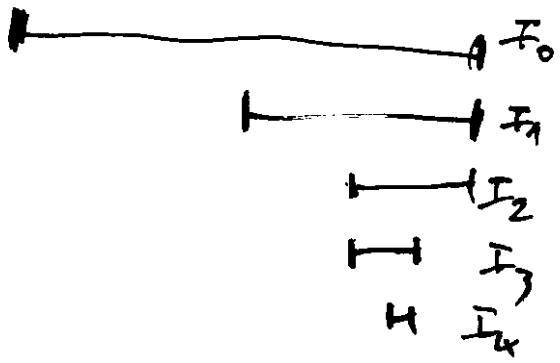
- - - - - b_n decresce - - -



Per ciascun degli I_n vale:

$$\sup f(I_n) \neq M \quad \forall n$$





Ragionando esattamente come nel teorema dell'esistenza degli zeri, le due successioni a_n, b_n hanno lo stesso limite finito che chiamo $\bar{x}$

$$\bar{x} = \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n$$

Ci interessa anche il fatto che

$$\bar{x} \in I_n \quad \forall n$$

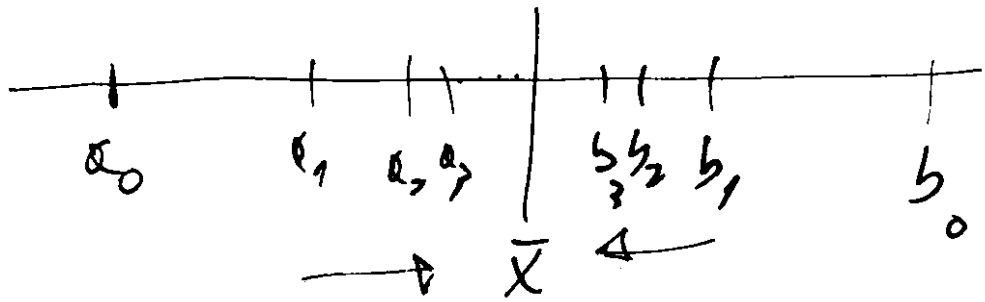
cioè $$a_n \leq \bar{x} \leq b_n \quad \forall n$$

infatti $\bar{x}$ = estremo superiore degli a_n
(dal teorema sulle successioni monotone)
e quindi $\bar{x}$ è un maggiorante degli a_n

cioè $$a_n \leq \bar{x} \quad \forall n$$

Analogamente $\bar{x}$ = estremo inferiore dei b_n
è quindi è un minorante dei b_n, cioè

$$\bar{x} \leq b_n \quad \forall n$$



Questo $\bar{x}$ è il nostro candidato a essere il punto di massimo.

$\bar{x} \in [a,b)$, quindi la funzione è continua in $\bar{x}$ (finora il fatto che f sia continua non è stato usato).

Usiamo la definizione di continuità nella versione ε, δ:

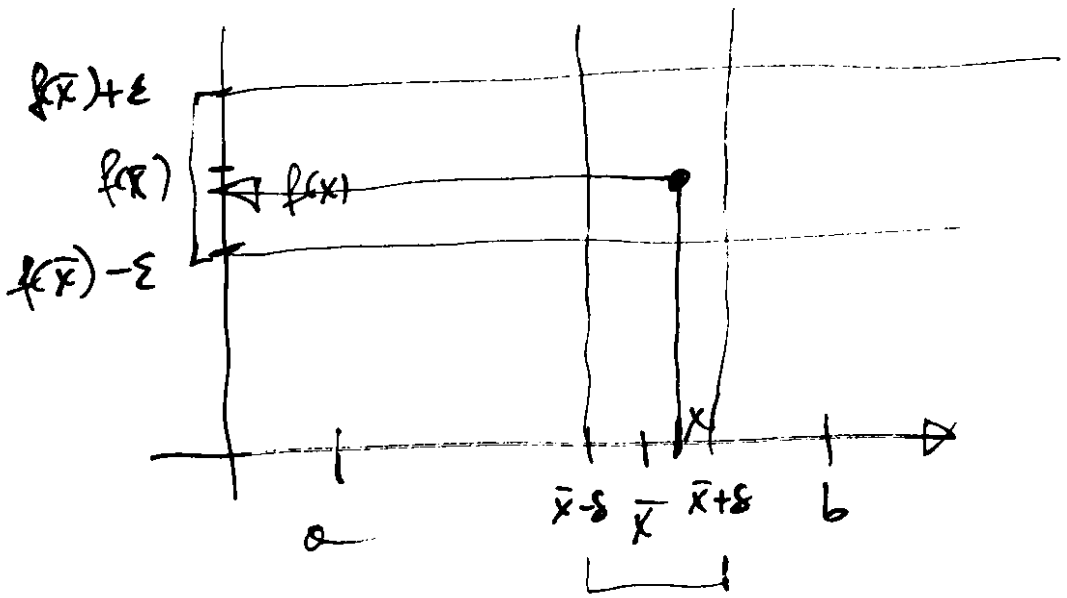
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in [a,b)$

$$|x - \bar{x}| < \delta \implies |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Consideriamo il $\delta > 0$ corrispondente. Riscrivo la disuguaglianza senza i valori assoluti:

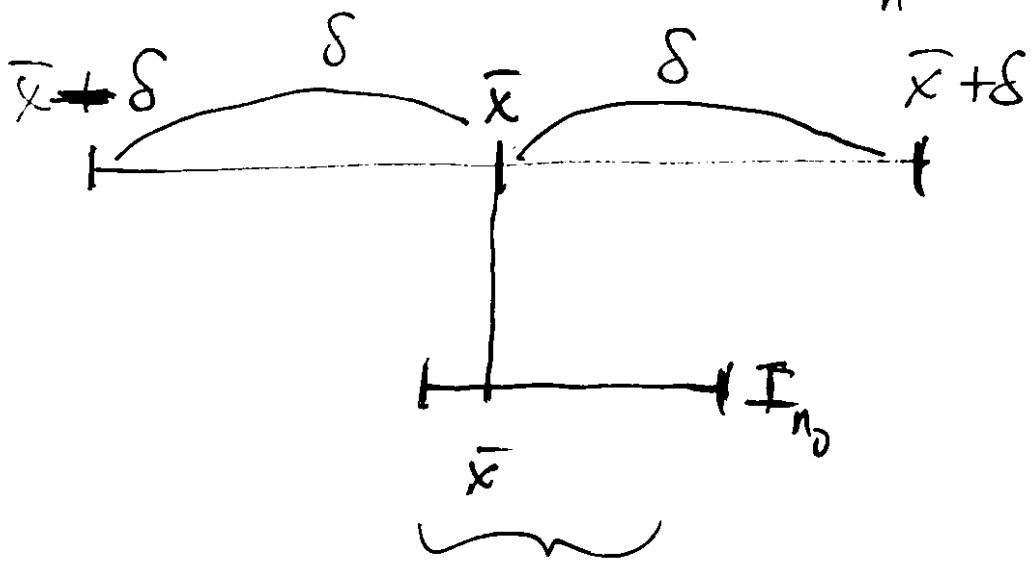
$\forall x \in [a,b)$

$$\bar{x} - \delta < x < \bar{x} + \delta \implies f(\bar{x}) - \varepsilon < f(x) < f(\bar{x}) + \varepsilon$$



e lunghezza degli intervalli I_n tendono a zero, perché si dimezza ad ogni passo.
A un certo passo la lunghezza di I_n diventa $< \delta$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\underbrace{b_{n_0} - a_{n_0}}_{\text{lunghezza di } I_n} < \delta$



lunghezza $< \delta$

Contiene $I_{n_0} \subset]\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta[$

$\forall x \in I_{n_0}$ abbia $x \in]\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta[$

$\bar{x}-\delta < x < \bar{x}+\delta$

$\Downarrow$ def. di continuità

$f(\bar{x})-\varepsilon < f(x) < f(\bar{x})+\varepsilon$

$\forall x \in I_{n_0} \quad f(x) < f(\bar{x})+\varepsilon$

Quindi $f(\bar{x})+\varepsilon$ è un maggiorante di

$f(I_{n_0})$

Ma allora $f(\bar{x})+\varepsilon$ è $\geq$ del più piccolo maggiorante, che è $\sup f(I_{n_0})$, che è uguale a M.

Quindi $\boxed{M \leq f(\bar{x})+\varepsilon}$

numero finito!

In particolare M è finito.

Ossia che $f(\bar{x})$ è un valore assunto da f

quindi $\boxed{M \geq f(\bar{x})}$, perché M è maggiorante.

Mettiamo insieme

$$f(\bar{x}) \leq M \leq f(\bar{x})+\varepsilon$$

Ricordiamoci che ε è >0 arbitrario.

Possiamo far tendere $\varepsilon \to 0^+$ nella disug.

$$f(\bar{x}) \leq M \leq f(\bar{x})+\varepsilon$$

$f(\bar{x})$

Le disuguaglianze deboli si conservano

$$f(\bar{x}) \leq M \leq f(\bar{x})$$

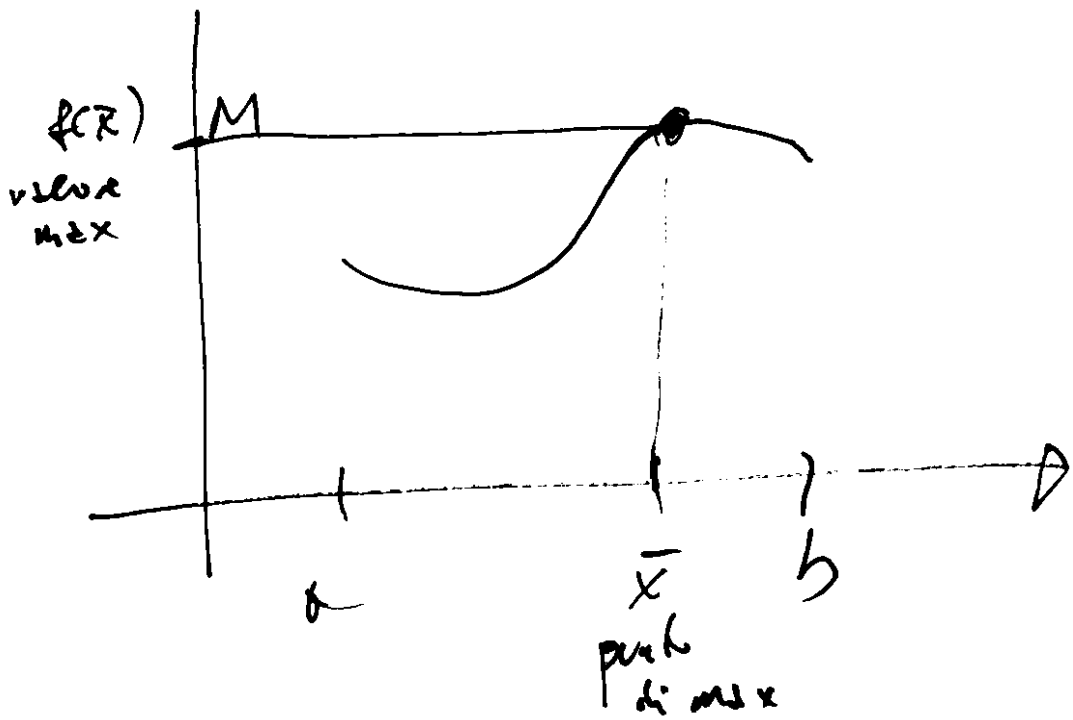
cioè $M = f(\bar{x})$.

Conclusione: M è l'estremo superiore per definizione, ed appartiene all'insieme $f([a,b])$

Quindi $M = \max f([a,b])$

$\bar{x}$ è punto di massimo (globale).

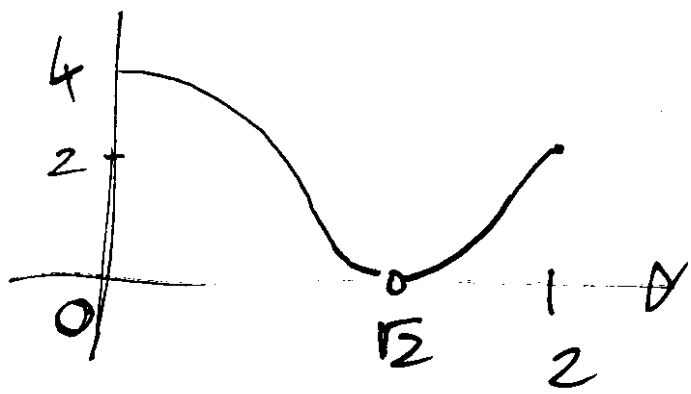
CVD



Questo teorema è complicato perché usa in modo pesante la proprietà fondamentale dei numeri reali.

Il teorema è falso se lo ambientiamo per esempio sui razionali $\mathbb{Q}$

$$f(x) = (x^2-2)^2 \qquad [0,2]$$

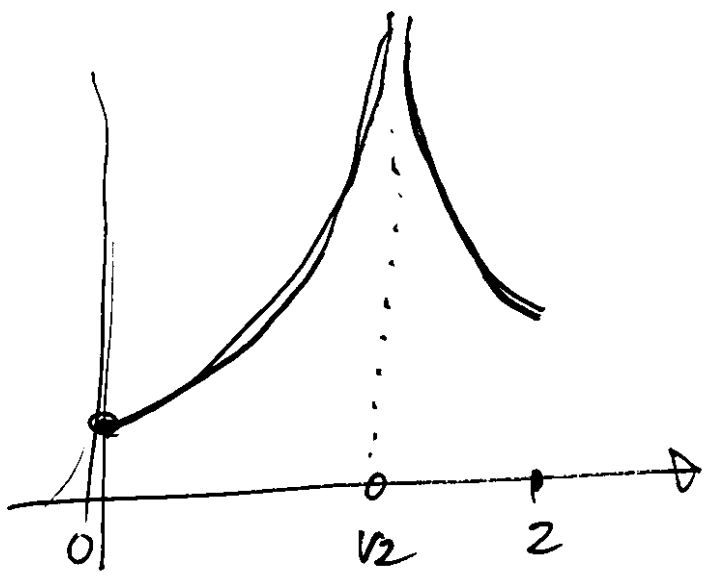


Questa funzione non ha minimo sui razionali

$$g(x) = \frac{1}{(x^2-2)^2}$$

è definita su tutto $\mathbb{Q}$

è continua su tutto $\mathbb{Q}$

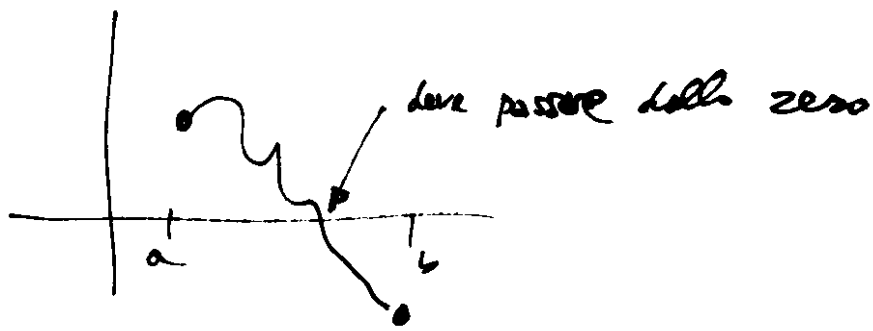


$$\sup g([0,2] \cap \mathbb{Q}) = +\infty$$

TEOREMI SULLE PROPRIETÀ GLOBALI DELLE FUNZIONI CONTINUE

1°) Teorema dell'esistenza degli zeri

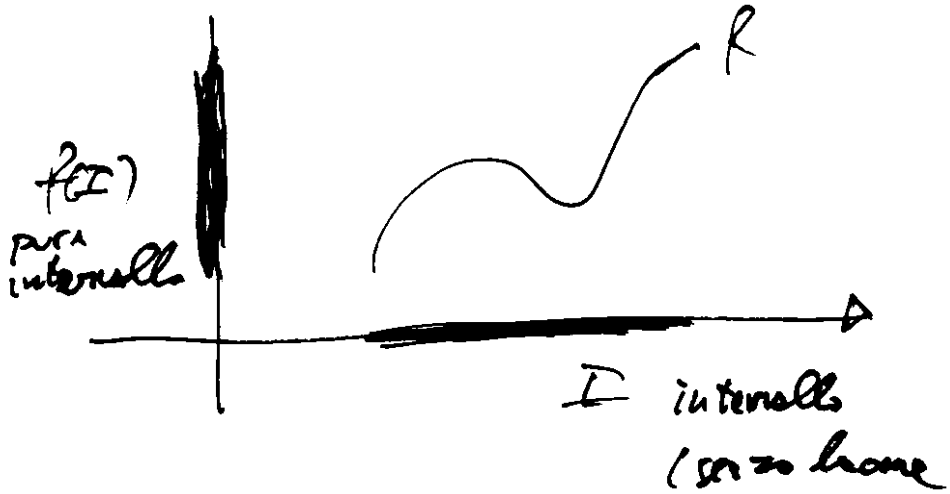
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $f(a)$ e $f(b)$ con segno opposto $\Rightarrow$ esiste almeno uno zero



2°) Teorema dei valori intermedi

$f: I \to \mathbb{R}$ continua, I intervallo,

Allora $f(I)$ è ancora intervallo
immagine

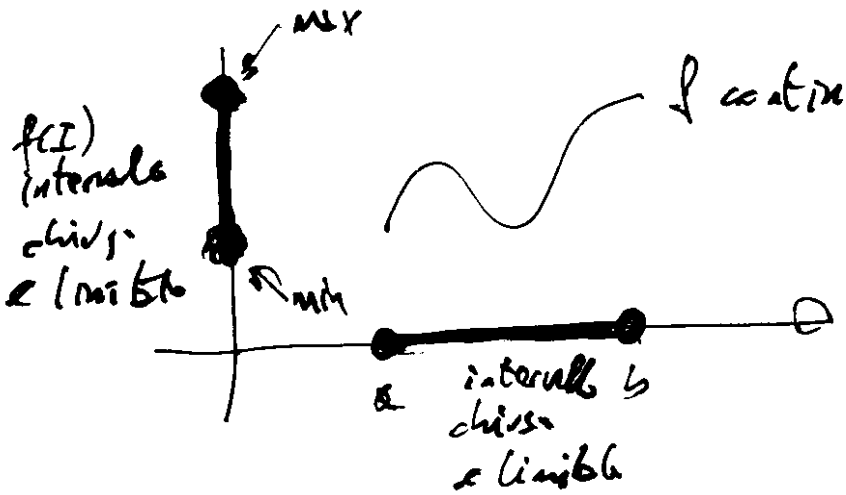


12 aprile 2021 - p. 2

3°) Teorema di Weierstrass sui massimi e minimi

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua, allora $f([a,b])$ ha massimo e minimo.

In particolare, mettendo insieme i due teoremi, $f([a,b])$ è un intervallo chiuso e limitato

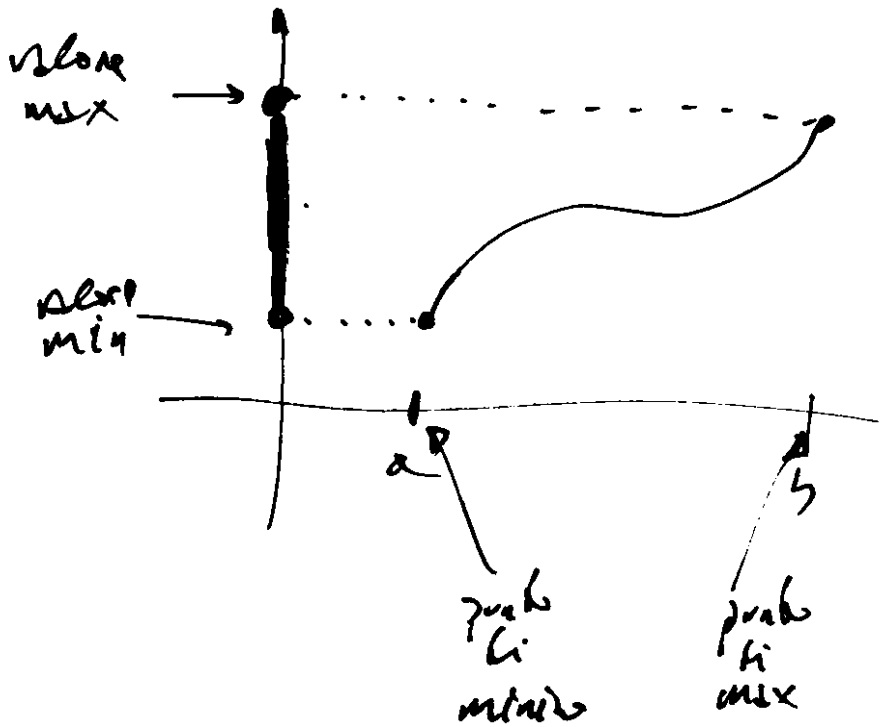


COROLLARIO IMPORTANTE:

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua, allora è anche LIMITATA, cioè esiste una costante $M>0$ tale che $|f(x)|\le M \quad \forall x$

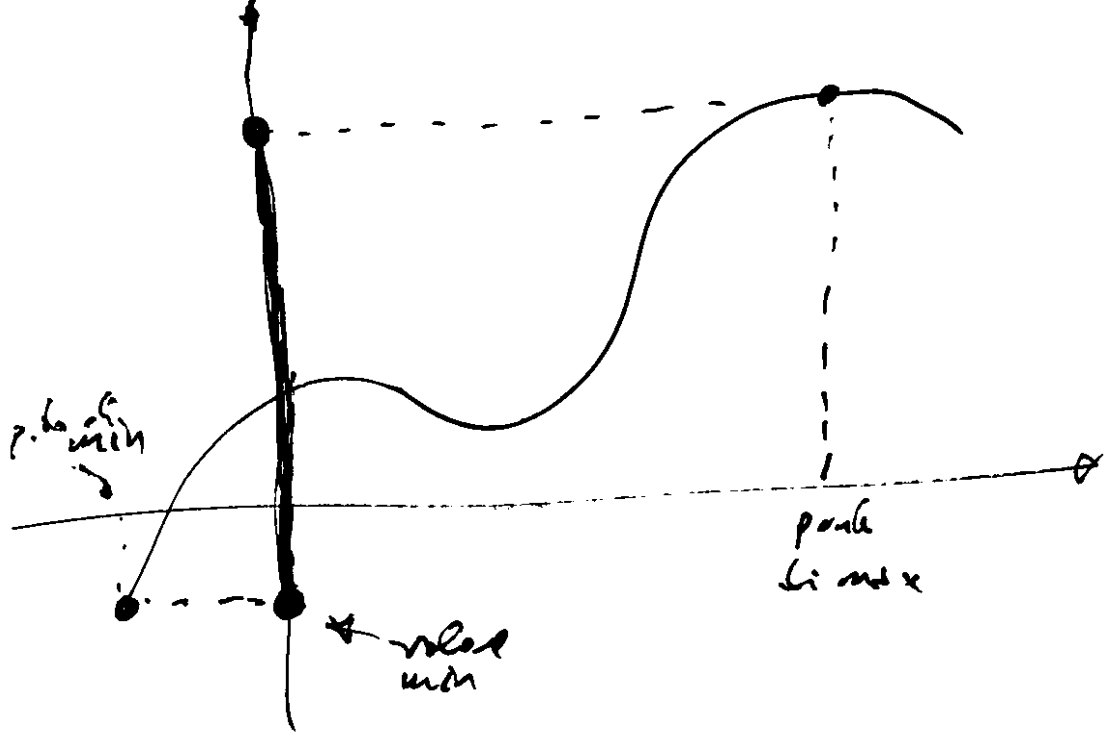
In particolare sono esclusi gli asintoti verticali.

MASSIMI E MINIMI ATTRAVERSO IL GRAFICO



ATTENZIONE: i punti di max e min globali possono essere gli estremi dell'intervallo dominio di f. Spesso lo sono.

Un punto di max e min (globale) è INTERNO se non è uno degli estremi, cioè ci si può spostare di un poco a sinistra e a destra rimanendo nel dominio.

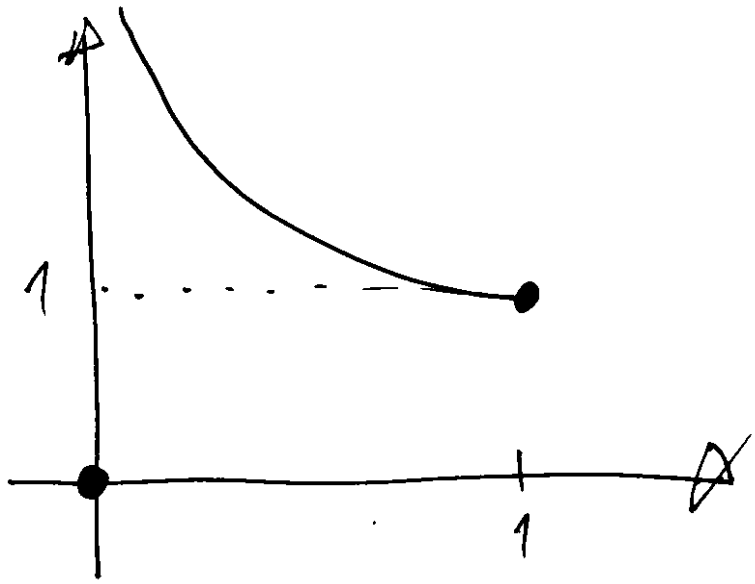


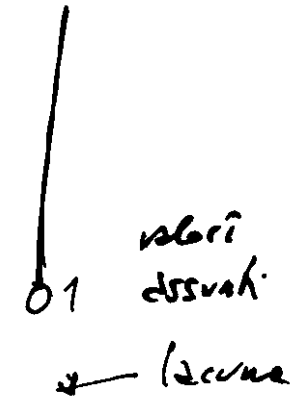
Osservazione Nel teorema di Weierstrass le ipotesi sono che $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua e il dominio è un intervallo chiuso e limitato.
Se si toglie una di queste ipotesi (continuità / chiuso e limitato), il teorema non è più vero.

Esempio. Togliamo la continuità:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } 0<x\le 1 \end{cases}$$

$[a,b]=[0,1]$
f non è continua in 0 ($0\in$ dominio)
Ha max e min?

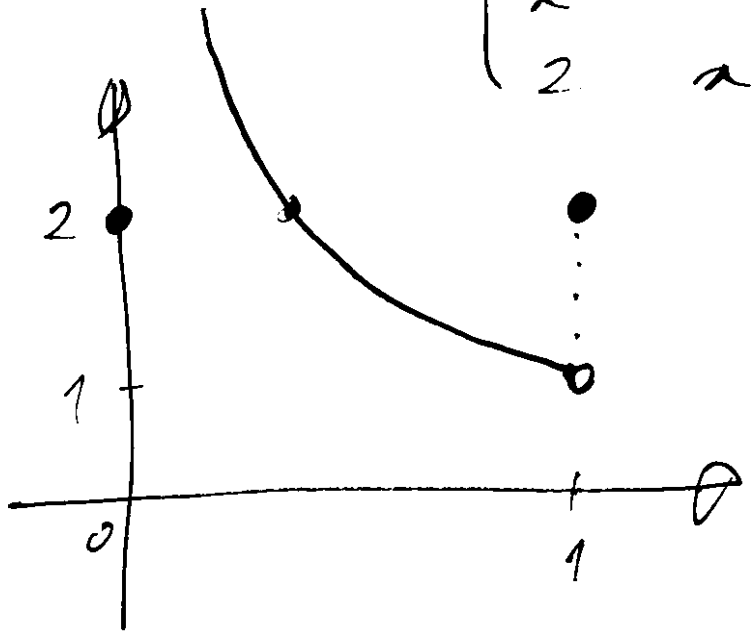




valore massimo? Non esiste, non c'è un valore della funzione $\geq$ di tutti gli altri.

valore minimo? Lo zero

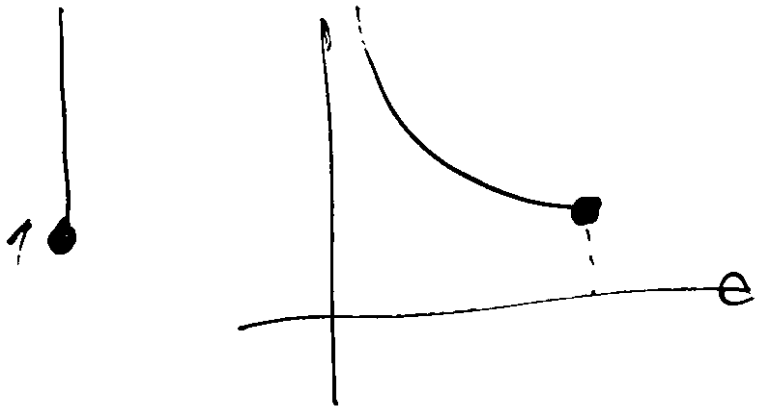
$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$



max non esiste
min non esiste

la g non è continua in 0 e in 1

Conservo l'ipotesi che la funzione sia continua e tolgo l'ipotesi che il dominio sia chiuso



$f(x) = \frac{1}{x}$ $x \in]0,1]$

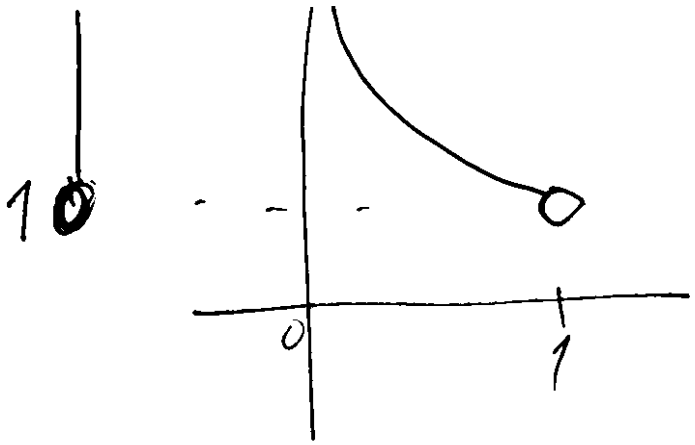
non è chiuso (semiaperto)

f è continua sul dominio

f ha max e non ha min su $]0,1]$

max: NO

min: SÌ, valore minimo $= 1$



$f(x) = \frac{1}{x}$ $x \in]0,1[$

continua

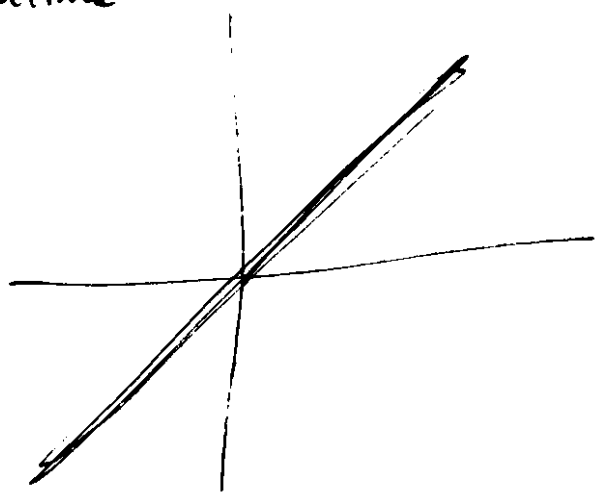
aperto

f non ha né max né min.

Casi in cui l'intervallo è illimitato

$f(x) = x$ $\quad x \in \mathbb{R}$ intervallo illimitato

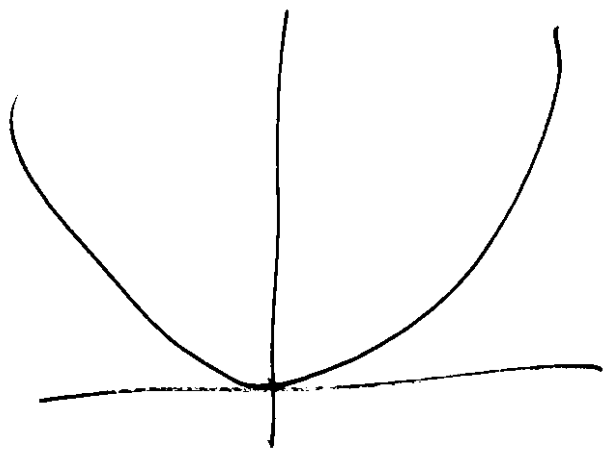
continua



valori assunti $= \mathbb{R}$

f non ha né max né min

$f(x) = x^2$ $\quad x \in \mathbb{R}$



valori assunti

$[0, +\infty[$

valore minimo $= 0$

valore max non c'è

I tre teoremi garantiscono l'esistenza di uno zero, valore max o min in certe condizioni di tipo teorico. Teoremi teorici.

La dimostrazione del teorema di Weierstrass non si presta a un algoritmo generale per trovare max e min.

Il passo iterativo richiede di trovare

$$\sup f(I)$$

sup dei valori assunti.

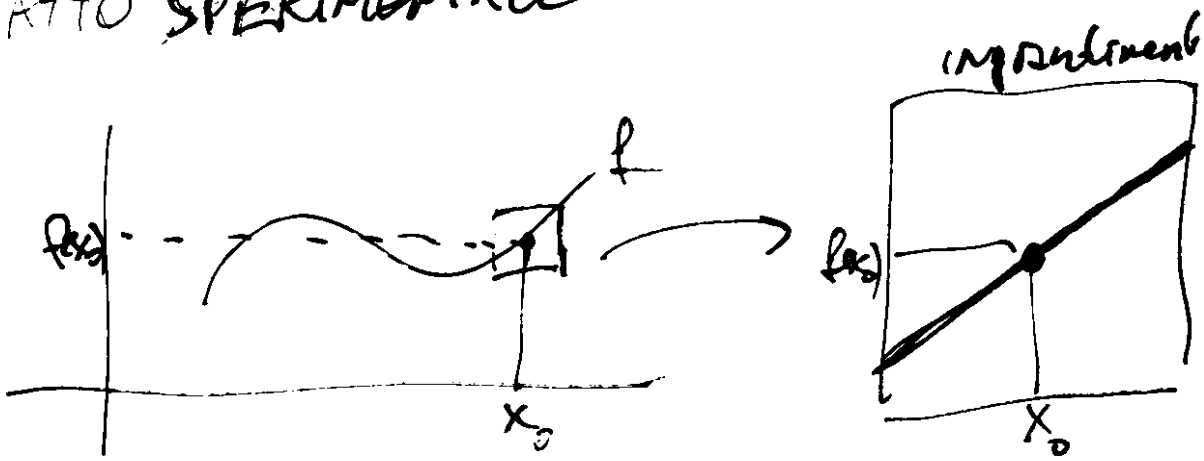
Purtroppo non c'è un algoritmo <u>generale</u> per calcolare il sup.

In linea di principio il calcolo dell'estremo superiore richiede un quantità <u>infinita</u> di calcoli.

Nel teorema dell'esistenza degli zeri il criterio dell'iterazione era il segno di $f(c)$, il calcolo di 1 valore della funzione.

LA DERIVATA

FATTO SPERIMENTALE



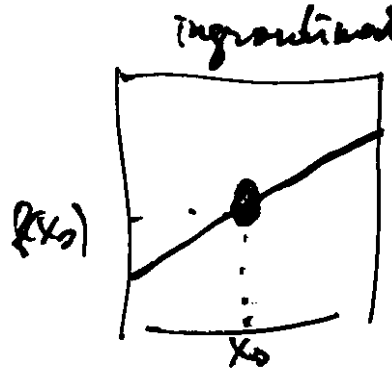
Spesso (non sempre) nella finestra di ingrandimento si vede una retta, o almeno qualcosa che è indistinguibile ad occhio da una retta.
Questa retta non dipende dal livello di ingrandimento, purché sia alto.
Dipende invece dal punto x_0 in cui faccio l'ingrandimento, e dalla funzione.

Costruiremo ora una **teoria** che regola e spiega questo fenomeno

Teoria della derivata o delle derivate.

La teoria è utile in moltissime situazioni.

Strumenti per descrivere il fenomeno.



come esprimere formalmente l'idea che l'incrementi sono simili a una retta?

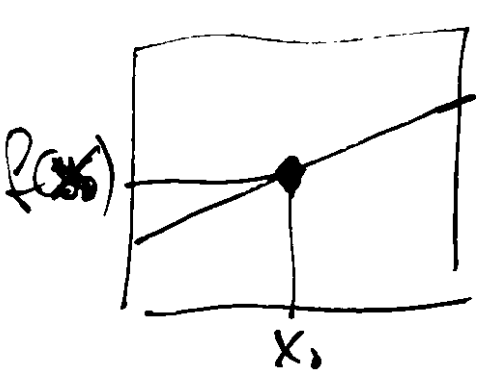
Come si può individuare una retta?

1) dando due punti distinti;
2) dando un punto e una direzione,
3) dando un punto e un coefficiente angolare

Il nostro problema assegna già un punto:

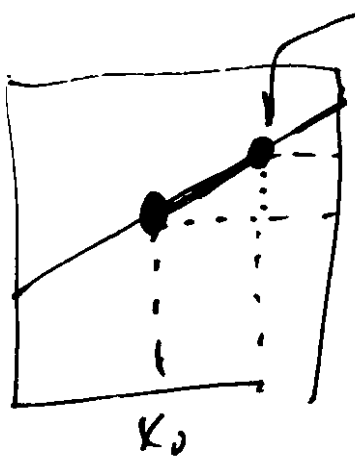
$(x_0, f(x_0))$.

La retta (o quasi retta) che ci interessa passa per questo punto. Per completare la descrizione puntiamo sul coefficiente angolare



Come si trova m?

$$m = \frac{\text{incremento di ordinata}}{\text{incremento di ascissa}}$$



} incremento di ordinata

divisione

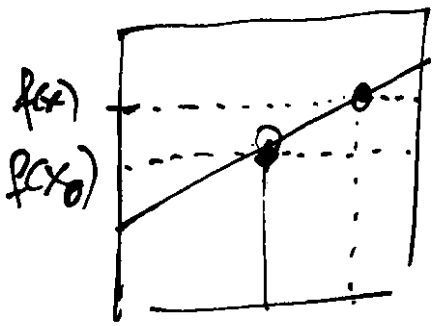
↓

incremento di ascissa

↓

coeff. angolare

Se si tratta di una vera retta, questo rapporto non dipende dalla scelta del secondo punto



} $f(x) - f(x_0)$ incremento di ordinata

$x - x_0$ incremento di ascissa

$$m = \frac{\text{incremento di ordinata}}{\text{incremento di ascissa}} = \boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

se questo è una vera retta, questo m non dipende dalla scelta di x, basta che $x \neq x_0$

16 aprile 2021 7.4

in generale non diventa una vera retta, ma solo qualcosa che assomiglia.
Traducendo in formule, questo vuol dire che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

cambia di pochissimo quando x è vicino a x_0, è vicino a un valore limite.
Facciamo un salto logico, questo assomiglia molto alla definizione di limite: esiste una costante m tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ è vicinissimo a m quando x è vicinissimo a x_0.

Definizione Se esiste il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

questo valore è chiamato **derivata** di f in x_0.

Dire che esiste (finito) questo limite assomiglia molto all'idea intuitiva che emerge dai dati sperimentali.

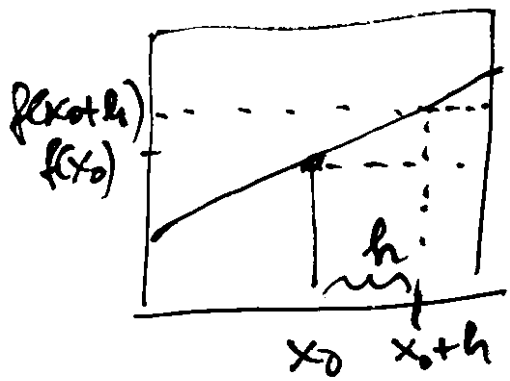
16 aprile 2021 - 1.5

E' cruciale questo oggetto

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ DERIVATA

è la derivata di f in x_0

Grazie alla definizione



$f(x_0+h) - f(x_0)$ incremento di ordinata

h = incremento di ascissa

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ derivata

(formula alternativa)

Le due impostazioni differiscono solo per un cambio di variabile

$x = x_0 + h$ $\quad x \to x_0$

$h = x - x_0$ $\quad h \to 0$

16 aprile 2021 - p. 6

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{z\to x_0} \frac{f(z)-f(x_0)}{z-x_0}$$

x e z sono variabili mute, uso e getto.

Se la funzione f è continua il limite

$$M = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

è della forma $\frac{0}{0}$

Definizione Una funzione f si dice DERIVABILE in x_0 se esiste e esiste finita, cioè se

esiste finito $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Se esiste può essere infinito.

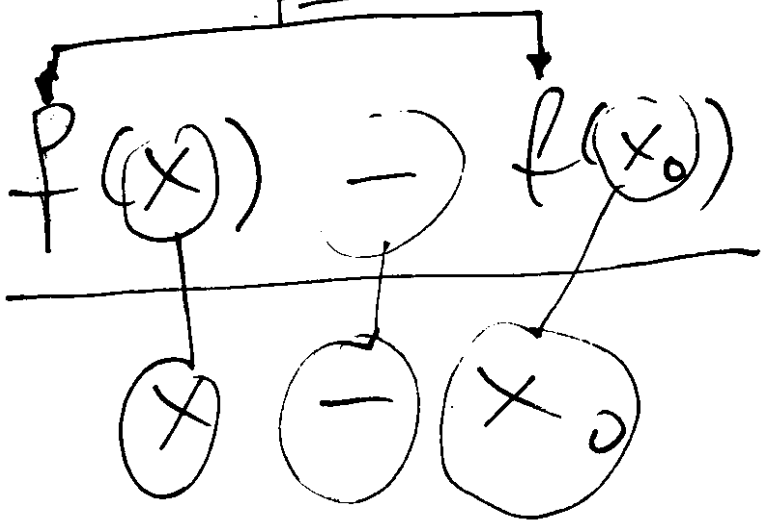
Ci sono situazioni comode e utili in cui la derivata ha senso considerarla infinita.

Questo oggetto

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

senza limite assumbi ha interesse di per sé.

È chiamato **RAPPORTO INCREMENTALE**



$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$ è uguale a quello di prima si ottiene cambiando di segno il numeratore e denominatore

Il rapporto incrementale dipende da x e da x_0

La scrittura $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

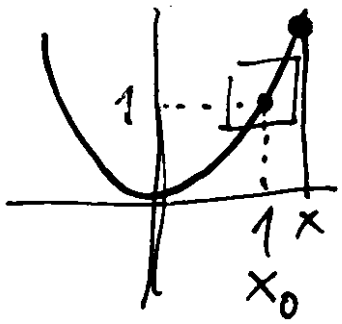
dipende solo da x_0

La x compare nella formula, variabile muta e getta

16 apr. 2021 - p. 8

CALCOLO DELLA DERIVATA IN SITUAZIONI SEMPLICI

$f(x) = x^2$



Proviamo a fare i conti

$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = 1^2 = 1$

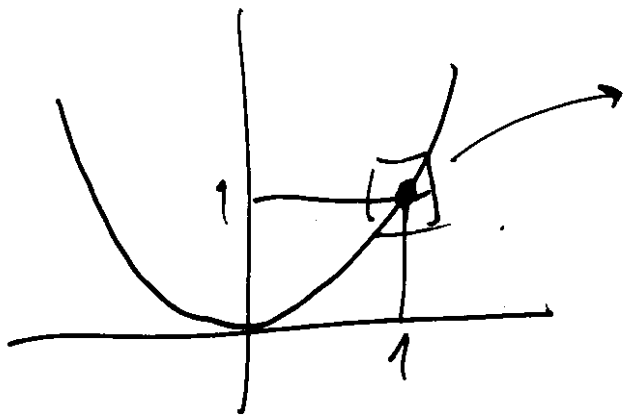
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

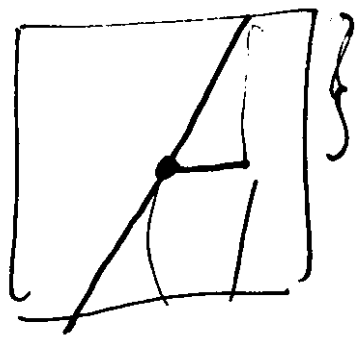
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} (x+1) = 1 + 1 = \boxed{2}$$

La funzione f è derivabile in x_0 e la derivata vale 2



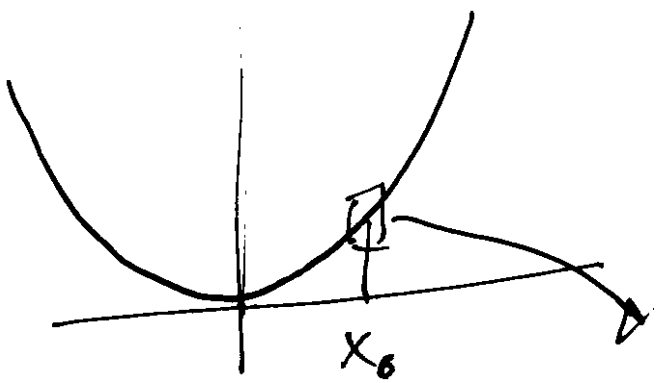


$\sim$ ... asc

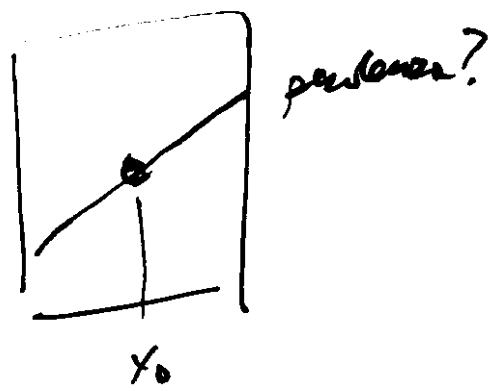
$\frac{ord}{asc} \simeq 2$

La teoria prevede il risultato dell'esperimento.

previsione / sperimentale



x_0 punto



$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \quad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) =$$

$$= x_0 + x_0 = \boxed{2x_0}$$

Notazioni per la derivata

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si prende il simbolo della funzione (f, g, ...) gli si mette un apice ' che si legge "primo" e poi fa parentesi tonde il punto in cui si fa la derivata.

Esempio: $f(x) = x^2$

$$f'(x_0) = 2x_0$$

ora posso rinominare x_0 e scrivere x al posto di x_0

$$f'(x) = 2x$$

Alcuni libri mettono l'apice sulla formula della funzione:

$$(x^2)' = 2x$$ senza scrivere f

è conciso però non si evita.

Non scrivere $f'(x^2)$ con significato di derivata di x^2

Altra notazione che uso io

$$Df(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$(Df)(x_0)$

$(f')(x_0)$

$\boxed{D(x^2) = 2x}$ conciso

$D_x(x^2)$ $\quad$ $D_y(x^2y - 3z)$

Notazione ibrida $\boxed{D' f(x_0) \quad \underline{NO}}$

$D^1 f(x_0)$

Notazione di Leibniz

$\frac{d f(x)}{dx}$ $\quad$ variabile dipendente $y = f(x)$

$\boxed{\frac{dy}{dx}}$

16 aprile 2021 7.12

Teorema Se una funzione è derivabile in x_0, allora è continua in x_0.

Dim Ipotesi $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m$ esiste finito

Tesi $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Provo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \left(f(x) - f(x_0) + f(x_0) \right)$$

(aggiungo e tolgo)

$$= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) + f(x_0) \right)$$

(moltiplico e divido)

$$= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) + f(x_0) \right) =$$

costante

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to m$ per ipotesi; $(x-x_0) \to 0$; $f(x_0) \to f(x_0)$

$$= m \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0) \quad \text{finito}$$

CVD

Questo teorema viene spesso frainteso.

derivabilità $\Longrightarrow$ continuità

Molti studenti sono convinti che i due concetti coincidano

derivabilità $\Longleftrightarrow$ continuità

FALSO

In pratica le funzioni con cui abbiamo a che fare sono (di solito) contemporaneamente continue e derivabili. Questo può alimentare la confusione.

Esempio base di una funzione continua che è continua ma non derivabile. (ESAME)

$f(x) = |x| \qquad x_0 = 0$

f è continua in x_0 ma non è derivabile.

Verifica continuità

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} |x| = \\ \lim_{x\to 0^-} |x| \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} -x = 0$$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ $\quad$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

quindi $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = |0| = f(x_0)}$

continua!

Derivabilità

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

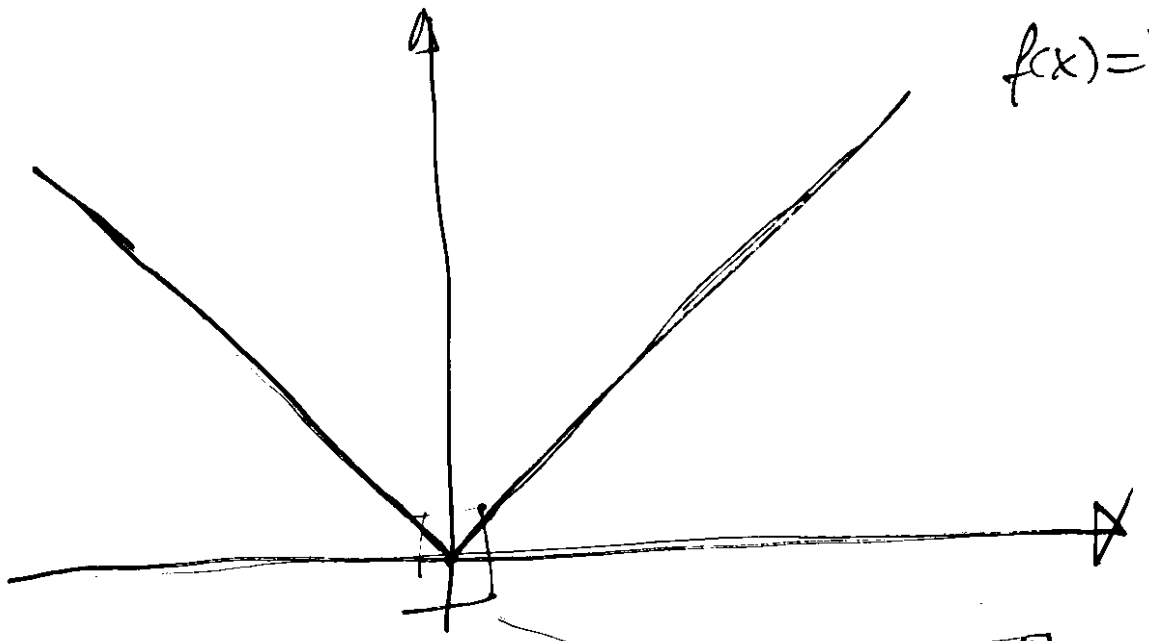
limiti diversi

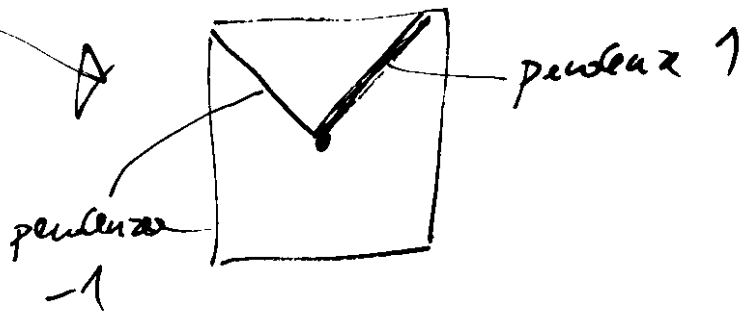
$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ non esiste

La funzione non è derivabile in 0

16 aprile 2021 - p. 15

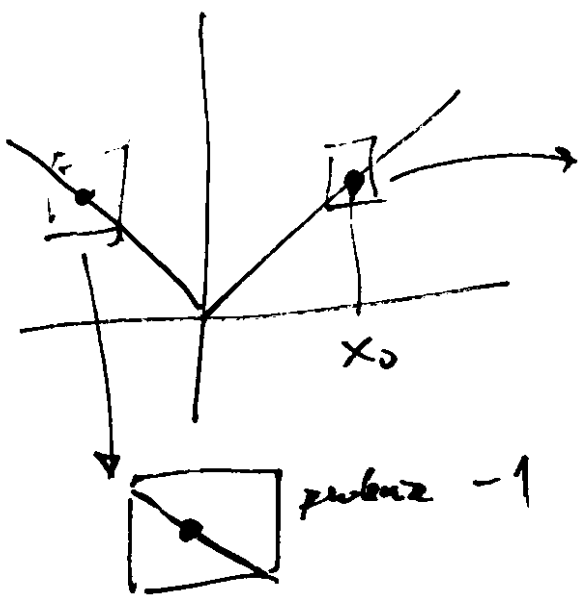
Interpretazione geometrica

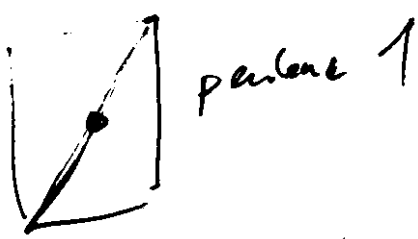




Continua ma non derivabile nell'origine

FUORI DALL'ORIGINE è continua e derivabile





$$D|x| = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ \text{non esiste} & x = 0 \end{cases}$$

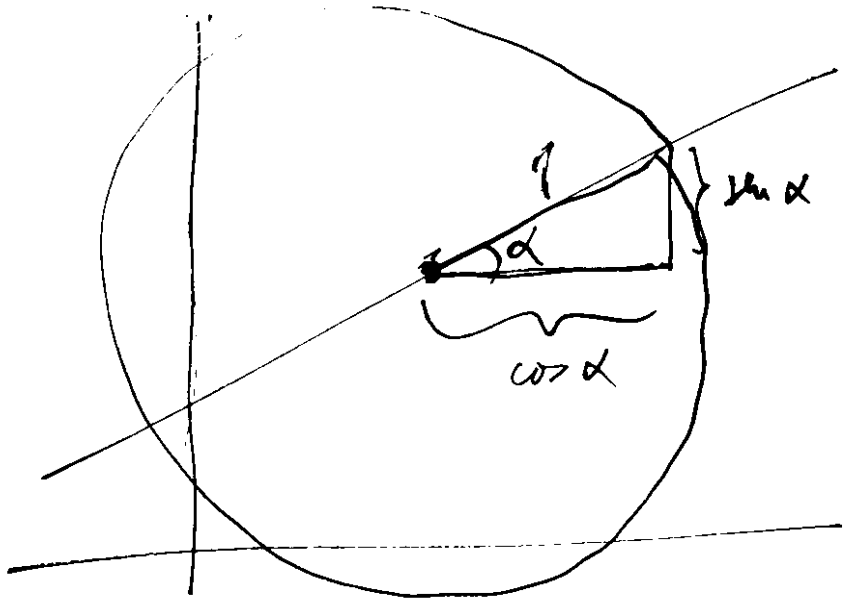
Es/ quasi la funzione segno

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$D|x| = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}$$ vera

se $x \neq 0$ dà il valore della derivata

se $x = 0$ nessuno dei due ci dà lo stesso



$y = mx + q$

↑ coeff angolare

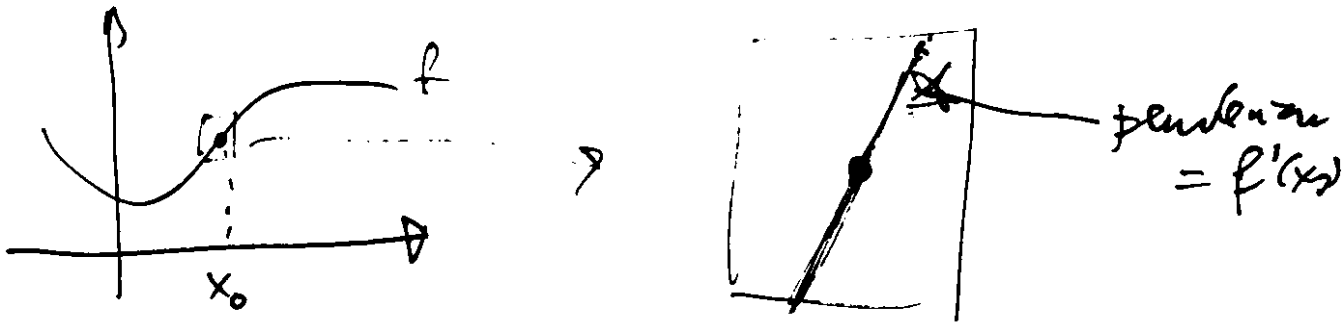
$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$45^\circ = \operatorname{arctg} 1$$

DERIVATA



Def $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se esiste

Derivata della funzione nel punto

anche infinito

Retta tangente: retta nel piano dove si disegna il grafico di f che passa per $(x_0, f(x_0))$ e ha la stessa pendenza dell'incremento

equazione: $y - f(x_0) = m \cdot (x - x_0)$

m = pendenza

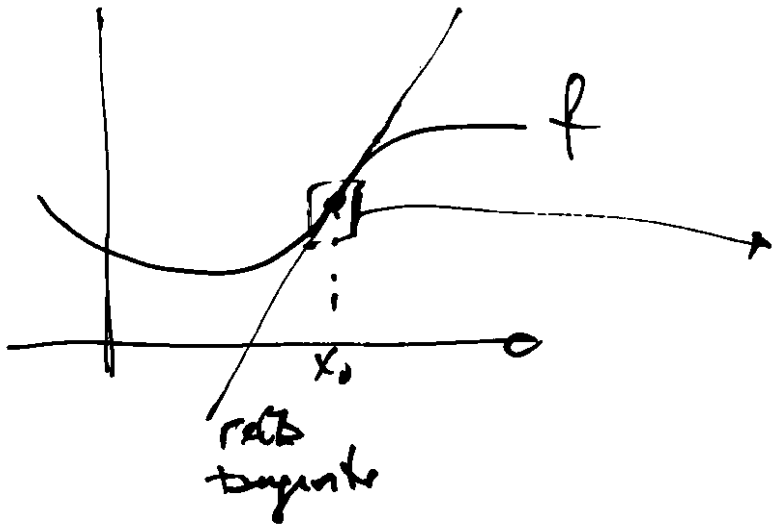
retta tangente: $y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$

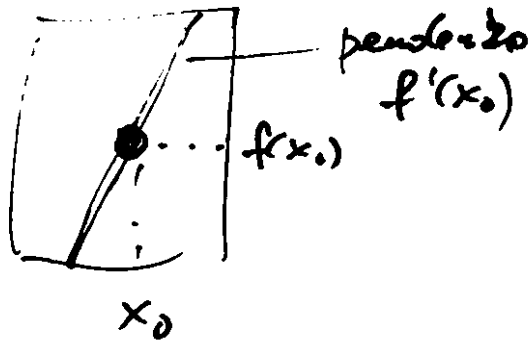
x_0

equivalentemente

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)}$$

costante costante variabile variabile





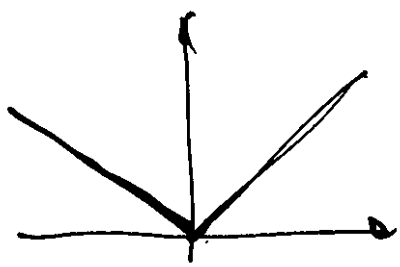
~~Teorema~~ Se f

Definizione f si dice derivabile in x_0 se la derivata $f'(x_0)$ esiste finita

Teorema Se f è derivabile in x_0, allora è anche continua in x_0.

Derivabilità $\Longrightarrow$ continuità
implica

$\not\Longleftarrow$



$f(x) = |x|$
è continua dappertutto però in $x_0 = 0$ non è derivabile

funzioni di Von der Waerden
è continua sempre
derivabile MAI

DERIVATE ELEMENTARI

$$\boxed{D x^2 = 2x}$$

$$D|x| = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \\ \text{non esist} & x=0 \end{cases} = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}$$

$D e^x$

$f(x) = e^x$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^{t+x_0} - e^{x_0}}{t} =$$

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1}$$

$t = x - x_0$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^t e^{x_0} - e^{x_0}}{t} =$$

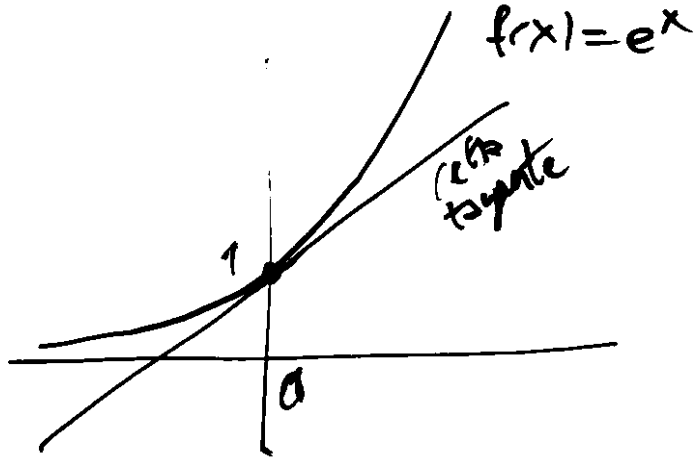
$$= \lim_{t\to 0} e^{x_0} \frac{e^t - 1}{t} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0} \quad (= f(x_0))$$

$\frac{e^t-1}{t} \to 1$

$$\boxed{D e^x = e^x}$$

LA DERIVATA DELLA FUNZIONE ESPONENZIALE (base e) È LA FUNZIONE ESPONENZIALE STESSA

19 aprile 2021 - p. 3



ed

retta tangente

$y = 1 + e^0 (x-0)$

$y = 1 + x$

$Dx^3 = ?$

$f(x) = x^3$ $\quad x_0$ generico

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

prodotti notevoli

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(x^2 + x x_0 + x_0^2\right) =$$

$x^2 \to x_0^2$, $x \to x_0$, $x \to x_0$, $x_0 \to x_0$

$$= x_0^2 + x_0^2 + x_0^2 = 3x_0^2$$

$$\boxed{Dx^3 = 3x^2}$$

19 aprile 2021 - p. 5

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{x x_0}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x x_0} \cdot \frac{x_0 - x}{x - x_0}$$

$x \to x_0$; $\frac{1}{x x_0} \to \frac{1}{x_0^2}$; $\frac{x_0 - x}{x - x_0} = -1$ (uno è l'opposto dell'altro)

$$= -\frac{1}{x_0^2}$$

$$\boxed{D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}}$$

19 aprile 2021 - p 6

$f(x) = \log x$ (base e)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\log x - \log x_0}{x - x_0} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\log(x_0 + t) - \log x_0}{t} =$$

$x - x_0 = t \to 0$

$x \to x_0$

Limite notevole

$\lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\log \frac{x_0 + t}{x_0}}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\log\left(1 + \frac{t}{x_0}\right)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{x_0} \log\left(1 + \frac{t}{x_0}\right)}{\frac{t}{x_0}} =$$

$\frac{t}{x_0} \to 0$

$\frac{t}{x_0} = y$

$$= \frac{1}{x_0} \lim_{y \to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = \frac{1}{x_0} \cdot 1 =$$

$$= \boxed{\frac{1}{x_0}}$$

19 aprile 2021 - 7-7

$$D \lg x = \frac{1}{x}$$

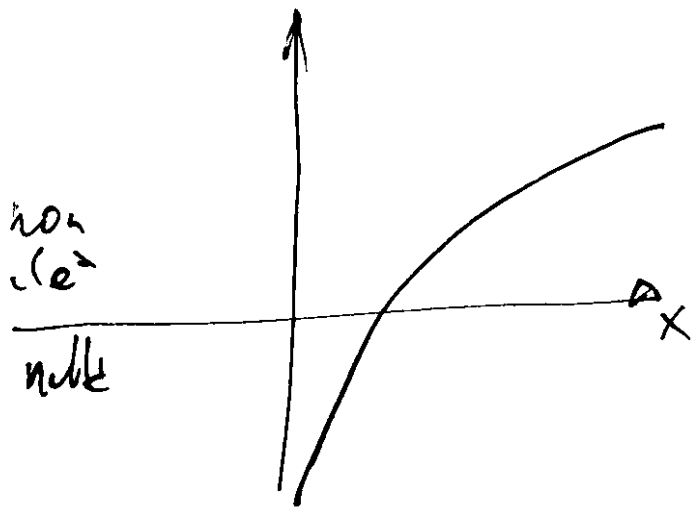
ha senso per $x > 0$

dominio: $x > 0$

campo $x \neq 0$

La funzione logaritmo è derivabile per $x < 0$?

NO non esiste la funzione, quindi non ci è nemmeno la derivata



19 aprile 2021 - 7.8

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$\sqrt{x} \to \sqrt{x_0}$

se $x_0 > 0$

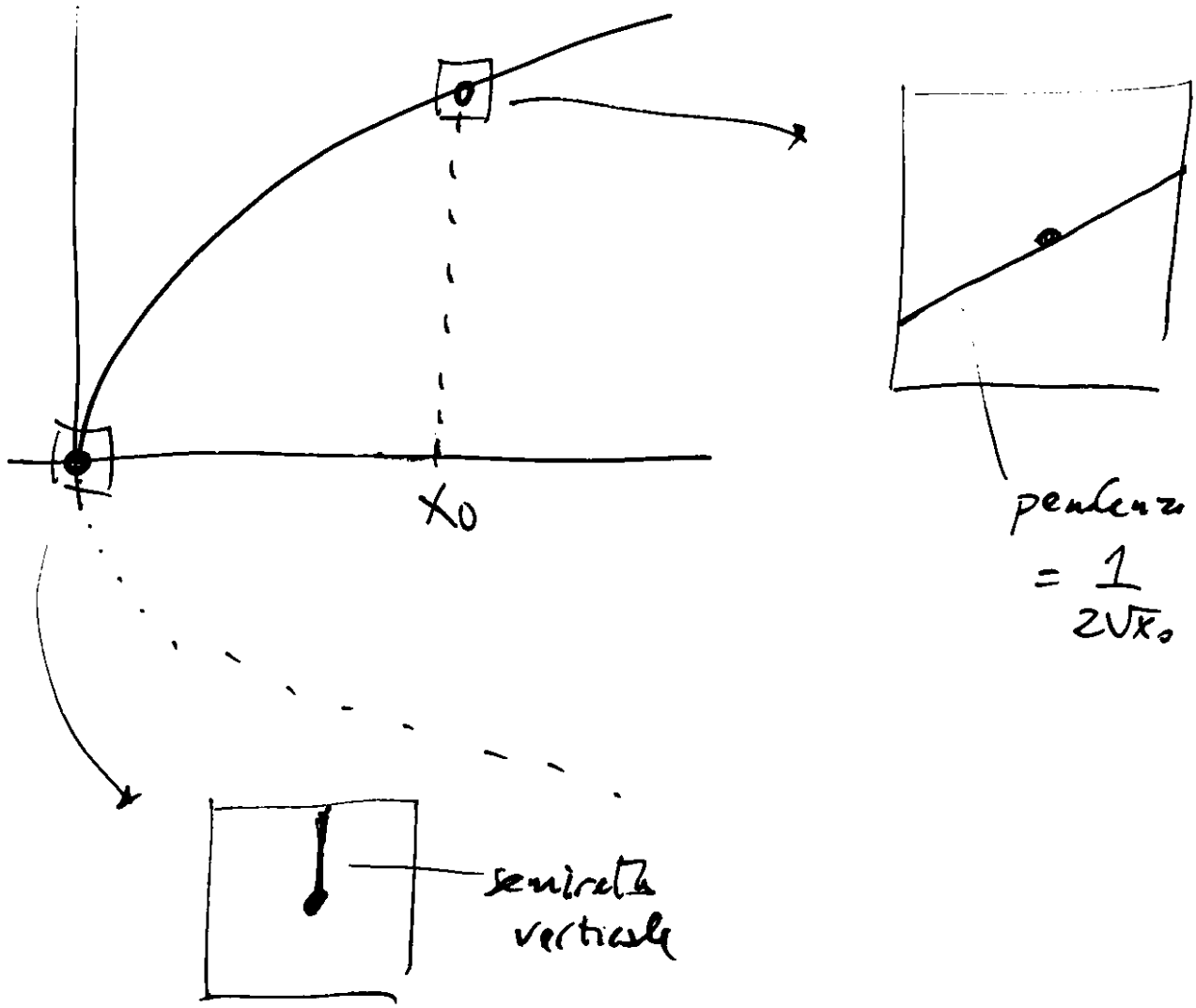
se $x_0 = 0$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$D\sqrt{x} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

se interpretata correttamente quando $x = 0$



La funzione $\sqrt{x}$ è derivabile
solo per $x > 0$

Per $x = 0$ la derivata esiste, ma è
infinita. La definizione di
derivabilità non è rispettata.

Questo è un altro esempio di una
funzione che è continua nell'origine
ma non è derivabile

19 aprile 2021 - p. 10

$f(x) = \sin x$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \qquad \frac{0}{0}$$

limite notevole

$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

Formule di prostaferesi

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} =$$

$\frac{x - x_0}{2} \to 0$

$$= \boxed{\cos x_0}$$

$$\boxed{D \sin x = \cos x}$$

19 aprile 2021 - p. 11

$f(x) = \cos x$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} \qquad \frac{0}{0}$$

Prostaferesi

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{-2 \operatorname{sen}\frac{x+x_0}{2} \operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-\operatorname{sen}\frac{x+x_0}{2} \operatorname{sen}\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} =$$

(il fattore $\frac{x-x_0}{2}$ al denominatore è evidenziato e tende a 1)

$$= -\operatorname{sen} x_0$$

$$\boxed{D \cos x = -\operatorname{sen} x}$$

$D \operatorname{sen} x = \cos x$ $\quad$ $D \cos x = -\operatorname{sen} x$

DELICATE

CALCOLO DEI LIMITI

LIMITI NOTEVOLI	COMBINAZIONI DI FUNZIONI
$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$	Algebra dei limiti
...	Funzione composta (cambio di variabile)
	Confronto

Insieme permettono di calcolare tantissimi limiti

CALCOLO DELLE DERIVATE

DERIVATE NOTEVOLI	COMBINAZIONI DI FUNZIONI
$D \operatorname{sen} x = \cos x$	Algebra delle derivate
$D e^x = e^x$	Funzione composta
⋮	...

Calcolo di derivate

ALGEBRA DELLE DERIVATE

Siano date 2 funzioni $f(x)$, $g(x)$ derivabili in x_0. Allora:

1) $f+g$ è pure derivabile in x_0 e

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(derivata della somma = somma delle derivate)

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$D(f+g) = Df + Dg$$

2) $f \cdot g$ (prodotto) è pure derivabile in x e

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x)\, g'(x_0)$$

$$D(fg) = (Df)\, g + f \cdot D(g)$$

3) se c è costante, anche $cf(x)$ è derivabile e $(cf)'(x_0) = c f'(x_0)$

(una costante moltiplicativa esce dalla derivata)

4) (reciproco) se $f(x_0) \neq 0$, anche $\frac{1}{f(x)}$ è derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

5) (rapporto) se $g(x_0) \neq 0$, anche $\frac{f(x)}{g(x)}$ è derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

Dimostrazione 1) $D(f+g) = f' + g'$

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) =$$

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0)$ per ipotesi

$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to g'(x_0)$ per ipotesi

esistono finiti

$$= f'(x_0) + g'(x_0).$$

2) prodotto $D(fg) = (Df)\,g + f\,(Dg)$

$$(fg)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0}$$

19 aprile 2021 - p. 16

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

$f(x) \to f(x_0)$ — per ipotesi f è derivabile quindi anche continua

$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to g'(x_0)$ — per ipotesi esiste il limite

$g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0)$

$$= f(x_0) g'(x_0) + g(x_0) f'(x_0)$$

4) reciproco $\quad D\frac{1}{f} = -\frac{f'}{f^2}$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x) - \left(\frac{1}{f}\right)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x_0) - f(x)}{f(x) f(x_0)}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\underbrace{\frac{1}{f(x) f(x_0)}}_{\text{cost} \neq 0} \cdot \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} \right) =$$

$\downarrow$

$f(x_0)$

f è continua (essendo derivabile)

rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f(x) f(x_0)} \cdot \left(- \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \right)$$

$\downarrow f(x_0)$ $\qquad$ $\downarrow f'(x_0)$ finito

$$= - \frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2} .$$

5) quoziente

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = D\left(f \cdot \frac{1}{g}\right) =$$

$$= f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot D\frac{1}{g} =$$

$$= \frac{f'}{g} + f \cdot \left(- \frac{g'}{g^2} \right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

19 apr. 6 2021 P 78

Prima applicazione $D x^n = n x^{n-1}$

$n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1$

Dimostrazione per induzione

@ $P(n) = \left(D x^n = n x^{n-1} \right)$

CASO BASE $n = 1$

$D x^1$

$f(x) = x$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

$D x^1 = Dx = 1$

$n x^{n-1} = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$

numero 0 secco

$0^0 = 1$ qui

$x^0 = 1$

CASO base dimostrato $1 = 1$

PASSO INDUTTIVO

$P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

$Dx^n = n x^{n-1}$ $\not\Rightarrow$ $Dx^{n+1} = (n+1)x^n$

$Dx^{n+1} = D(x^n \cdot x)$ prodotto

$= Dx^n \cdot x + x^n Dx$

$= (n x^{n-1}) \cdot x + x^n Dx =$ (caso base)

$= n x^n + x^n \cdot 1 =$

$= (n+1) x^n$

C.V.D.

$$\boxed{Dx^n = n x^{n-1}}$$

$n \in \mathbb{N}$

$n \geq 1$

senza limitazioni su x

$n = 0$?

$Dx^0 = 0 \cdot x^{0-1}$

$D1 = 0 \cdot \frac{1}{x} = 0$

$\boxed{Dx^n = n x^{n-1}}$ funziona anche per $n=0$ per di interpretarla correttamente per $x=0$

$n < 0$? $n \in \mathbb{Z}$ $m = -n > 0$

$$Dx^n = D\frac{1}{x^{-n}} =$$

$$= D\frac{1}{x^m} = -\frac{D(x^m)}{(x^m)^2} =$$

derivata del reciproco

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$= -\frac{m x^{m-1}}{x^{2m}} = -m x^{m-1-2m} =$$

$$= -m x^{-m-1} = n x^{n-1}$$

$\boxed{(Dx^n) = n x^{n-1}}$ vale anche per $n<0$ $n \in \mathbb{Z}$ $(x \neq 0)$

19 aprile 2021 - p. 21

Riassunto

$$\boxed{D x^n = n x^{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$D \operatorname{tg}(x) = D \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} =$$

$$= \frac{(D \operatorname{sen} x)\cos x - (\operatorname{sen} x) D(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cos x - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \begin{cases} 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2 = \\ \qquad = 1 + \operatorname{tg}^2 x \\ \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$$

$$\boxed{D \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Derivata della funzione composta

Se $\begin{cases} f \text{ è derivabile in } g(x_0), \\ g \text{ è derivabile in } x_0. \end{cases}$

Allora $f \circ g$ è derivabile in x_0 e

$$(D f \circ g)(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0)$$

$$D(f \circ g) = (f' \circ g) \cdot g'$$

($f' \circ g$: composizione; $\cdot$: moltiplicazione)

la derivata della composizione è

il prodotto delle derivate

(calcolate nei punti opportuni)

Derivata della composizione =

(Derivata della funzione esterna,
calcolata nella funzione interna)

moltiplicata per la derivata della
funzione interna.

Cenno di dimostrazione

$$(f\circ g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(f\circ g)(x) - (f\circ g)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right)$$

$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \to g'(x_0)$

CAMBIO DI VARIABILE

$y = g(x) \to g(x_0) = y_0$

$\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \to f'(y_0) = f'(g(x_0))$

$$= f'(g(x_0))\, g'(x_0)$$

Problema in questa dimostrazione:

chi dice che $g(x) - g(x_0) \neq 0$?

potrebbe essere nullo.

La difficoltà si può ovviare.

☆ Saltiamo i dettagli.

REGOLE DI DERIVAZIONE

Derivata della funzione composta:

$$D(f \circ g)(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

Applicazione $D(\cos(3x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) =$

(f, $g(x)$)

$$= (\cos'(3x)) \cdot 3 = (-\operatorname{sen}(3x)) \cdot 3 =$$

$$= -3 \operatorname{sen}(3x)$$

$$D \operatorname{sen}(x^2 - 2x) = \cos(x^2 - 2x) \cdot (2x - 2)$$

Applicazione notevole:

$$D\, x^\alpha \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \text{ (non intero)}$$

$\boxed{x > 0}$ $(x \geq 0)$

$$= D\left(e^{\lg x}\right)^\alpha = D\, e^{\alpha \lg x} =$$

$$= D \exp(\alpha \lg x) = (\exp')(\alpha \lg x) \cdot D(\alpha \lg x) =$$

(f, g)

$$= \exp(\alpha \lg x) \cdot \alpha\, D \lg x =$$

$$= e^{\alpha \lg x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \left(e^{\lg x}\right)^\alpha \alpha \frac{1}{x} =$$

$$= x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha\, x^{\alpha - 1}$$

Riassumendo:

$$\boxed{Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}} \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ x>0$$

Già vista:

$$\boxed{Dx^n = n x^{n-1}} \qquad n \in \mathbb{Z},\ x \neq 0 \quad \text{(} x \text{ negativa OK)}$$

stessa formula

23 apr 2021 - p. 2

$$D\sqrt{x} = Dx^{1/2} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} =$$

$$= \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

già nota

Esempio $\quad De^{3x} = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$

DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

Teorema Sia I un intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua e invertibile (quindi anche monotona), $x_0 \in I$. Supponiamo che f sia derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$. Allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$ e vale la formula

$$(Df^{-1})(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Cenno di dimostrazione.

$$(Df^{-1})(f(x_0)) = \lim_{y \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)}$$

chiamiamo $f(x_0) = y_0$

$$(Df^{-1})(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

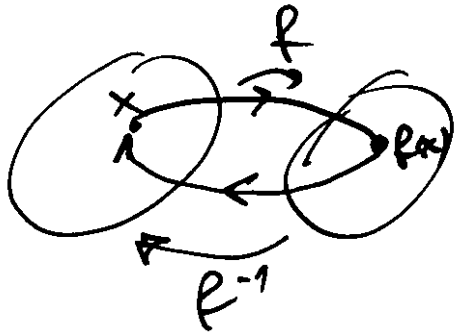
Cambio di variabile:
$y = f(x)$
$x = f^{-1}(y)$
$\downarrow$
$f^{-1}(f(x_0)) = x_0$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0) \neq 0$

Non c'è bisogno di ricordarsi la formula a memoria perché ce la possiamo ricavare facilmente partendo dalla formula fondamentale della funzione inversa:



$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y$$

$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x$

Calcolo la derivata di ambo i membri:

$$\underbrace{(Df^{-1})(f(x))} \cdot f'(x) = 1$$

$$(Df^{-1})(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

La derivata della funzione inversa è il reciproco della derivata della funzione di partenza.

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y$$

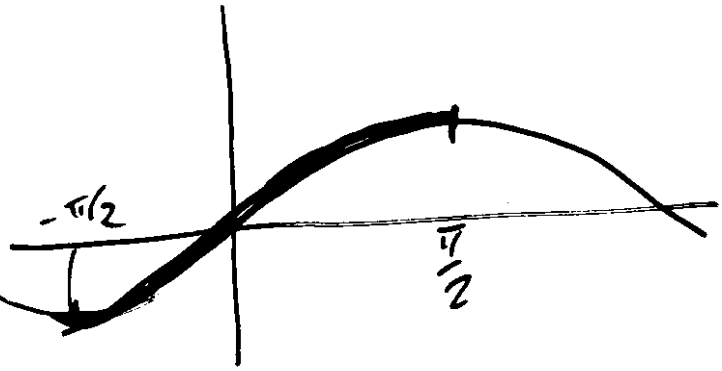
Deriviamo ambo i membri

$$f'(f^{-1}(y)) \cdot \underbrace{(Df^{-1})(y)} = 1$$

$$(Df^{-1})(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Applicazioni notevoli: derivate delle funzioni trigonometriche inverse

23 apr. 2021 - pag. 5



$f(x) = \operatorname{sen} x$

non è invertibile in blocco

La restrizione a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

è invertibile e l'inversa è chiamata arcsen

Formula fondamentale:

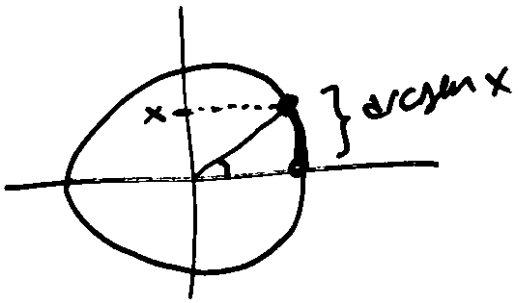
$$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$$

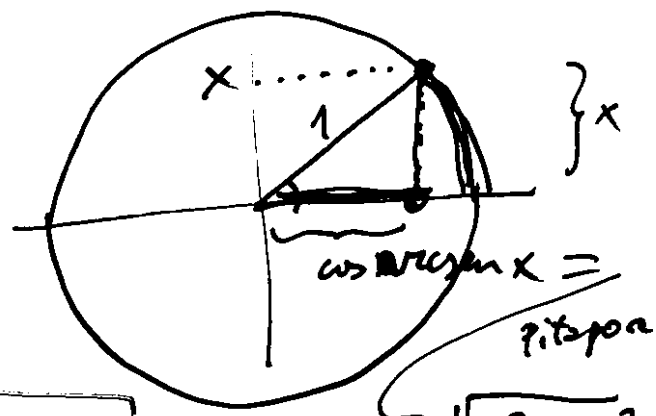
Deriviamo ambo i membri:

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) \cdot D\operatorname{arcsen} x = 1$$

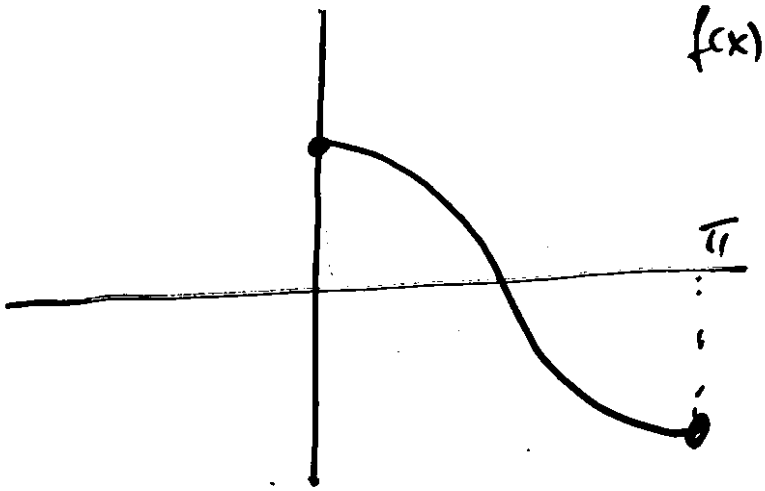
$$\boxed{D\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)}}$$

Di solito la si scrive in un altro modo





$$\boxed{D\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$



$f(x) = \cos x$ non è invertibile in blocco

Possiamo invertire la restrizione a $[0, \pi]$

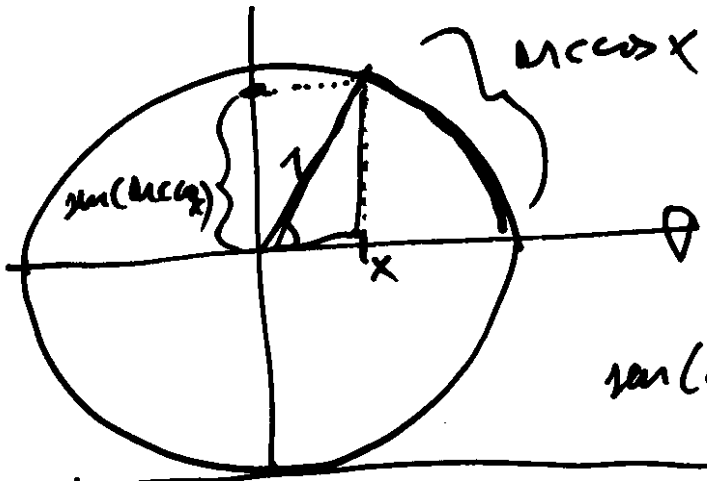
Formula di base

$$\cos(\arccos x) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Deriviamo ambo i membri

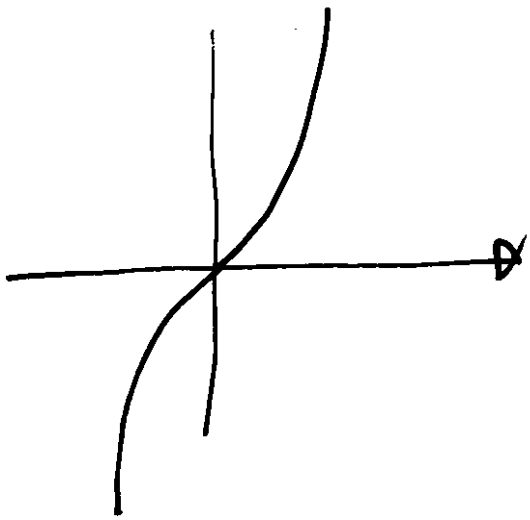
$$-\operatorname{sen}(\arccos x) \cdot D\arccos x = 1$$

$$\boxed{D\arccos x = -\frac{1}{\operatorname{sen}(\arccos x)}}$$



$$\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1^2 - x^2}$$

$$\boxed{D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$



$f(x) = \operatorname{tg} x$

non è invertibile in blocco

è invertibile la restrizione a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad \forall x$$

Deriviamo ambo i membri

$$(D\operatorname{tg})(\operatorname{arctg} x)\, D\operatorname{arctg} x = 1$$

$$D\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = \boxed{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$D\operatorname{arctg} x = \frac{1}{(D\operatorname{tg})(\operatorname{arctg} x)} =$$

$$= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} =$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

$$D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

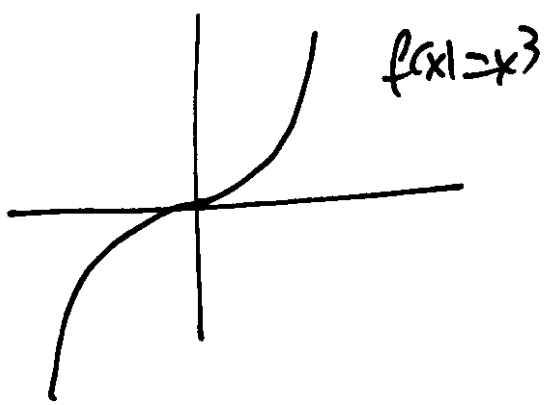
$$D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

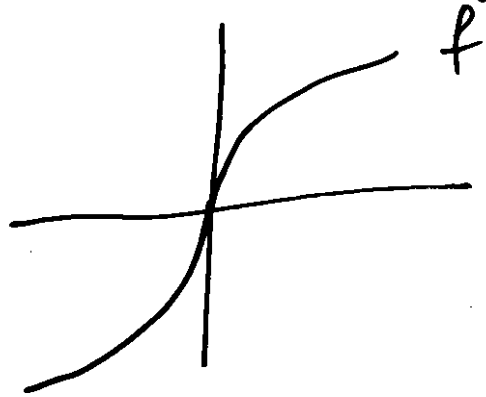
RADICE CUBICA

$$\sqrt[3]{x} = x^{1/3} \quad \text{se } x > 0$$

$$D\sqrt[3]{x} = D\, x^{1/3} = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-2/3}$$

$$= \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$





definita anche per $x < 0$

relazione base

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \text{ anche negativo}$$

Derviamo ambo i membri: $Dx^3 = 3x^2$

$$3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \cdot D\sqrt[3]{x} = 1$$

$$D\sqrt[3]{x} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\boxed{D\sqrt[3]{x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$$ è valida anche per $x<0$

$$D\lg|x| = \begin{cases} (\text{caso } x>0) \quad D\lg x = \frac{1}{x} \\ (\text{caso } x<0) \quad D\lg(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\boxed{D\lg|x| = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0}$$

$$D|x| = \frac{|x|}{x}$$

$$D\lg|x| = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{D\lg|x| = \frac{1}{|x|} \quad \text{SBAGLIATO}}$$

$$D\left(\lg\left|\frac{x}{x-1}\right|\right) = D\, f\left(\frac{x}{x-1}\right) =$$

$f(x) = \lg|x|$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ il valore assoluto è sparito

$$= f'\left(\frac{x}{x-1}\right) \cdot D\frac{x}{x-1} =$$

$$= \frac{1}{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{1\cdot(x-1) - x\cdot 1}{(x-1)^2} = \dots$$

DERIVATE DESTRE E SINISTRE E PUNTI SINGOLARI

Derivata destra

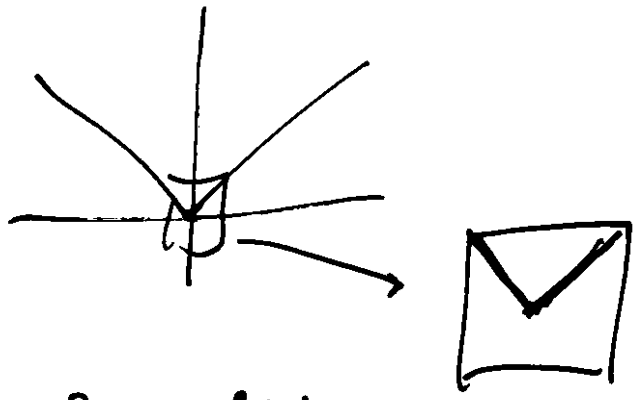
$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Derivata sinistra

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si possono classificare i punti in cui le derivate destra e sinistra o sono diversi o sono infiniti

$f(x) = |x|$



$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

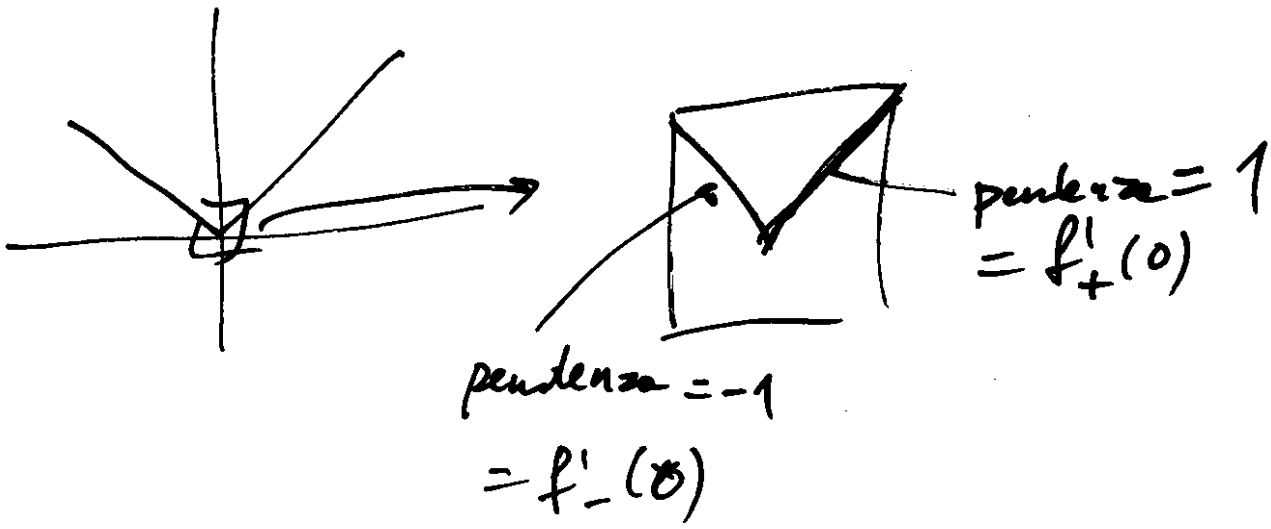
$$= \lim_{x \to 0+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = 1$$

diversi!

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \to 0-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = -1$$

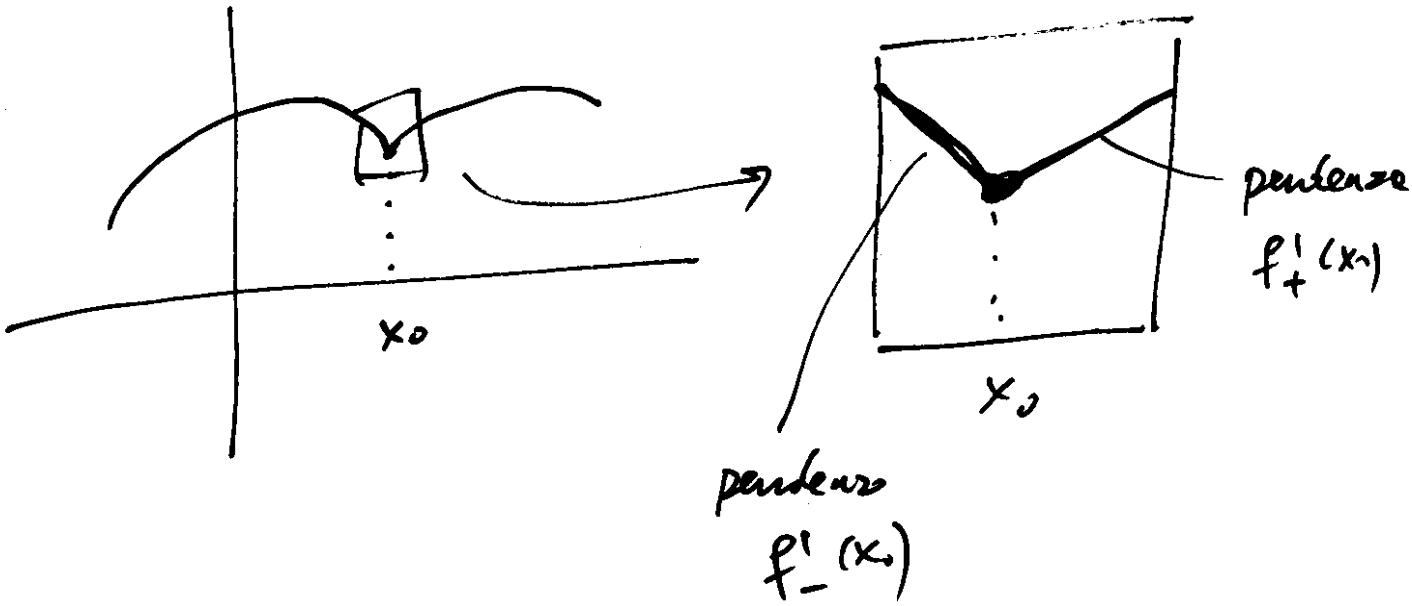
Interpretazione geometrica



Ci sono situazioni in cui

$f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ esistono entrambi finiti ma diversi.

In tali casi si parla di PUNTO ANGOLOSO



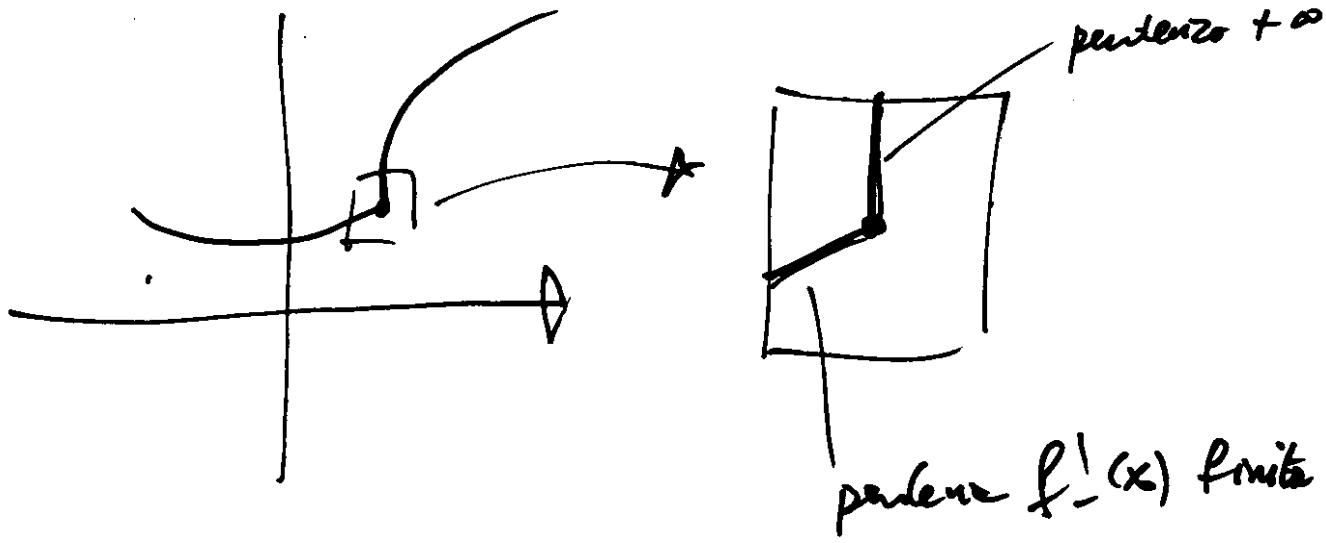
Mi posso aspettare punti angolosi in funzioni nella cui formula compare un valore assoluto.

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Possono capitare punti angolosi anche se ci sono $\sqrt{}$ nella formula.

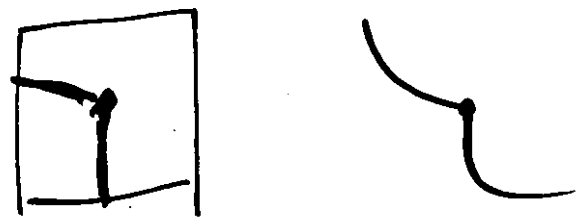
Altra situazione: $f'_-(x_0)$ finita

$f'_+(x_0) = +\infty$



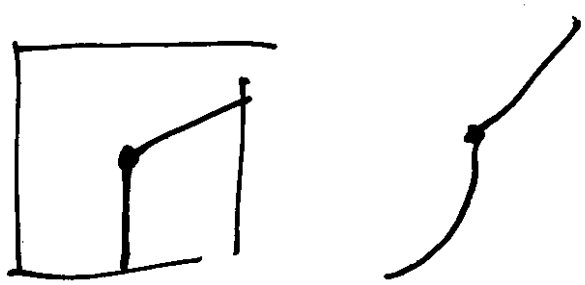
$f'_-(x_0)$ finita

$f'_+(x_0) = -\infty$



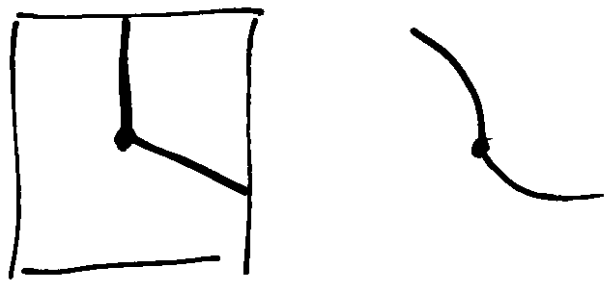
$f'_-(x_0) = +\infty$

$f'_+(x_0)$ finita



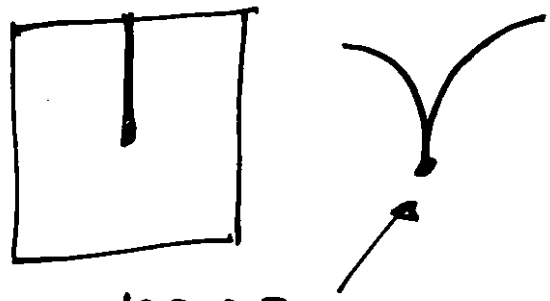
$f'_-(x_0) = -\infty$

$f'_+(x_0)$ finito



$f'_-(x_0) = -\infty$

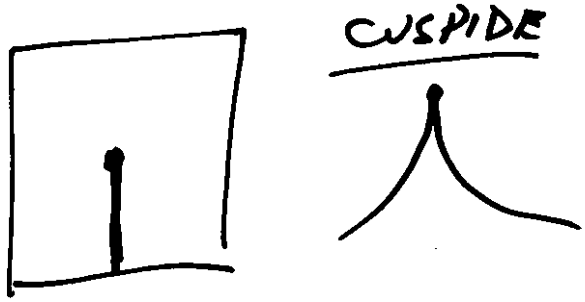
$f'_+(x_0) = +\infty$



CUSPIDE

$f'_-(x_0) = +\infty$

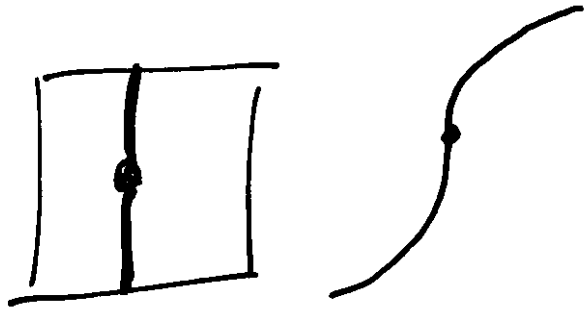
$f'_+(x_0) = -\infty$



CUSPIDE

$f'_-(x_0) = +\infty$

$f'_+(x_0) = +\infty$

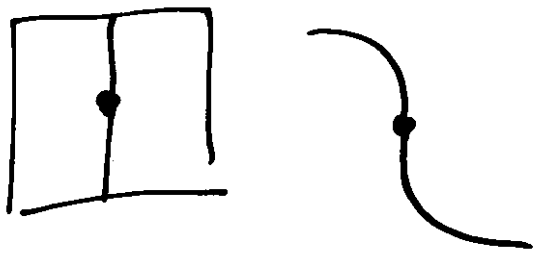


FLESSO VERTICALE ASCEND.

$\sqrt[3]{x}$

$f'_-(x_0) = -\infty$

$f'_+(x) = -\infty$



FLESSO VERTICALE DISCENDENTE

Derivate sinistra o destra infinita
possono capitare quando nella formula
della funzione ci sono radici quadrate
o cubiche

REGOLA PER LA CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE:

Se nella formula di una funzione ci
sono combinazioni di funzioni elementari
polinomi, funzioni razionali, radici,
esponenziali, log, trigonom., |·| valore assoluto
la funzione allora è continua
sul dominio

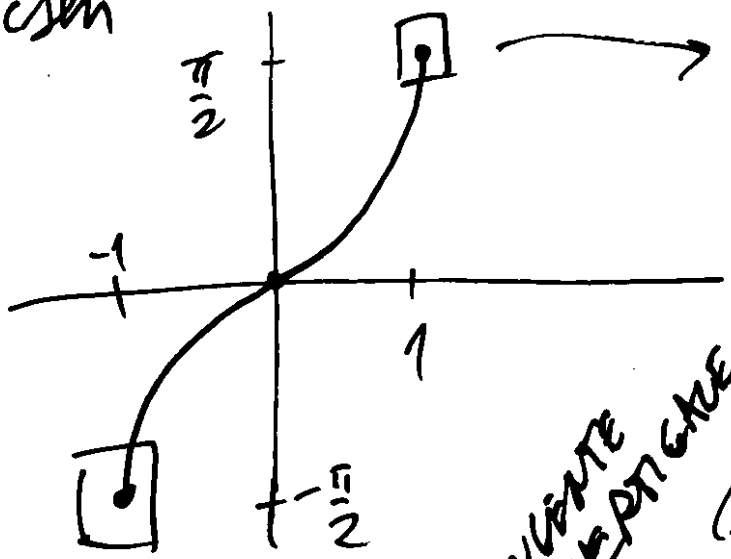
EXCLUSE: $\lfloor x \rfloor$ $\lceil x \rceil$ segno

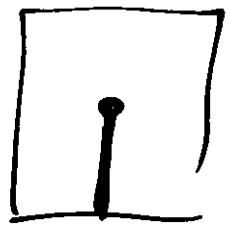
Derivabilità di una funzione
a partire dalla formula:

Se nella formula ho combinazioni di
polinomi, funzioni razionali
esponenziali, logaritmi, funzioni goniometriche dirette (non inverse)
la funzione è derivabile sul dominio.

ESCLUSE: Valore assoluto, radici,
arcsen, arccos, $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$, Sgn

arcsen



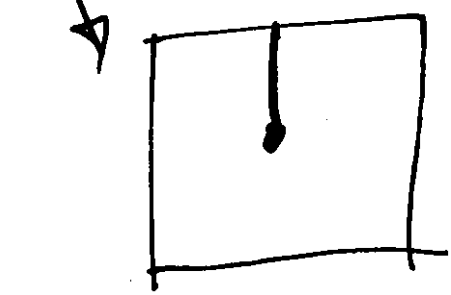


La derivata sinistra

$e^- +\infty$

TANGENTE VERTICALE

(la derivata destra non ha senso)



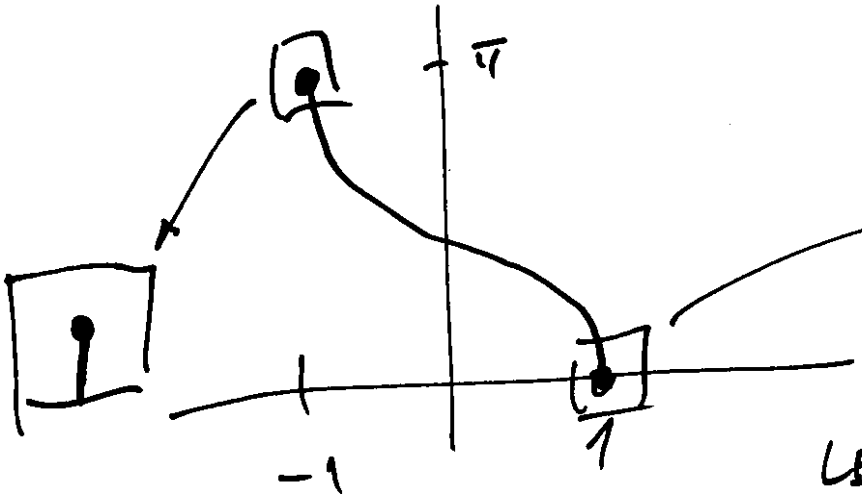
derivata destra $= +\infty$

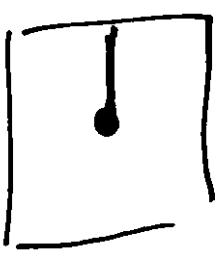
derivata sinistra non ha senso

$$D \arcsen x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x = 1^-$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-1^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

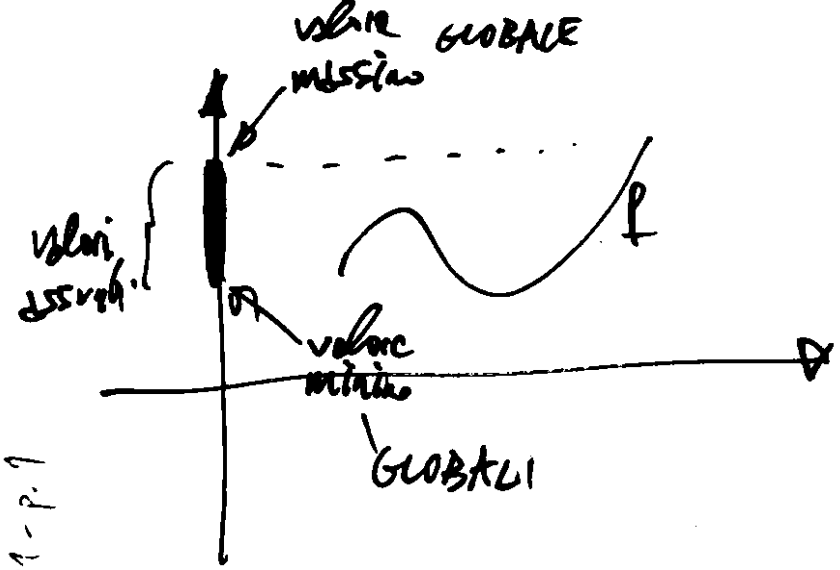
arccos x





LE ESTREMITÀ DEL GRAFICO HANNO TANGENTE VERTICALE

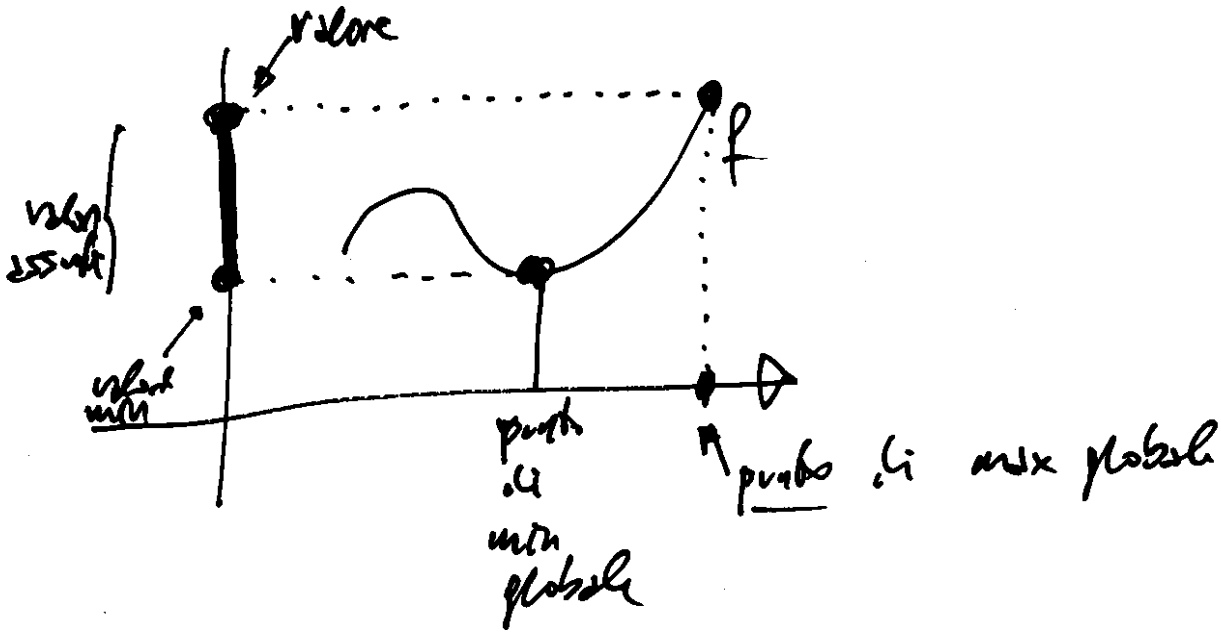
PUNTI DI MASSIMO E MINIMO LOCALE



30 apr 2021 - p. 1

I valori massimo e minimo GLOBALI dipendono solo dall'insieme dei valori assunti

PUNTI DI MAX/MIN GLOBALE

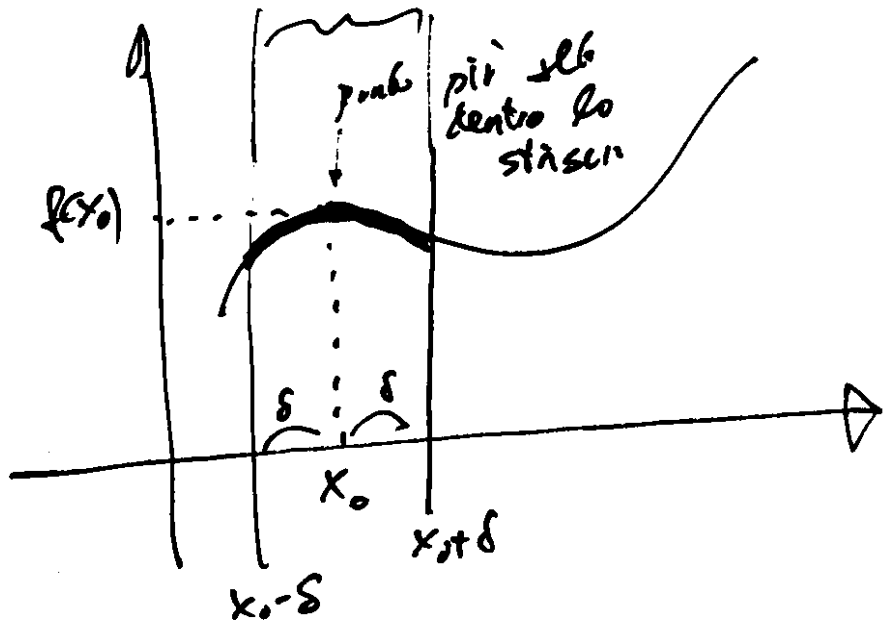


Introdurre una nomenclatura per le cime minori, o gli avvallamenti minori.

30 sept. 2021 - p 2

Def Un punto $x_0 \in \text{dom} f$ sarà detto **punto di massimo locale** se esiste un $\delta > 0$ tale che

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in \text{dom} f \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

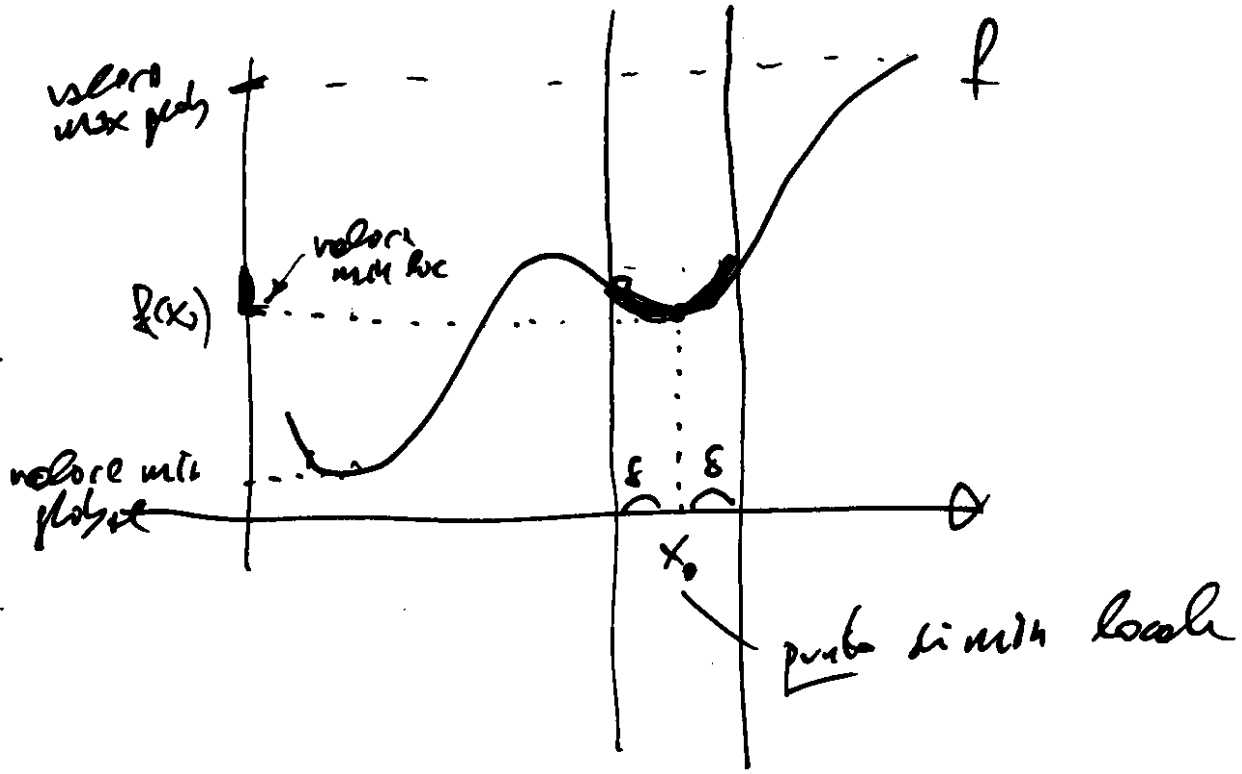


striscia

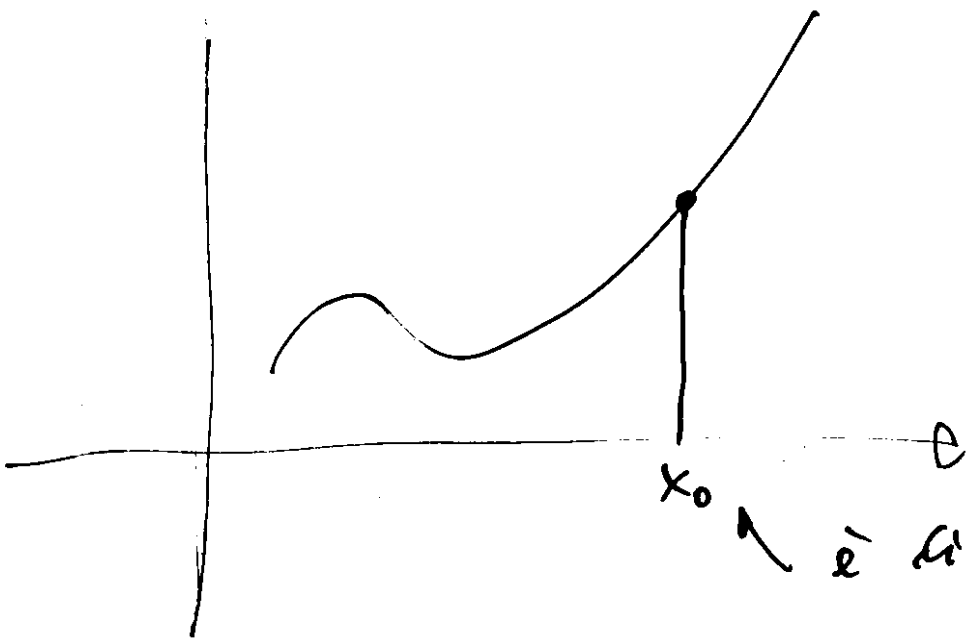
In termini più discorsivi, un punto è di massimo locale se è di massimo globale purché restringa l'attenzione ad un opportuno striscia verticale attorno a x_0

Analogamente un punto $x_0 \in \text{dom} f$ sarà detto **punto di minimo locale** se esiste un $\delta > 0$ tale che

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in \text{dom} f \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$



punto di min locale

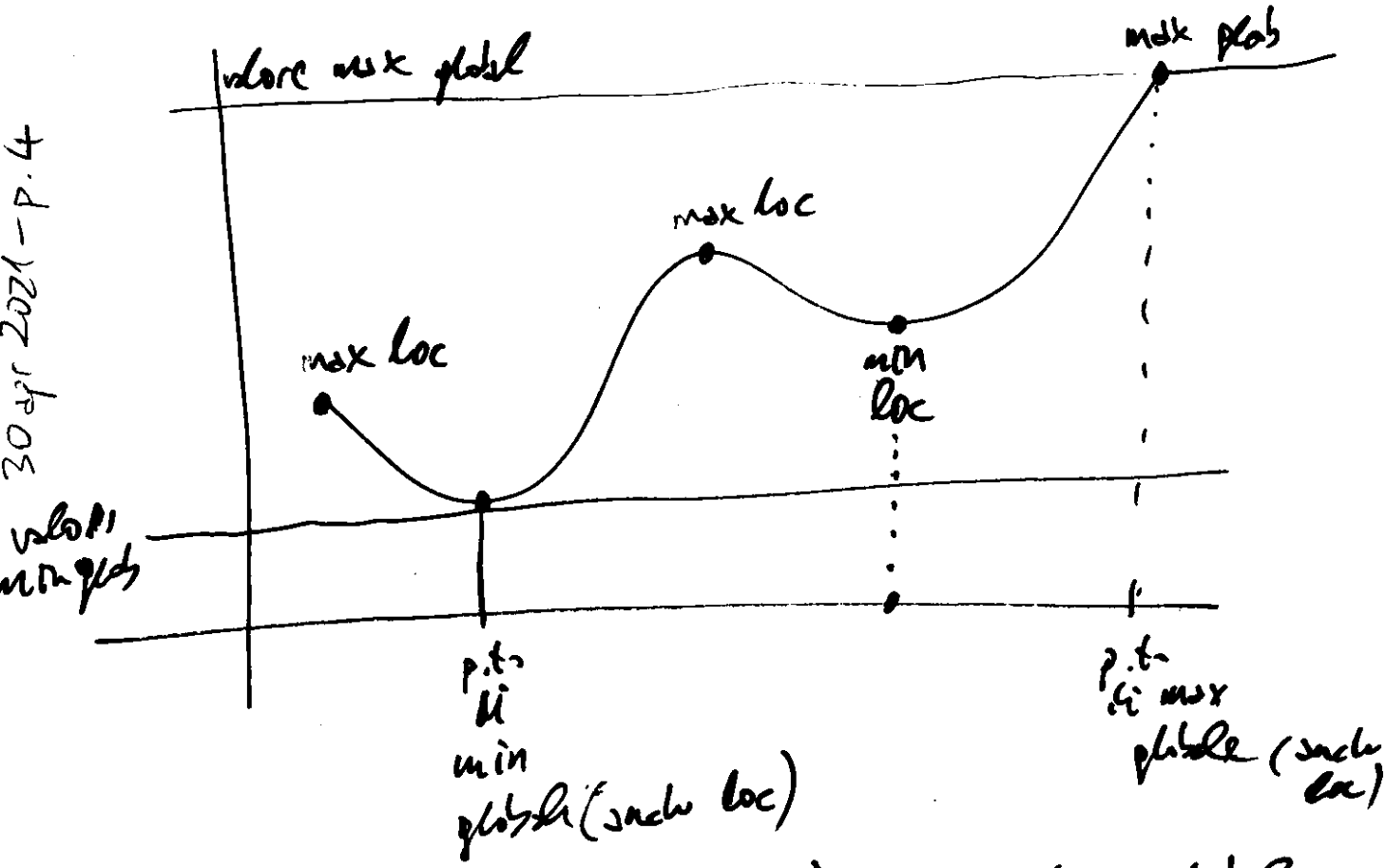


è di max o min locale?

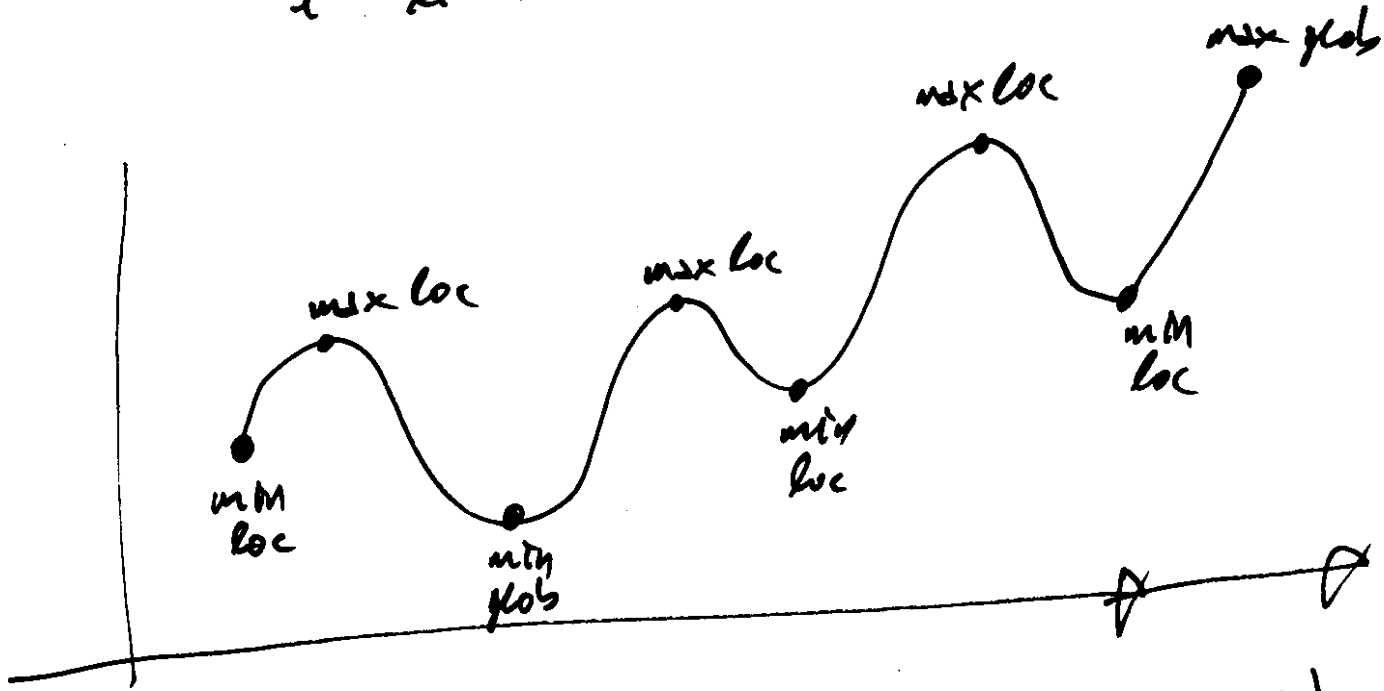
NO, è un punto di pendenza

I punti di max/min locale sono abbastanza

speciali



OSS se un punto di max/min globale, è di ANCHE di max/min locale.



punti estremali (di max o min locali)

Teorema di Fermat sui massimi/minimi locali INTERNI.

Enunciato Sia I un intervallo (non degenere, non un solo punto, non vuoto), $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in I$ un punto di massimo o minimo locale per f e x_0 sia INTERNO a I, cioè x_0 non sia un estremo di I. Supponiamo anche che esista la derivata $f'(x_0)$.

Allora $f'(x_0) = 0$

Più brevemente: in un punto di max/min loc interno la derivata si annulla (se c'è)

Dim semplificata: supponiamo che x_0 sia di max e non GLOBALE. (interno).
Per fissare le idee supponiamo che x_0 sia di max locale (interno).
Consideriamo il rapporto incrementale

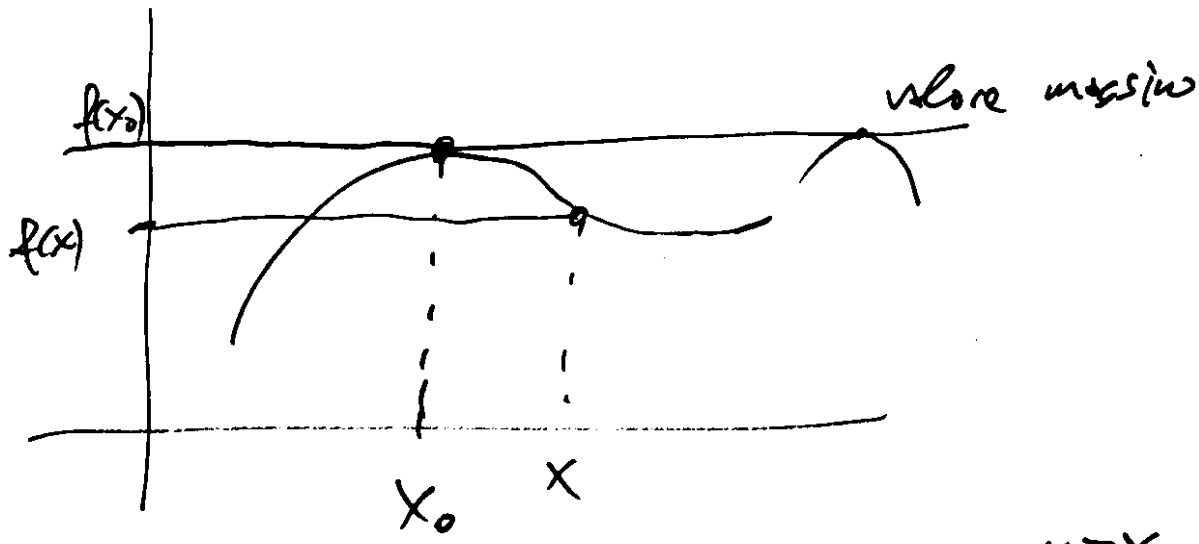
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e ne studio il segno.

Numeratore $f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in I$

$f(x)$ è un valore qualsiasi

$f(x_0)$ è il valore massimo che assume la funzione

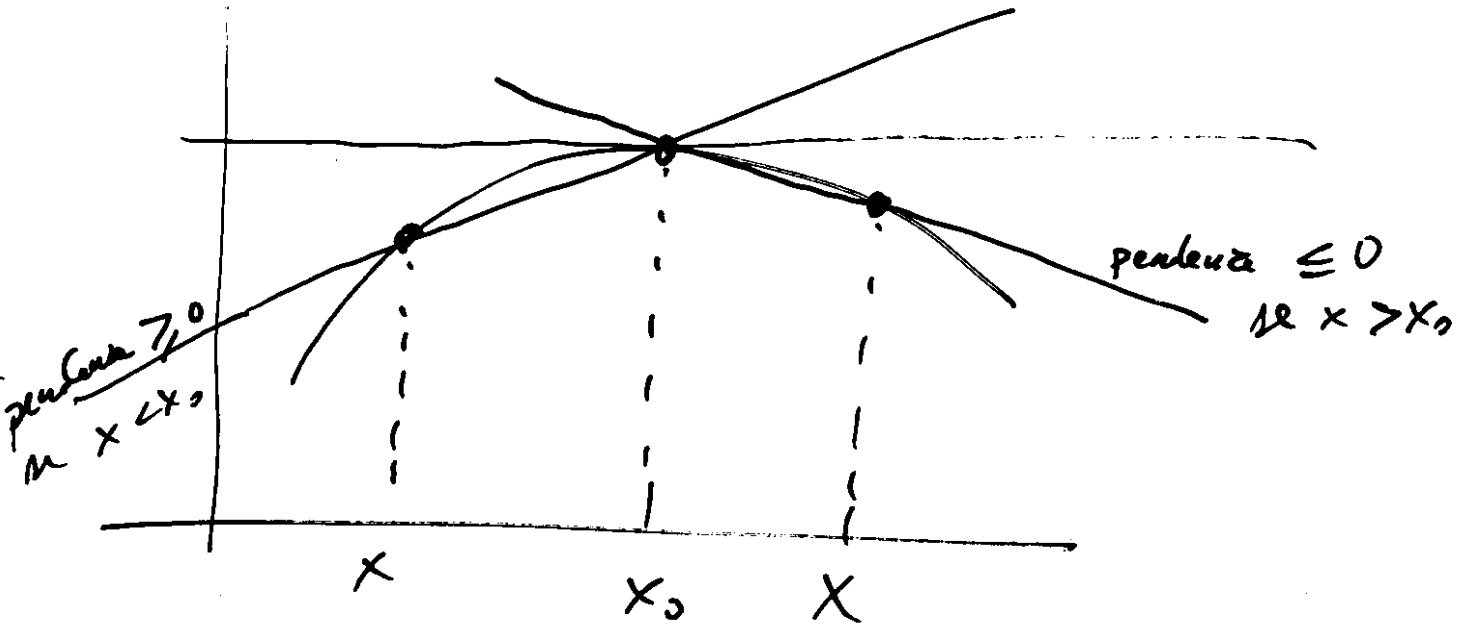


Denominatore $x - x_0 \begin{cases} > 0 & \text{se } x > x_0 \\ < 0 & \text{se } x < x_0 \\ = 0 & \text{se } x = x_0 \end{cases}$

Segno del rapporto incrementale:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & \text{se } x > x_0 \\ \geq 0 & \text{se } x < x_0 \\ \text{non ha senso} & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

$$\frac{\text{num} \leq 0}{\text{den} \geq 0}$$



Passiamo al limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Sfruttiamo quello che sappiamo sul segno del rapporto incrementale

Dividiamo il limite destro e sinistro

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\leq 0} \leq 0$$

(il passaggio al limite conserva le disug. deboli)

$$f'_-(x_0) = \left(\lim_{x \to x_0^-} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geq 0} \right) \geq 0$$

Per ipotesi la funzione è derivabile, e x_0 è interno a I, per cui

$f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ hanno entrambi senso, e sono uguali a $f'(x_0)$

$$f'(x_0) \begin{cases} = f'_+(x_0) \leq 0 \\ = f'_-(x_0) \geq 0 \end{cases}$$

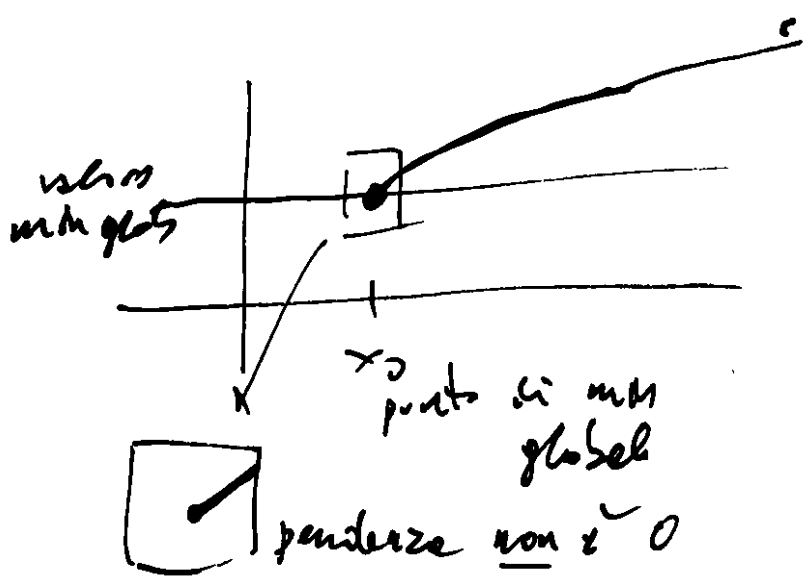
$$0 \leq f'(x_0) \leq 0$$

Conclusione: $\underline{f'(x_0) = 0}$ (VI)

OSS cosa succede se x_0 non è interno?

$$I = [x_0, +\infty[$$

↑ non è interno è l'estremo sinistro, min, inf



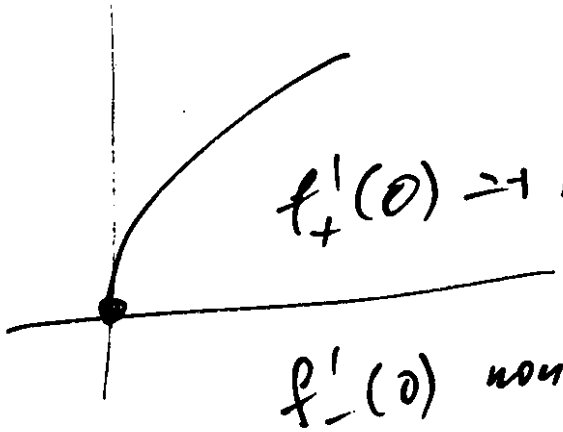
$f'(x_0)$?

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad I = [0, +\infty[$

punto di min globale NON INTERNO

$f'(0) = +\infty$ non è nulla

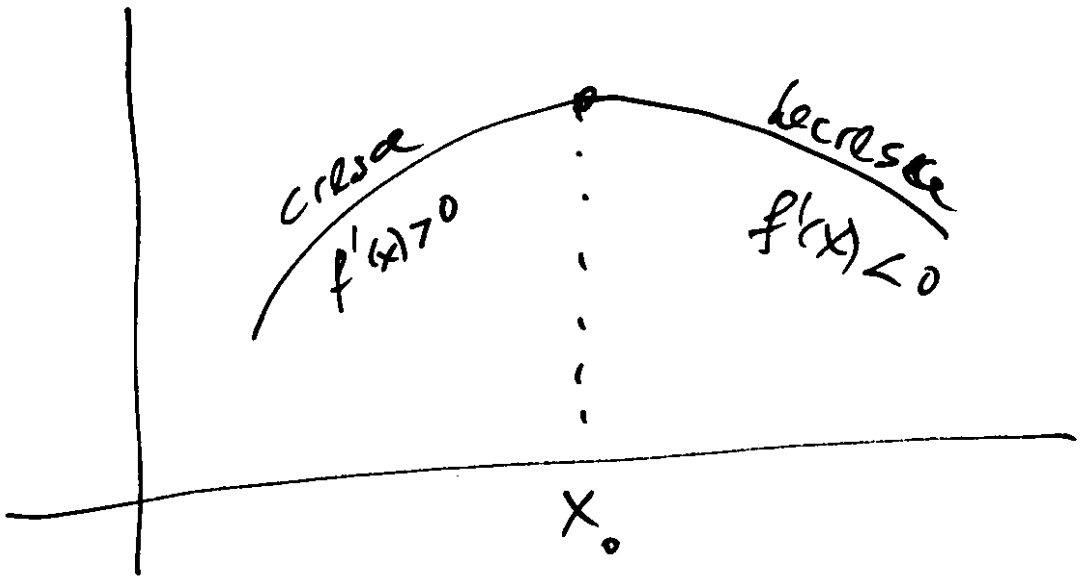
Se uno riguarda la dimostrazione,
se il punto non è interno, uno delle
due derivate destra o sinistra non ha senso



$f'_+(0) = +\infty$

$f'_-(0)$ non ha senso

variante della dimostrazione



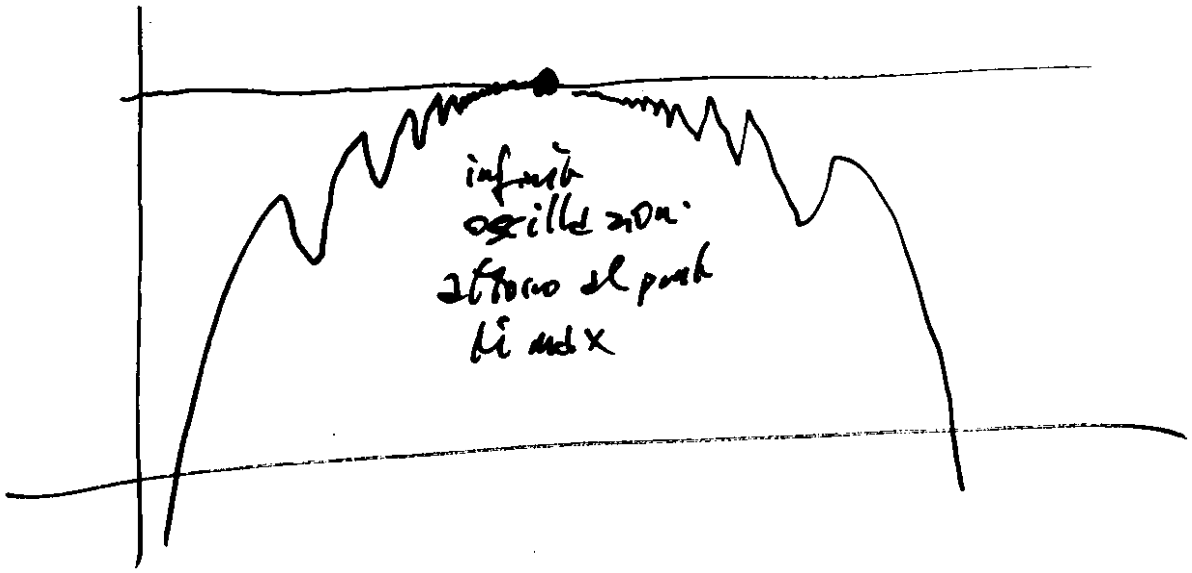
$$f'(x_0) = \begin{cases} \lim_{x \to x_0^+} \underbrace{f'(x)}_{<0} \leq 0 \\ \lim_{x \to x_0^-} \underbrace{f'(x)}_{>0} \geq 0 \end{cases} = 0$$

Questa dimostrazione non è valida in questo punto della teoria

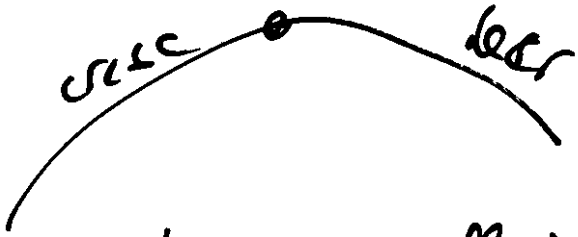
Non abbiamo ancora dimostrato il legame fra crescenza/decrescenza e segno della derivata

Altro problema: chi ci dice che esiste δx_0 la funzione cresce e a destra decresce?

Non segue dalle ipotesi del teorema



La situazione semplice



andrebbe messa nelle ipotesi

Se però lo mettessimo nelle ipotesi avremmo un teorema molto meno applicabile e questo renderebbe più faraginoso la teoria che segue.

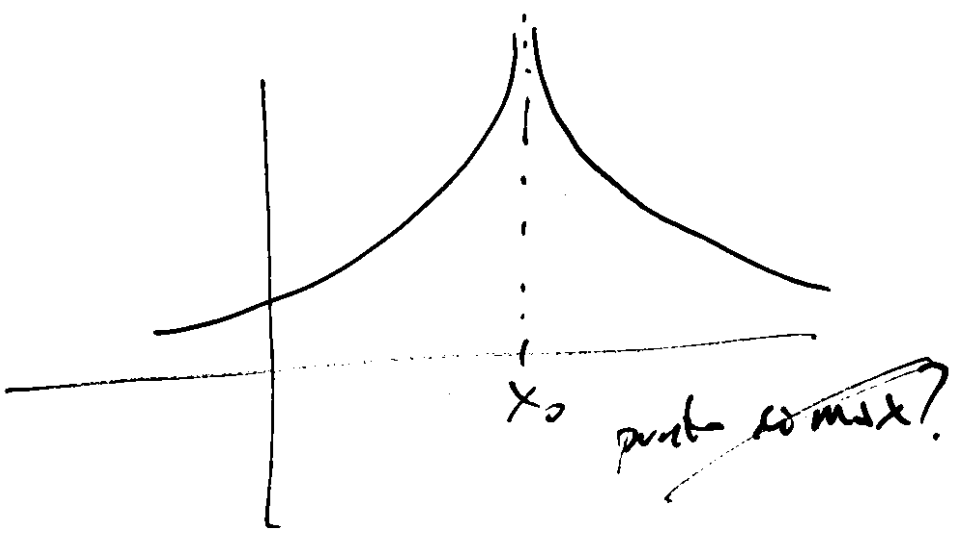
Terzo problema: la dimostrazione richiede che $f'(x)$ esista anche fuori da x_0, e che f' sia continua in x_0 che non sono nelle ipotesi, e andrebbero aggiunte.

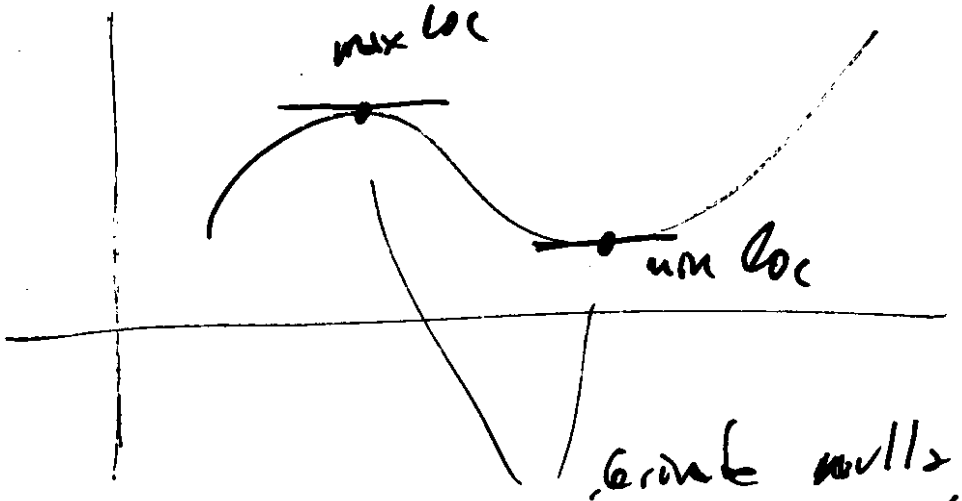
La dimostrazione vedute è corretta, ma non è accettabile come fondamento della teoria

$f(x_0) \geq f(x)$

valore in x_0 — valore in altri punti

Nella definizione di punto di max/min loc./glob bisogna poter calcolare la funzione nel punto x_0 e con f

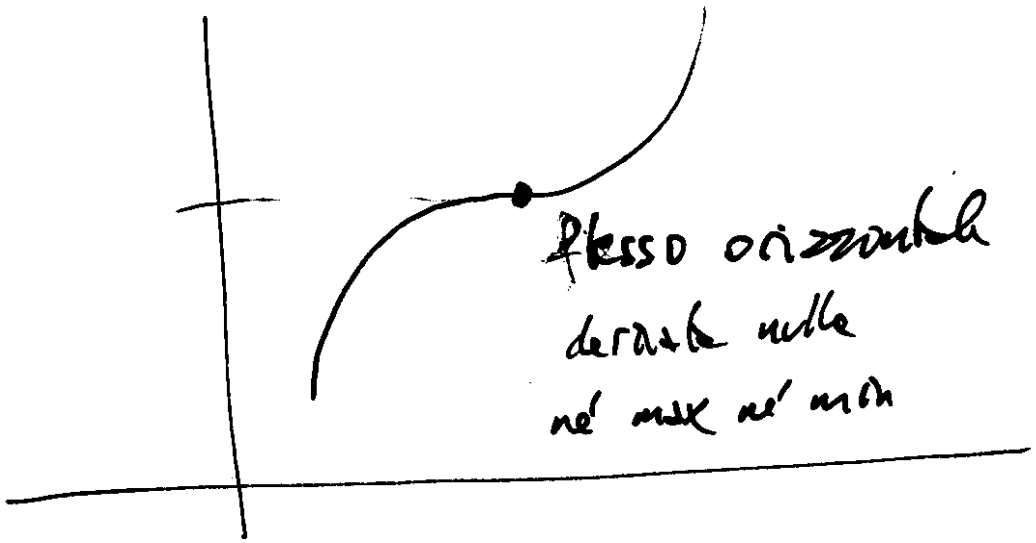


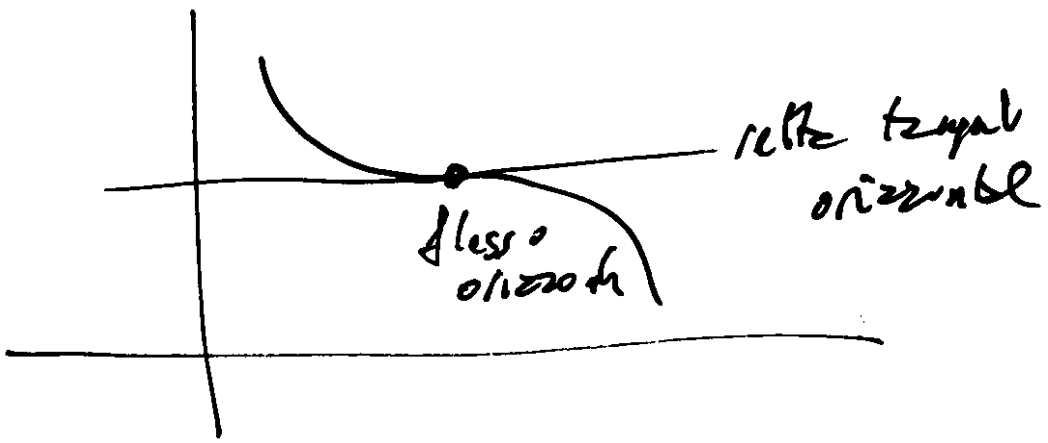


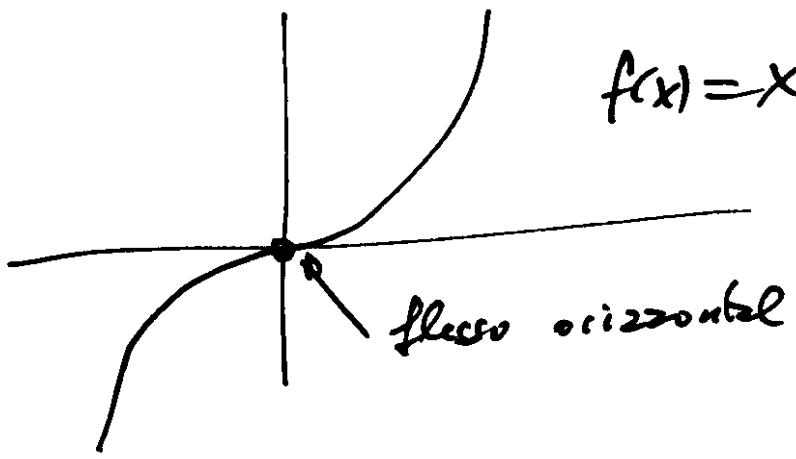
derivata nulla in entrambi i casi

Il teorema di Fermat non distingue fra massimi e minimi

Non cadere nel tranello di pensare che se in un punto x_0 interno alla derivata si annulla, questo sia automaticamente un max o un min.

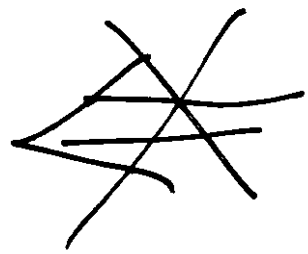






x_0 interno $\quad \exists f'(x_0)$

x_0 di max o min locale $\Longrightarrow f'(x_0) = 0$



Se $f'(x_0) = 0$ c'è buona probabilità che x_0 sia di max/min locale ma non è detto

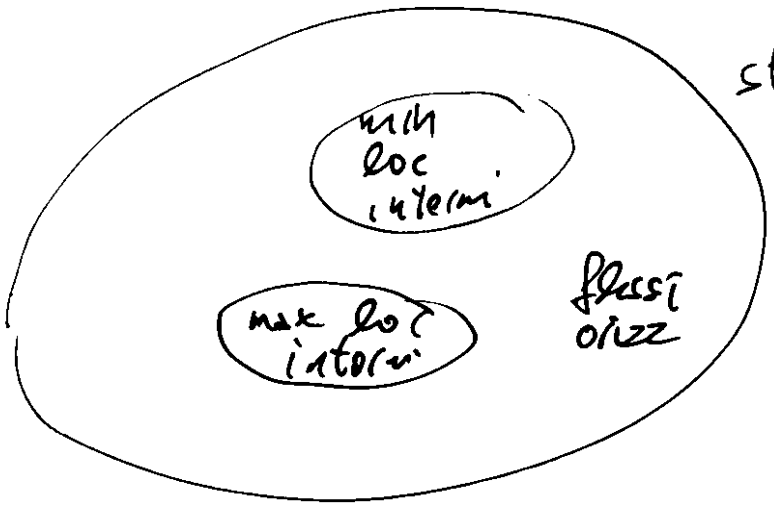
Nomenclatura

x_0 è detto punto estremale se è di max o min locale

x_0 è detto punto STAZIONARIO se $f'(x_0) = 0$

Fermat dice che i punti estremali interni sono stazionari.

Però non tutti i punti stazionari sono estremali



Oss Nel teorema di Fermat,
il fatto che x_0 sia di max o min locale è un punto di partenza del teorema, l'esistenza è per ipotesi. Non si dimostra l'esistenza.

Il teorema di Fermat può servire per restringere i possibili candidati a essere punti di max/min locale: questi vanno cercati dove la derivata si annulla, oppure agli estremi.

In questo corso non approfondiamo la teoria dei max/min, ci interessa il teorema di Fermat perché è uno scalino della teoria.

I TEOREMI DEL VALOR MEDIO

Teorema di Rolle Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è una funzione continua su $[a,b]$, e derivabile su $]a,b[$, e tale che $f(a)=f(b)$, allora $\exists\, c\in]a,b[$ tale che $f'(c)=0$.

Dim Poiché f è continua su $[a,b]$, ci può applicare il teorema di Weierstrass sui max e min globali:

$\exists\, x_{min}\in[a,b]$ tale che $\min f = f(x_{min})$

$\exists\, x_{max}\in[a,b]$ tale che $\max f = f(x_{max})$

Useremo anche il teorema di Fermat che dice che nei punti di max/min locali interni la derivata è nulla. L'applicazione non è immediata perché non è detto che x_{min} sia interno e neanche che x_{max} ci interno.

Per ovviare il problema osserviamo che $f(a)=f(b)$ sono valori assunti da f, quindi sono intermedi fra il $\max f$ e il $\min f$, cioè

$$\min f = f(x_{min}) \le f(a)=f(b) \le \max f = f(x_{max})$$

(può essere $=$ oppure $<$) (può essere $=$ oppure $<$)

10 mag 2021 - pt 2

Ci sono 4 combinazioni possibili. Verifichiamole una alla volta.

1° caso $f(x_{min}) = \min f = f(a) = f(b) = \max f = f(x_{max})$

La situazione è banale, max e min valore coincidono, e quindi la funzione è costante.
La derivata è nulla dappertutto.
La tesi del teorema vale.

2° caso $f(x_{min}) = \min f < f(a) = f(b) = \max f = f(x_{max})$

x_{min} non può coincidere né con a né con b

- Se coincidesse con a, $f(a) < f(a)$ assurdo
- Se coincidesse con b, $f(b) < f(b)$ "

x_{min} è interno, per il teorema di Fermat

$$f'(x_{min}) = 0.$$

Possiamo prendere $c = x_{min}$.

3° caso $f(x_{min}) = \min f = f(a) = f(b) < \max f = f(x_{max})$

x_{max} non può coincidere né con a né con b

Analogo per Fermat $f'(x_{max}) = 0$.

4° caso $f(x_{min}) = \min f < f(a) = f(b) < \max f = f(x_{max})$

Allora x_{min} e x_{max} sono entrambi interni
La derivata si annulla in entrambi. CVD

10 mag 2021 - p 3

Teorema di Lagrange Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$. Allora $\exists\, c \in]a,b[$ tale che

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}.$$

Dim Funzione ausiliaria:

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right)$$

g è definita su $[a,b]$, continua su $[a,b]$, derivabile su $]a,b[$, la derivata di g sarà:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \forall x \in]a,b[.$$

Alla funzione g si può applicare **Rolle**:

$$g(a) = f(a) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) \right) = 0$$

$$g(b) = f(b) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) \right) =$$

$$= f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0$$

$$g(a) = g(b).$$

Applichiamo Rolle: $\exists\, c \in]a,b[$ tale che $\boxed{g'(c) = 0}$

$$\boxed{g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Combinando le due: $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ / da cui $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

10 mar 2021 - p.4

Teorema di Cauchy. Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue su $[a,b]$ e derivabili su $]a,b[$. Allora esiste $c \in]a,b[$ tale che

$$\det \begin{pmatrix} f(a)-f(b) & f'(c) \\ g(a)-g(b) & g'(c) \end{pmatrix} = 0.$$

Variante che applicheremo:

Teorema di Cauchy variante Sia f, g come sopra, però supponiamo anche che

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[.$$

Allora $\exists\, c \in]a,b[$ tale che

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

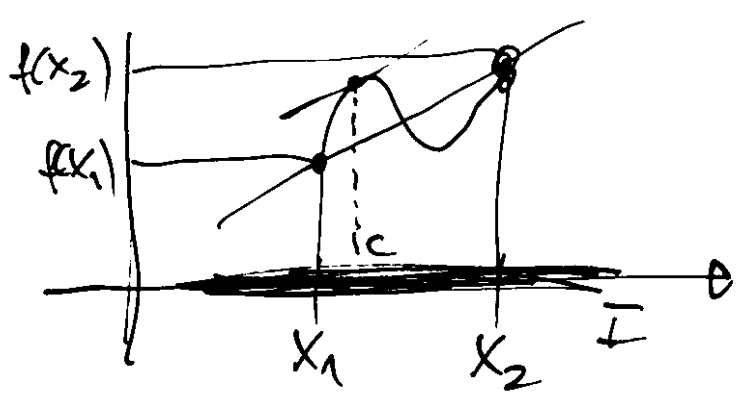
APPLICAZIONI DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

10 mag 2021 - p. 5

Teorema della derivata nulla. Sia I un intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su I e derivabile nei punti interni.
Allora si equivalgono le due condizioni seguenti:

1) f è costante
2) $f'(x) = 0 \quad \forall x$ dove la derivata esiste.

Dim La parte banale è $1 \Rightarrow 2$.
Se una funzione è costante, la derivata è zero, direttamente dalla definizione di derivata.
Veniamo alla implicazione inversa.
Supponiamo che la derivata sia sempre nulla.
Vogliamo dimostrare che f è costante.
Prendiamo due punti $x_1, x_2 \in I$ e verifichiamo che f ha lo stesso valore nei due punti (seguirà che f è costante).
Per esempio $x_1 < x_2$. Possiamo applicare il teorema di Lagrange alla f nell'intervallo $[x_1, x_2]$



10 mag 2021 - 7.6

$\exists c \in]x_1, x_2[$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Abbiamo supposto che $f'(x) = 0 \ \forall x$.

La tesi vale quindi anche in c:

$$= 0 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

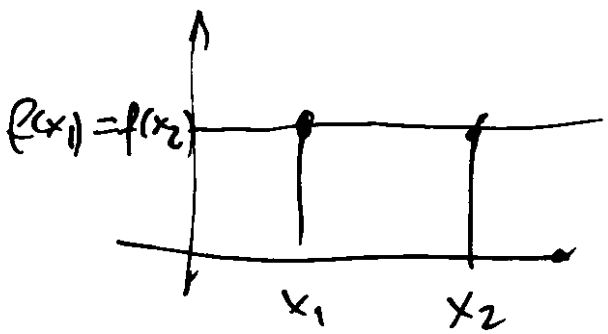
moltiplichiamo per $x_2 - x_1$ (che è $\neq 0$)

otteniamo

$$f(x_2) - f(x_1) = 0$$

da cui

$$\boxed{f(x_2) = f(x_1)}$$



La f ha lo stesso valore

agli estremi. CVD.

ATTENZIONE

$$f'(x_0) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Esempio $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

Calcoliamo la derivata:

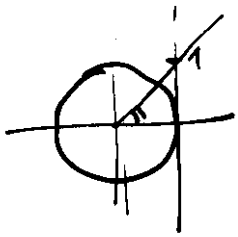
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

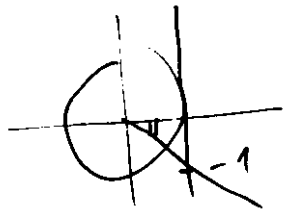
$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

La derivata di f è sempre nulla.

Per il teorema della derivata nulla, f è costante.

$$f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$





$$f(-1) = \operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg} \frac{1}{-1} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

diversi

La funzione non è costante.

Il problema è che il dominio di f non è un intervallo: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

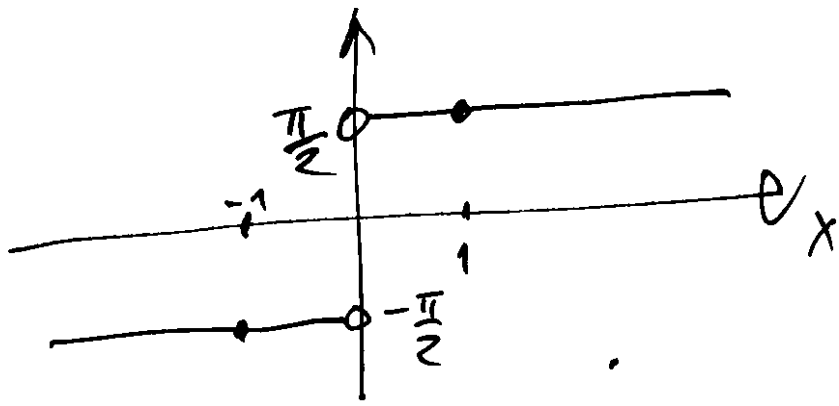
Non siamo autorizzati ad applicare il teorema.

Però possiamo applicare il teorema separatamente per $x>0$ e per $x<0$

f è costante su $]0,+\infty[$

f è costante su $]-\infty,0[$

ma con due costanti diverse



MONOTONIA E SEGNO DELLA DERIVATA

10 mag 2021 – p. 9

Teorema Sia I un intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su I e derivabile nei punti interni. Allora

$(f$ è deb. cresc. $) \iff (f'(x) \geq 0 \quad \forall x)$

$(f$ è deb. decresc. $) \iff (f'(x) \leq 0 \quad \forall x)$

$(f$ è strett. cresc. $) \not\iff (f'(x) > 0 \quad \forall x)$

$(f$ è strett. decresc. $) \not\iff (f'(x) < 0 \quad \forall x)$

Dim del primo

Supponiamo che f sia debolmente crescente.

Consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

studiamo segno di num. e denom.

1° caso $x_0 < x$.

Poiché f è deb. cres. $f(x_0) \leq f(x)$

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{>0}} \geq 0$$

2° caso $x < x_0$

Poiché f è debolmente crescente $f(x) \leq f(x_0)$

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{<0}} \geq 0$$

In tutti i casi il rapporto incrementale è ≥ 0

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x \neq x_0$$

Passando al limite la disuguaglianza debole si conserva:

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$= f'(x_0)$$

Quindi $f'(x_0) \geq 0 \quad \forall x_0$

Viceversa supponiamo che $f'(x) \geq 0 \ \forall x$.

Dobbiamo dimostrare che f è debolmente crescente.

Prendiamo $x_1 < x_2$ in I

Applichiamo Lagrange su $[x_1, x_2]$:

$\exists c \in]x_1, x_1[$ tale che

$$\underbrace{f'(c)}_{\geq 0} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Quindi

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$$

Moltiplico per $x_2 - x_1$, che è > 0:

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

cioè

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

Ossia: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

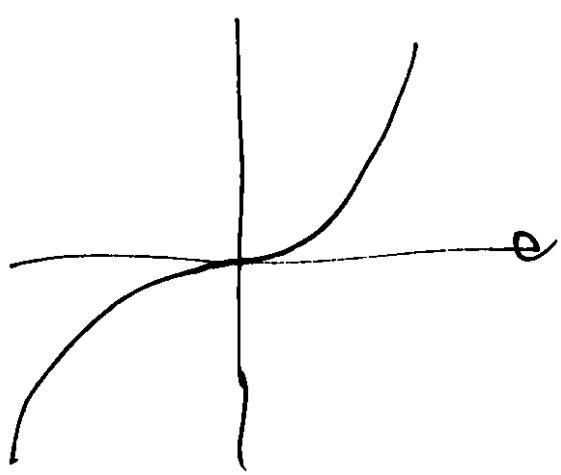
Quindi f è debolmente decrescente.

Mostriamo che

$$(f \text{ strettamente resc.}) \not\Rightarrow (f'(x) > 0 \ \forall x)$$

Esempio $f(x) = x^3$ $\quad I = \mathbb{R}$

Allora f è <u>strettamente crescente</u>



$f'(x) > 0 \ \forall x$??

$3x^2 > 0 \ \forall x$??

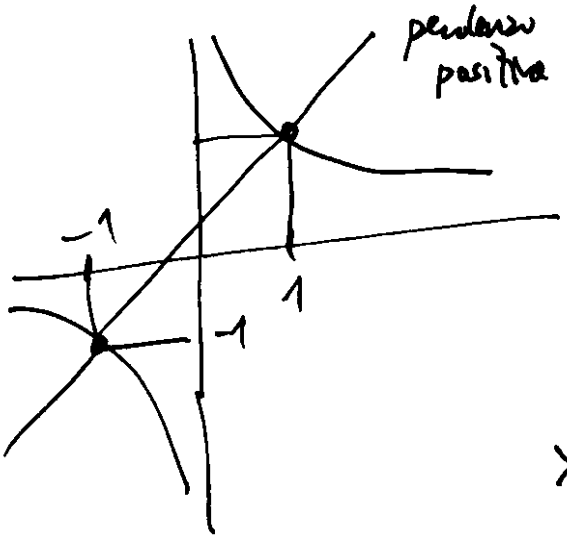
(NO) (FALSO)

per $x = 0$ si annulla

Esempio $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \ \forall x$

f' è strettamente decrescente?

NO



$f(1) = 1$

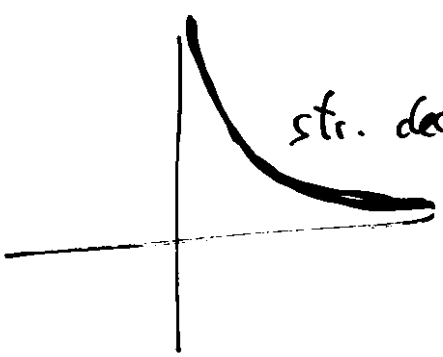
$f(-1) = -1$

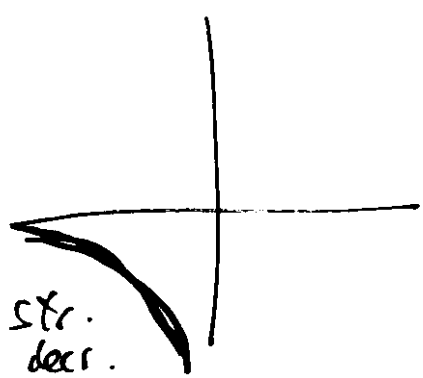
non è vero che

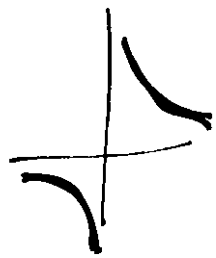
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è un intervallo

Possiamo applicare il teorema separatamente sugli $x > 0$ e sugli $x < 0$







non è str. decr.

$f'(x) > 0$ se $x \in]1,2[\cup]3,4[$

non sono autorizzato a scrivere $\cup$

f è (str.) cresc. su $\underbrace{]1,2[\cup]3,4[}$ non è un intervallo

Vero: f è str. cresc. su $]1,2[$

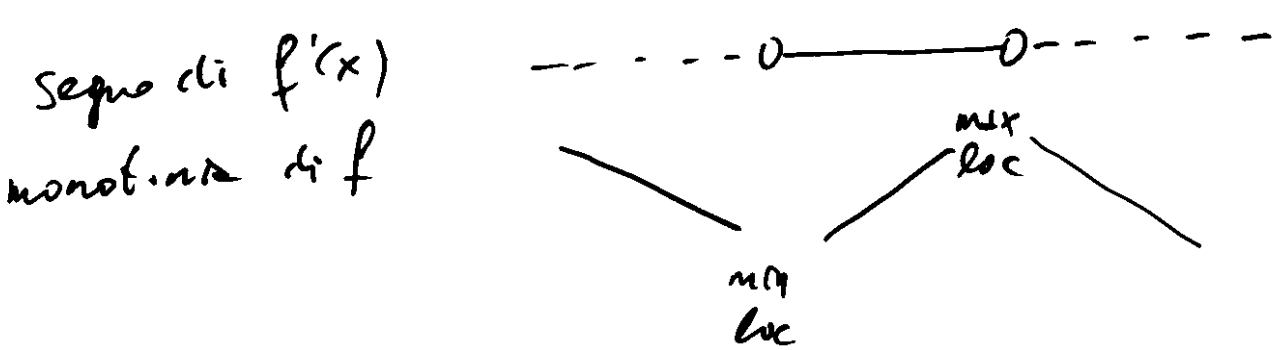
Vero: f ..... su $]3,4[$

Studio di funzione

$f(x) = \ldots$

$f'(x)$

segno della derivata:



Alta applicazione importante del teorema del valor medio è

Teorema de L'Hôpital. Sia I un intervallo non degenere (non vuoto e non ridotto a un punto solo), x_0 un suo estremo (superiore o inferiore). x_0 può essere finito o $\pm\infty$.

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni con le seguenti proprietà: f e g sono continue su I, sono derivabili nei punti interni di I,

ipotesi tecnica: $g'(x) \neq 0$ $\forall x$.

Supponiamo anche che valga una delle condizioni seguenti:

1) $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ per $x \to x_0$

2) $g(x) \to \pm\infty$ per $x \to x_0$ (vicino a f)

Supponiamo infine che esista

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad (\text{finito o infinito})$$

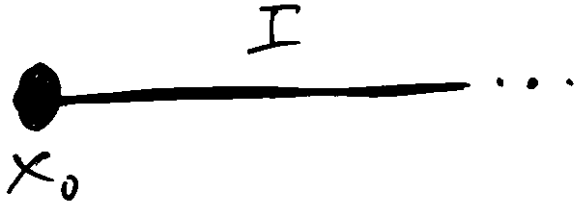
Allora esiste anche

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e vale L.

Dimostrazione in queste ipotesi aggiuntive:

$x_0 = \inf I$, $x_0 \in I$, x_0 finito



Caso 1 cioè $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ per $x \to x_0$.

$$f(x_0) = f\Big(\lim_{x \to x_0^+} x\Big) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = 0$$

(f continua)

$$g(x_0) = g\Big(\lim_{x \to x_0^+} x\Big) = \lim_{x \to x_0^+} g(x) = 0$$

(g cont.)

Considerando $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, di cui voglio trovare il $\lim_{x \to x_0^+}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - \overbrace{f(x_0)}^{=0}}{g(x) - \underbrace{g(x_0)}_{=0}} \overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

dove $c \in \,]x_0, x[$

Il punto c dipende dalla scelta di x
Metto in evidenza questo fatto scrivendo $c(x)$
invece che c

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$$

$$= \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$$

$$= \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$$

IDEA: cambio di variabile

porre $t = c(x)$

(?)

$$= \lim_{t \to} \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

Sappiamo che $c \in]x_0, x[$

$c(x)$

$$x_0 < c(x) < x$$

Carabinieri

$c(x) \to x_0$ per $x \to x_0$

$$= \lim_{t \to x_0^+} \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

L'ultima ipotesi ci dice che $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

sono lo stesso limite, a parte il nome della variabile

$$= L$$

CVD

Come si applica il teorema

Regola de L'Hôpital

Problema calcolare

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

se siamo nel caso indeterminato

$$\left[\frac{0}{0}\right] \quad \text{oppure} \quad \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$$

oppure

$$\left[\frac{\text{qualsiasi cosa}}{\pm\infty}\right]$$

Attenzione non si può applicare l'Hôpital se di fuori di questi casi.

Va verificato. Non applicare alla cieca

Tentativo proviamo a calcolare

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

può succedere che questo si riesca a calcolare

Se questo limite esiste, allora

allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Ipotesi tecnica $g'(x) \neq 0$
siete esentati dal verificarla

Riassumendo:

$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ Forme indet. $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

$\overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

può succedere che anche $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ sia indet.

$\overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = L$

se anche questa è indet

$\overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = L$

Può succedere che la esistenza della regola dell'Hôpital non termini mai

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 1$$

$\frac{1}{x^2} \to 0$

14 maggio 2021 - p 1

DERIVATA SECONDA E SUCCESSIVE

$f(x) = x^3 \qquad f'(x) = 3x^2$

Facciamo la derivata di $3x^2$,

$$D(3x^2) = 3 \cdot 2x = 6x$$

Questa nuova funzione è detta DERIVATA SECONDA della funzione iniziale.
La derivata di questa è detta derivata terza ecc.

NOTAZIONI

Col segno di $'$ (prim.)

$f(x) \quad f'(x)$ derivata prima $\qquad (f')'(x) = f''(x)$, $f'''(x)$

$f''''(x) \ldots$ (f^{IV} non comune)

$f^{(4)}(x) \qquad f^{(5)}(x) \qquad f^{(6)}(x) \ldots$

Derivata enesima $f^{(n)}(x)$ IMPORTANTI LE TONDE

$f^2(x)$ si presta ad essere interpretata come il quadrato di f invece che la derivata seconda.

$\operatorname{sen}^2 x$ quadrato $\qquad (\operatorname{sen}^{(2)} x$ derivata seconda$)$

14 maggio 2021 - p. 2

NOTAZIONE con D

$f'(x) = (Df)(x) = Df(x)$ $\quad D^1 f$

$f''(x) = D^2 f(x)$ . . . $\quad D^{II} f$ } non standard

$f'''(x) = D^3 f(x)$

$f^{(n)}(x) = D^n f(x)$

Notazione di Leibniz

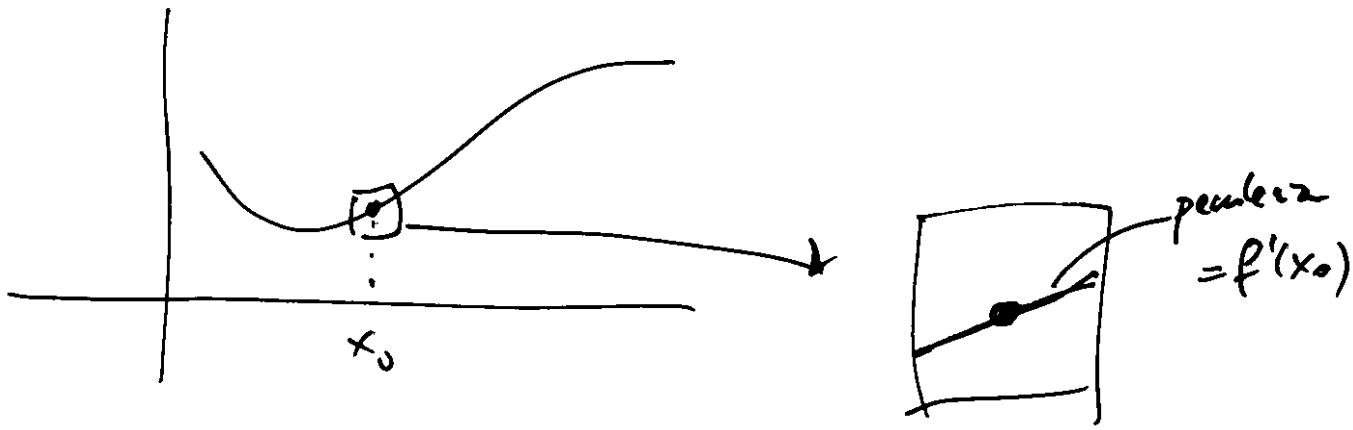
$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$ $\qquad y = f(x)$

$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}$

$\frac{d^2 y}{dx^2}$ $\qquad \frac{d(dy)}{(dx)^2}$

$f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3}$

Significato geometrico della derivata prima



La derivata seconda ha una interpretazione geometrica?

No, ma molto semplice.

Il **segno** della derivata seconda si può interpretare in modo semplice.

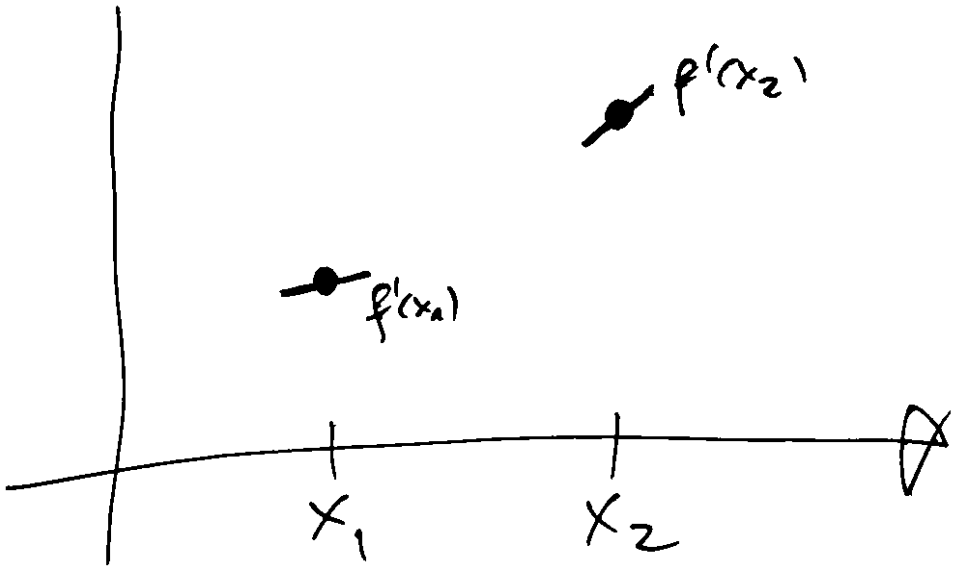
Supponiamo che $f''(x) > 0$ $\forall x$ di un intervallo.

Cosa significa questo su $f'(x)$?

$f'(x)$ è una funzione la cui derivata è positiva.

Quindi $f'(x)$ è strettamente crescente.

Come si può interpretare geometricamente?

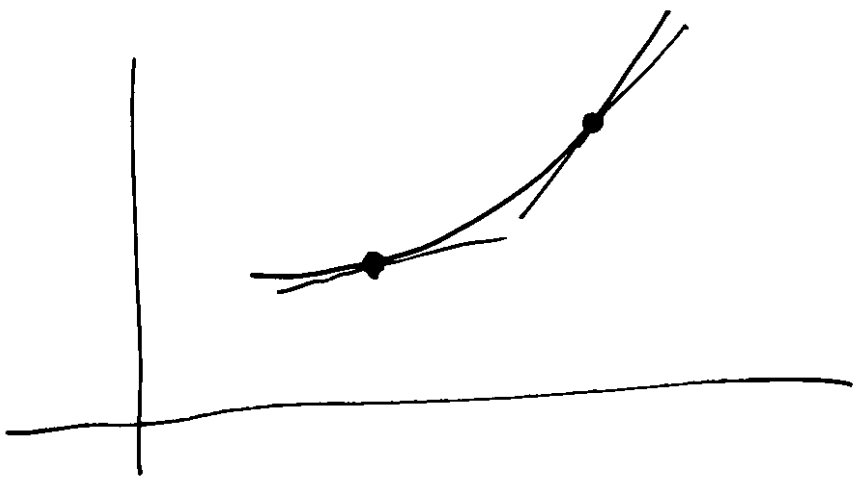


f' è strettamente cres.

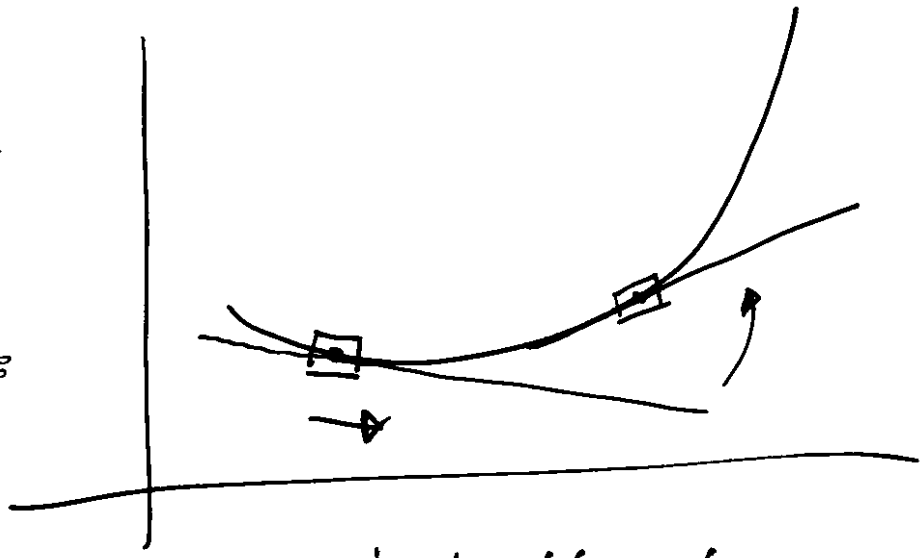
$x_1 < x_2$

$\Rightarrow \quad f'(x_1) < f'(x_2)$

L'inclinazione della curva aumenta da sinistra a destra



Se prendo la retta tangente man mano che il punto si sposta verso destra, la retta tangente ruota in senso antiorario.



l'automobile sterza verso sinistra

Interpretazione geometrico - stradale:

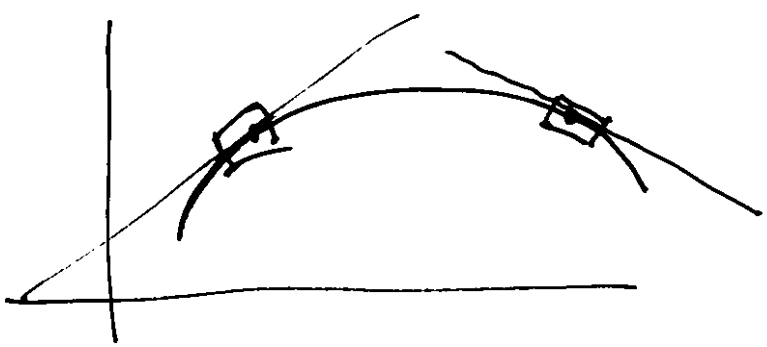
$f''(x) > 0$ vuol dire che l'automobile che percorre la strada sta sterzando verso sinistra.

$f''(x) < 0$?

f' è decrescente

la retta tangente ruota in senso orario

l'automobile sterza verso destra



$f''(x) \equiv 0$ in tutto un intervallo

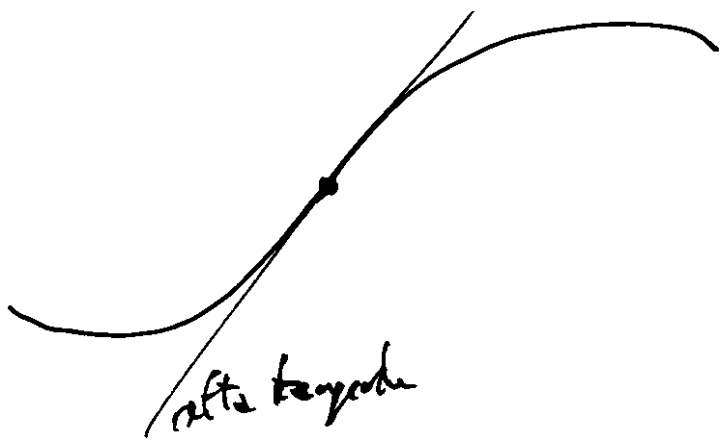
vuol dire che $f'(x)$ è costante

La strada è rettilinea

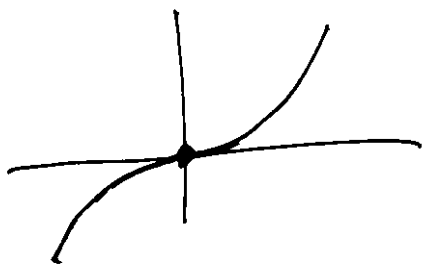
FLESSO punto di transizione fra due curvature, da rivolta verso sinistra a verso destra o viceversa.

Nei punti di flesso $f''(x) = 0$

Una caratteristica del flesso è che la retta tangente attraversa la curva da una parte all'altra



Abbiamo già incontrato i flessi ORIZZONTALI



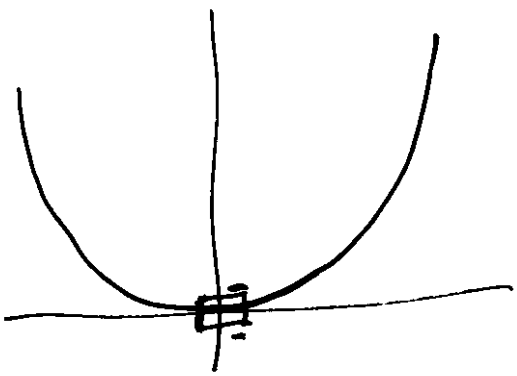
$f(x) = x^3$ $\quad f'(0) = 0$

0 non è né un max né un min locale

$f'(x) = 3x^2$ $\quad f''(x) = 6x$

$f''(0) = 0$

ATTENZIONE $f''(x) = 0$ non garantisce che sia un flesso!



si pia sempre a sinistra

$f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2$

$f''(0) = 0$

però non è un flesso

↳ situazione è analoga con la derivata prima:

$f'(x) = 0$ non garantisce max o min

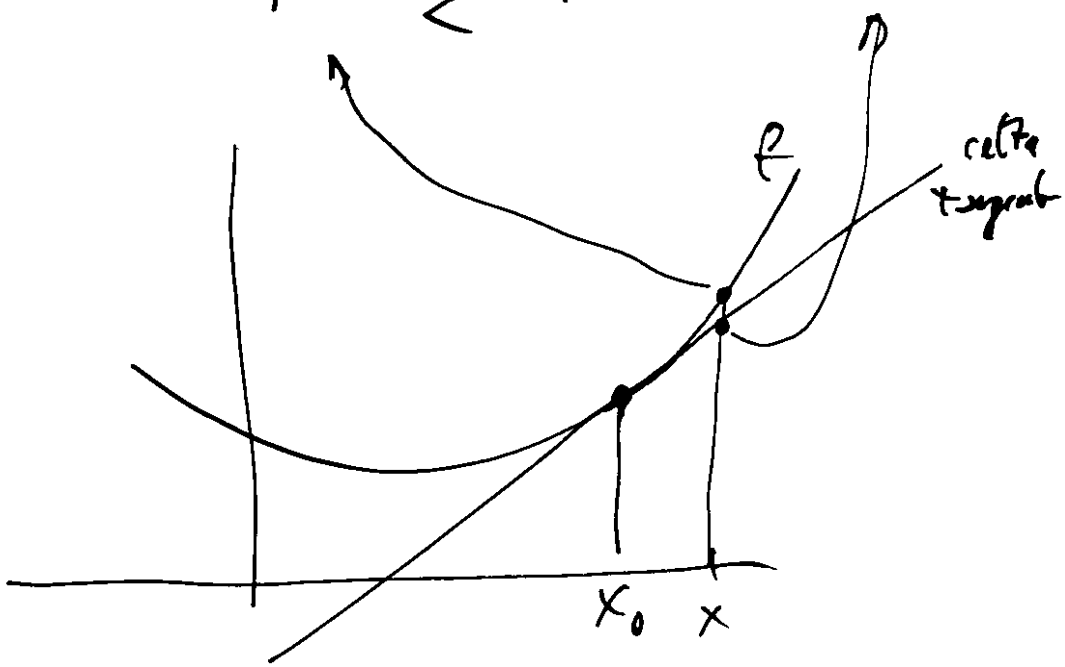
Il segno della derivata seconda si può interpretare geometricamente.

Volendo fare qualche considerazione formale col concetto di curvatura, può convenire cambiare approccio: studiare la posizione relativa fra il grafico di f e la sua retta tangente

$y = f(x)$ grafico di f

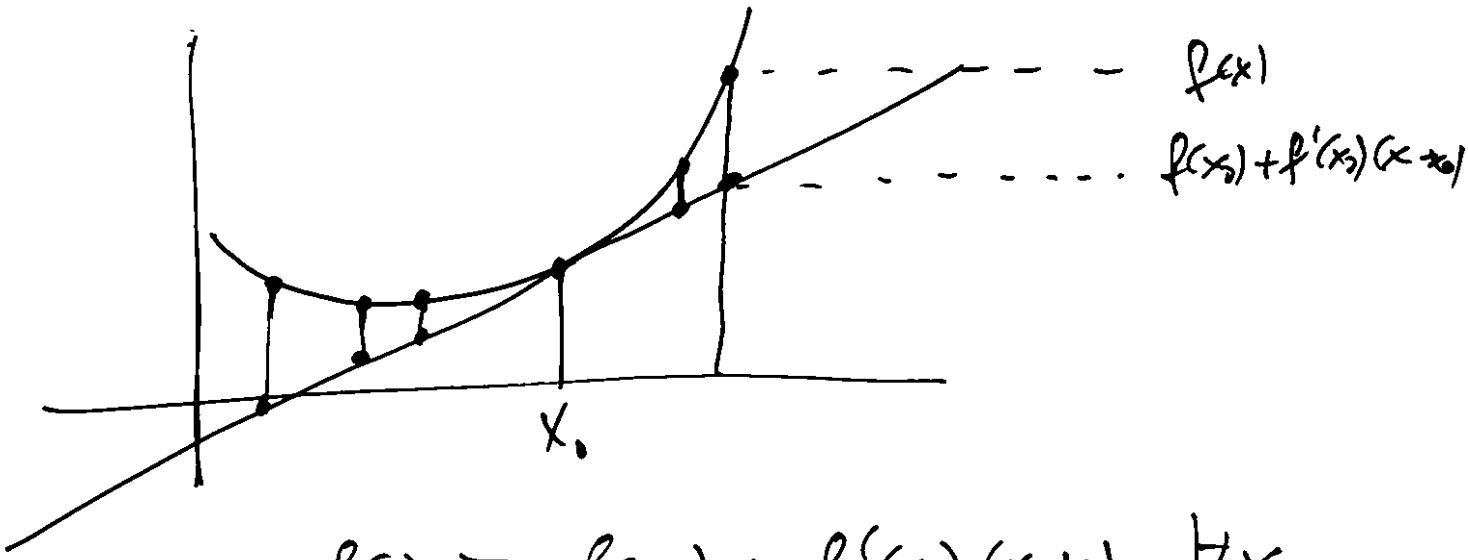
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ retta tangente nel punto x_0

Studio $f(x) \gtrless f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$



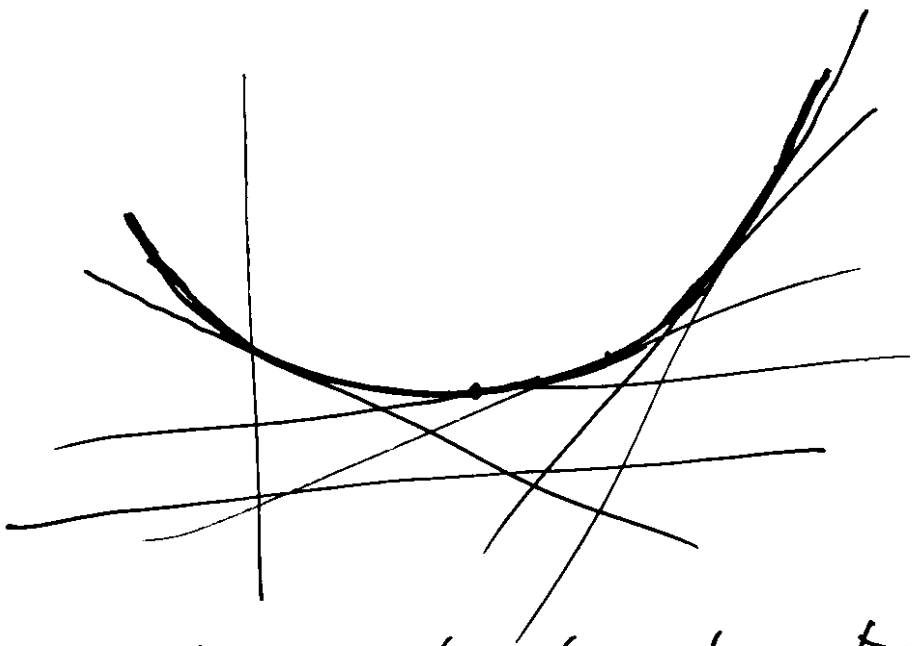
La disuguaglianza mi aspetto se la f curva verso sinistra?

$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$



$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad \forall x$$

Il grafico di f sta sopra la retta tangente



tutte le rette tangenti stanno sotto il grafico di f

14 maggio 2021 - p. 10

Approccio formale alla curvatura

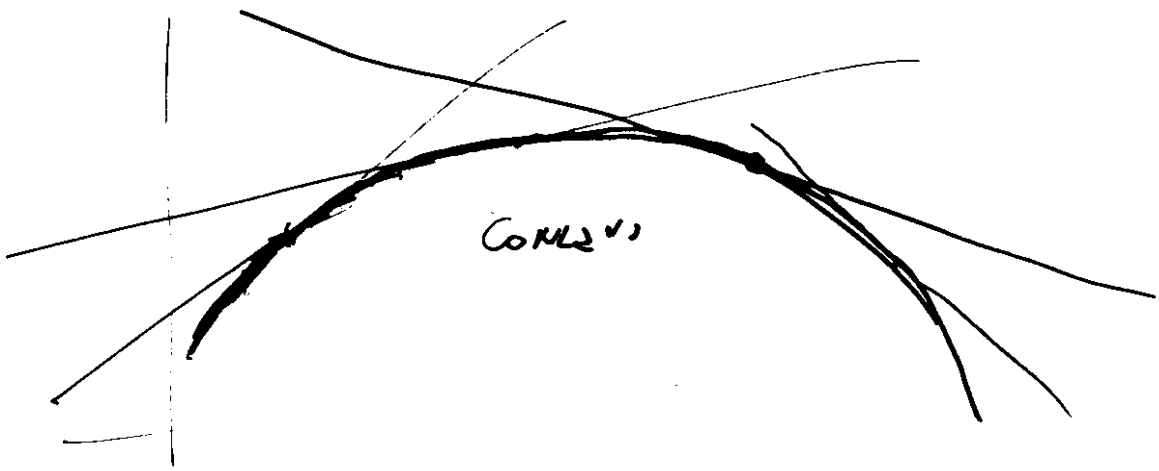
Def Una funzione derivabile f si dice **CONVESSA** (concava verso sinistra) se $\forall x \; \forall x_0$

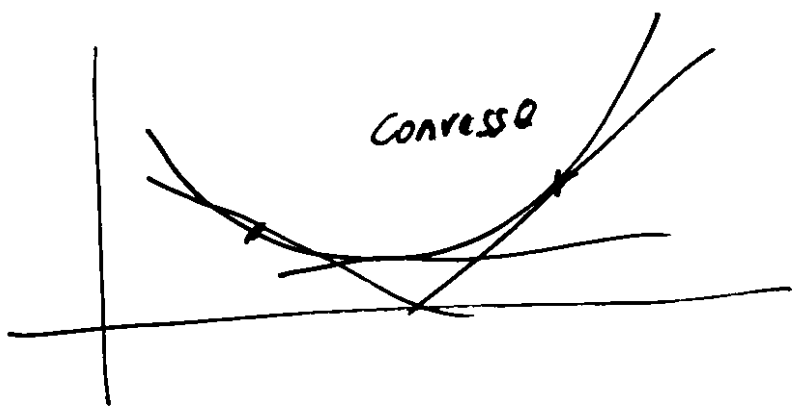
$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

f sta sopra tutte le sue rette tangenti.

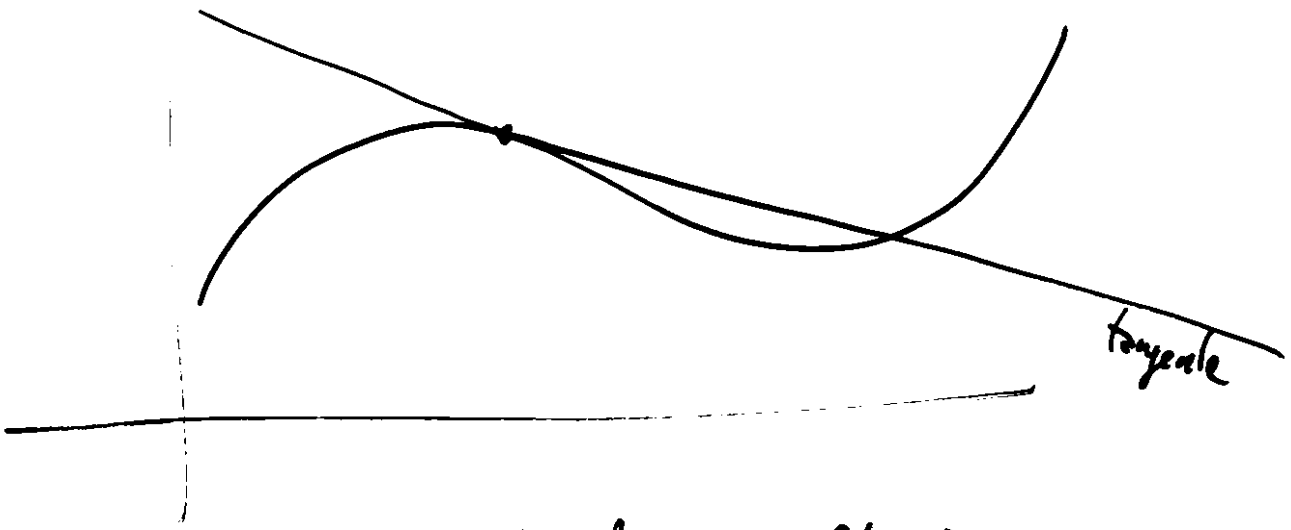
Def Una funzione derivabile f si dice **CONCAVA** (gira verso destra) se $\forall x \; \forall x_0$

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$





11 maggio 2021 - n. 11



Il grafico di f a volte è sopra, a volte è sotto una singola retta tangente

In questo caso f non è né convessa né concava.

Si può dimostrare un teorema che lega il segno della derivata seconda con il fatto di essere convessa o concava.

Teorema Sia I un intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ con derivata prima e seconda finite in ogni punto.

Allora

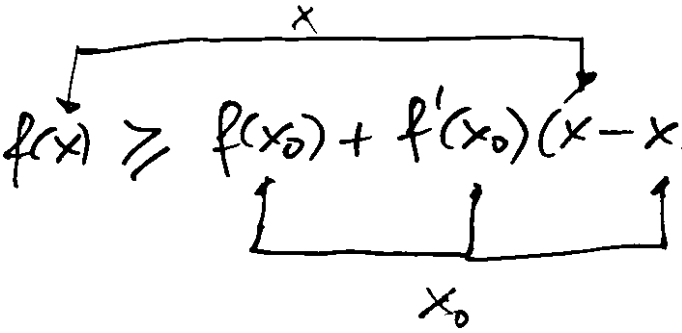
1) f è convessa se e solo se $f''(x) \geq 0 \ \forall x$
2) f è concava se e solo se $f''(x) \leq 0 \ \forall x$

14 maggio 2021 - p 12

Dimostrazione supponendo che la funzione sia CONVESSA

cioè che

$$\forall x \forall x_0 \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



ipotesi

Vogliamo dimostrare che $f''(x_0) \geq 0 \quad \forall x_0$

Proviamo che

$$\forall x \forall x_0 \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Porto tutto al primo membro

$$\forall x \forall x_0 \quad f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0$$

Divido ambo i membri per $\frac{1}{2}(x - x_0)^2$

(escludiamo il caso $x = x_0$ dove si annulla)

$$\forall x \neq x_0 \quad \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{\frac{1}{2}(x - x_0)^2} \geq 0$$

Passiamo al limite per $x \to x_0$ ad ambo i membri

(la disug. debole si mantiene)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{\frac{1}{2}(x - x_0)^2} \geq 0$$

il limite è della forma $\frac{0}{0}$

Applicazione di l'Hôpital

$$0 \le \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{\frac{1}{2}(x - x_0)^2} \overset{H}{=}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{D_x\left(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\right)}{D_x\left(\frac{1}{2}(x - x_0)^2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - 0 - f'(x_0) \cdot (1 - 0)}{\frac{1}{2} 2(x - x_0) \cdot (1 - 0)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

rapporto incrementale di f'

$$= f''(x_0)$$

(derivata di f' per definizione di derivata)

Risulta quindi

$$0 \le f''(x_0) \qquad \forall x_0$$

Abbiamo dimostrato che se f è convessa allora $f''(x) \ge 0 \ \forall x$

Rimane il viceversa.

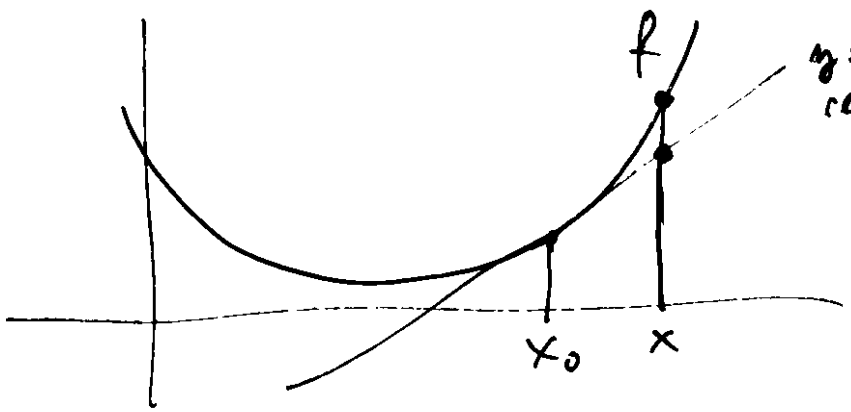
17 mag 2021 - 7.1

CONVESSITÀ / CONCAVITÀ E SEGNO DELLA DERIVATA SECONDA

Def Una funzione derivabile f si dice CONVESSA se $\forall x, x_0$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

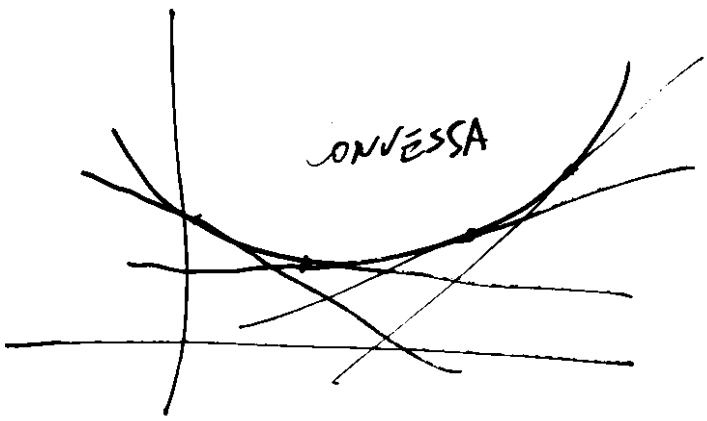
si dice CONCAVA se vale la disug. oppost.

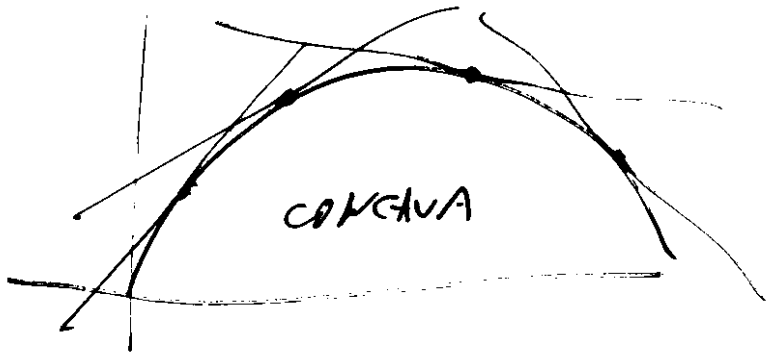


$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
retta tangente

CONVESSA ⇕

il grafico di f sta sopra a tutte le rette tangenti





CONCAVA ⇕

il grafico di f sta sotto a tutte le rette tangenti.

Teorema Se $f: I \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile due volte, I è un intervallo, allora

f è convessa $\iff f''(x) \geq 0 \ \forall x$

f è concava $\iff f''(x) \leq 0 \ \forall x$

Dim Abbiamo già visto che se f è convessa allora $f'' \geq 0$.

Rimane da dimostrare che se $f''(x) \geq 0 \ \forall x$ allora f è convessa.

Supponiamo quindi che $f''(x) \geq 0 \ \forall x$.

Obiettivo: dimostrare che $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$\forall x \ \forall x_0$

Prendiamo $x \neq x_0$ (per $x = x_0$ è ovvio).

L'obiettivo è equivalente a dimostrare che

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \overset{?}{\geq} 0 \quad \forall x$$

Dividiamo ambo i membri per $\frac{1}{2}(x - x_0)^2$ $\left(\text{è} > 0\right)$

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{\frac{1}{2}(x - x_0)^2} \overset{?}{\geq} 0$$

Lavoro al primo membro:

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{\frac{1}{2}(x - x_0)^2} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)x + f'(x_0)x_0}{\frac{1}{2}(x-x_0)^2 - \frac{1}{2}(x_0-x_0)^2} =$$

(x e x_0; $(x_0-x_0)^2$ è nullo)

$$= \frac{(f(x) - f'(x_0)x) - (f(x_0) - f'(x_0)x_0)}{\frac{1}{2}(x-x_0)^2 - \frac{1}{2}(x_0-x_0)^2}$$

(x, x_0)

Definiamo due nuove funzioni ausiliarie

$$F(x) := f(x) - f'(x_0)x$$
$$G(x) := \frac{1}{2}(x-x_0)^2$$

$$= \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)}$$

Teorema del valor medio di Cauchy:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad g' \neq 0 \text{ all'interno dell'intervallo}$$

$$= \frac{F'(c)}{G'(c)}$$

dove c è intermedio fra x e x_0

$$F'(x) = f'(x) - f'(x_0)\cdot 1$$
$$G'(x) = \frac{1}{2}\cdot 2(x-x_0)^1 \cdot 1$$

$$= \frac{f'(c) - f'(x_0)}{c - x_0}$$

è un oggetto incrementale con f' al posto di f

Applichiamo il teorema di Lagrange:

$$= \frac{f'(c) - f'(x_0)}{c - x_0} = f''(\underbrace{\text{un punto intermedio fra } c \text{ e } x_0}_{= d})$$

$$= f''(d)$$

Ricapitolando la catena di uguaglianze

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{\frac{1}{2}(x - x_0)^2} = f''(d)$$

E' venuto il momento di usare l'ipotesi che

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x$$

Quindi $f''(d) \geq 0$ e di conseguenza

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{\frac{1}{2}(x - x_0)^2} = f''(d) \geq 0$$

ma anche $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0$

e infine $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

CVD

La parte sulla concavità è analoga.

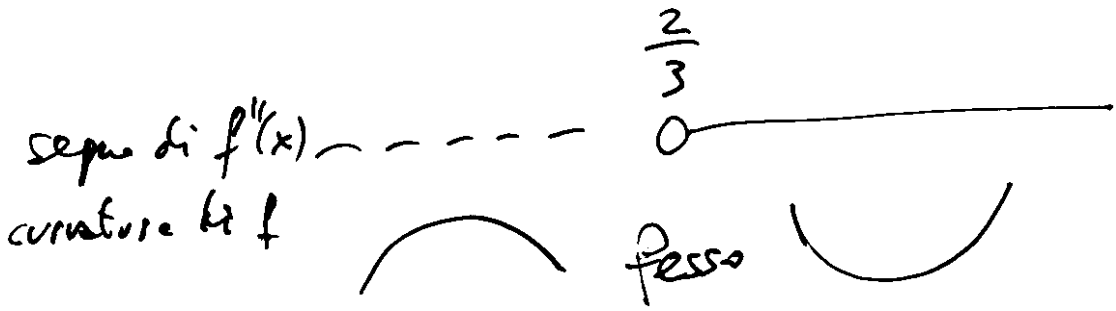
Esempio $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$

studiare convessità / concavità

questo equivale (su intervalli) + studiare il segno della derivata seconda

$f'(x) = 3x^2 - 4x$

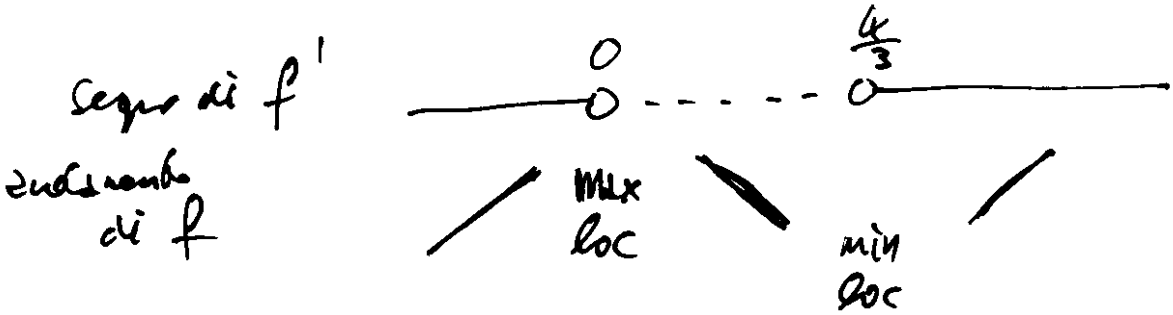
$f''(x) = 6x - 4 = 2(3x-2)$



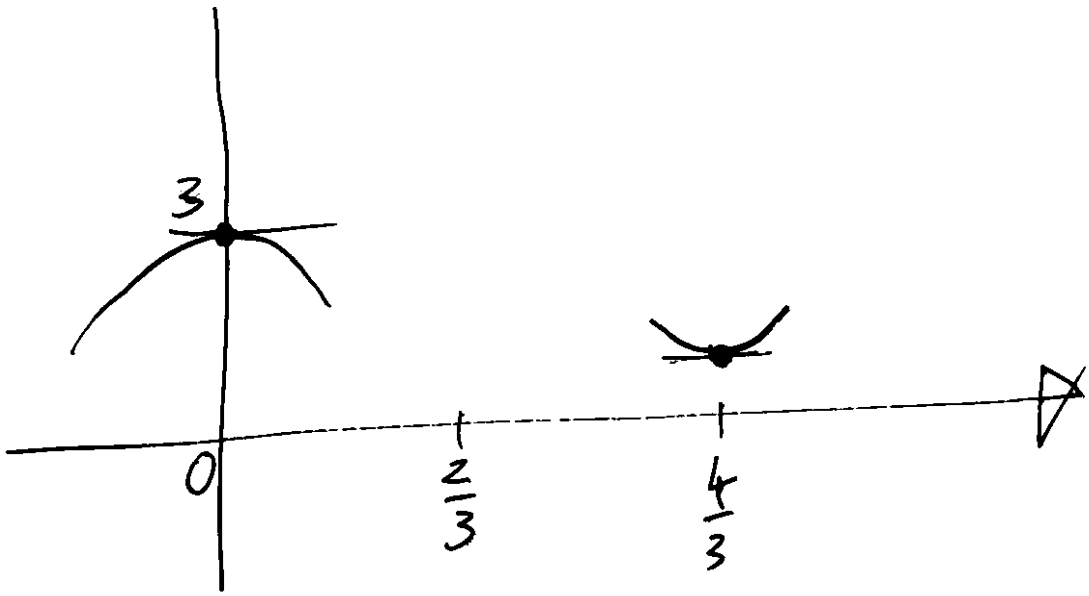
presa a blocco non è né convessa né concava

Studiamo la crescenza - decrescenza, cioè lo il segno della derivata prima

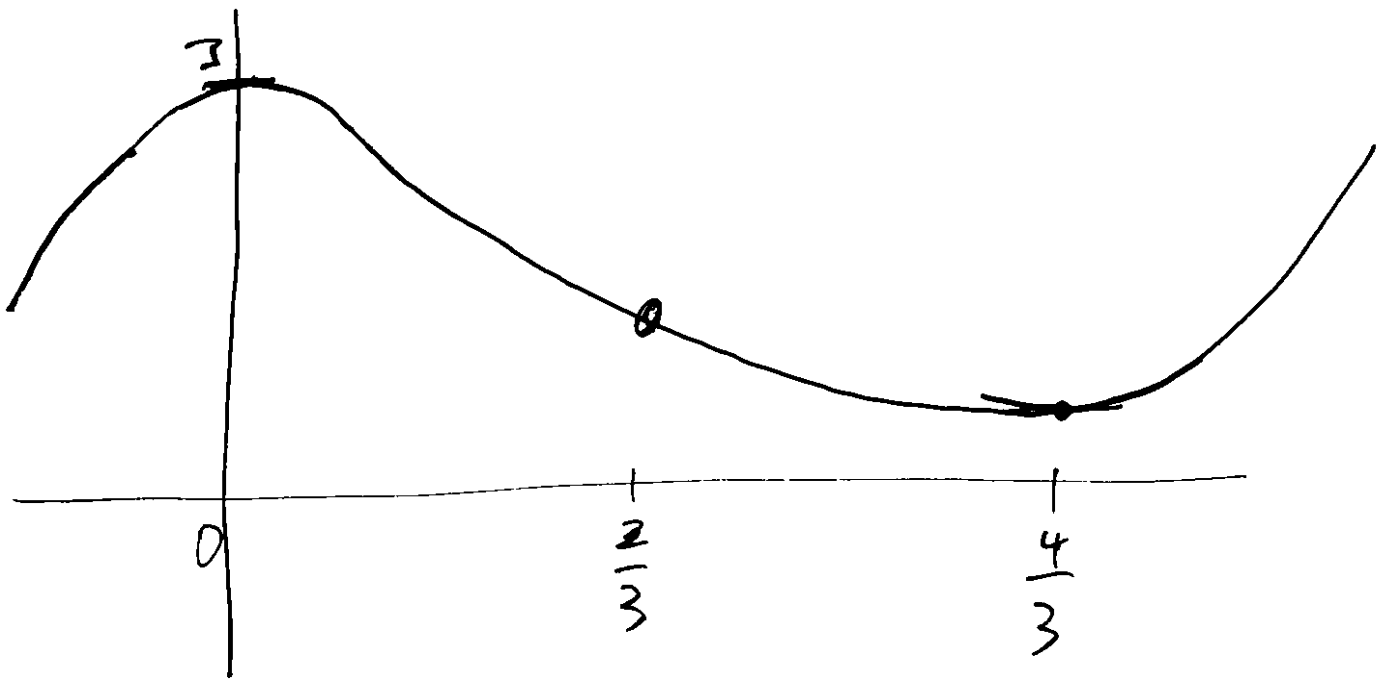
$f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4)$

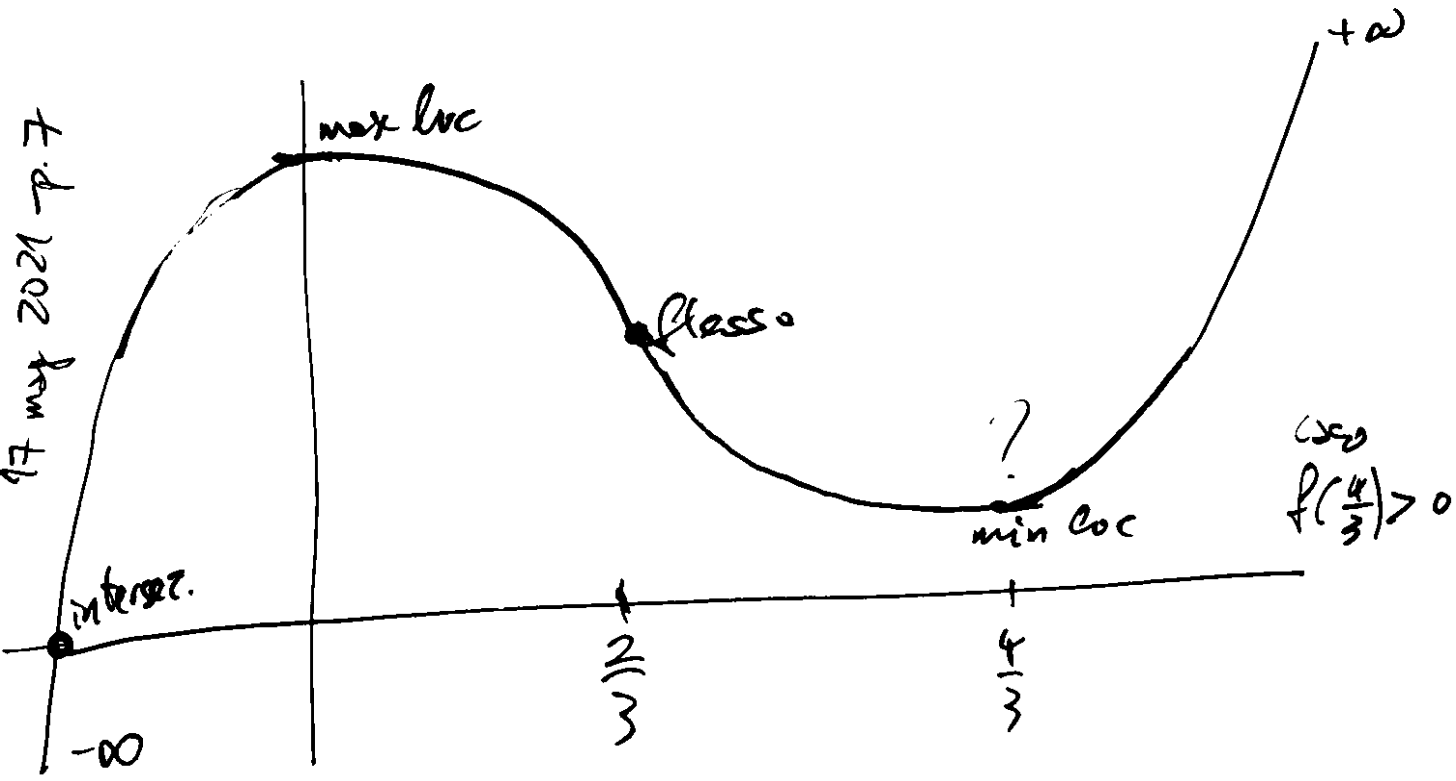


Bozza del grafico di f

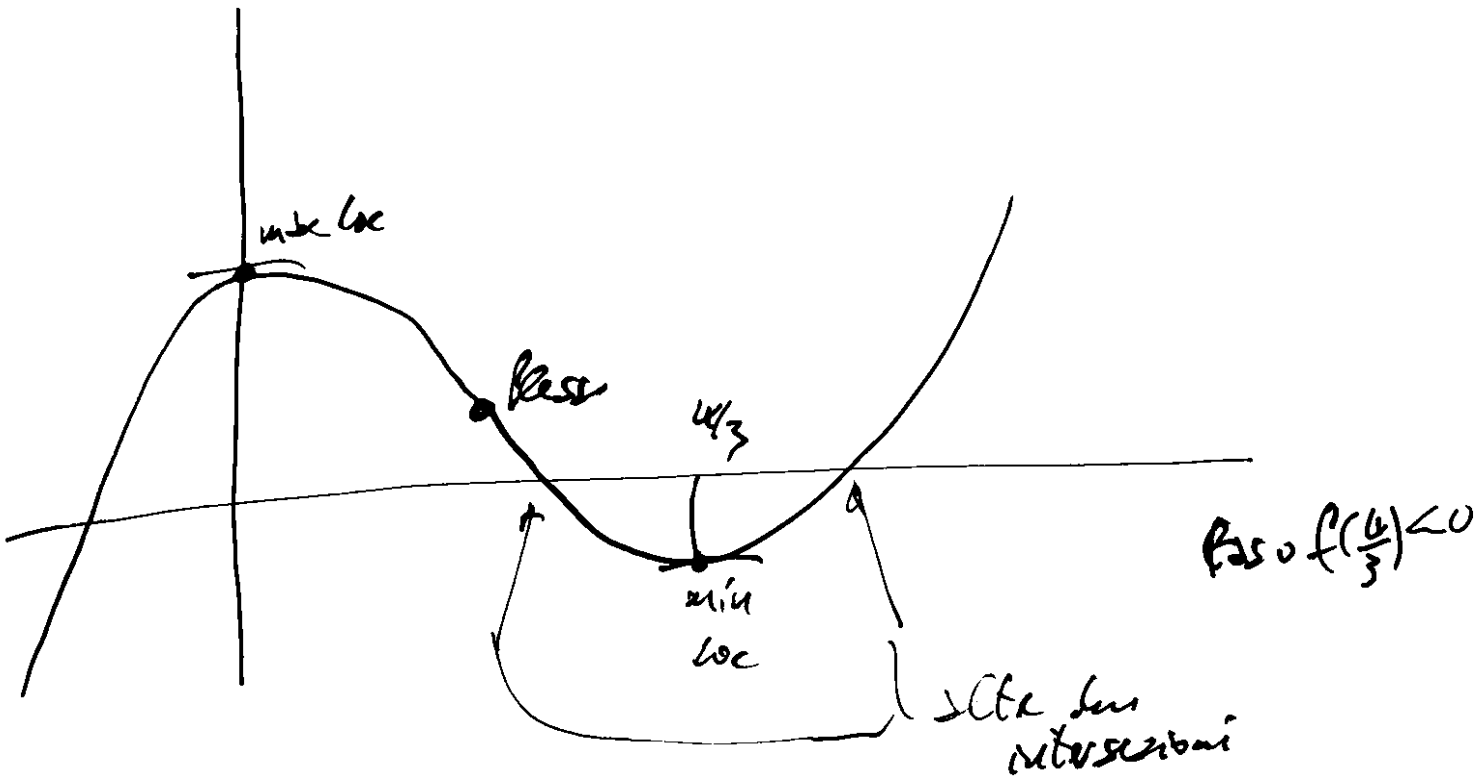


$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 3$$

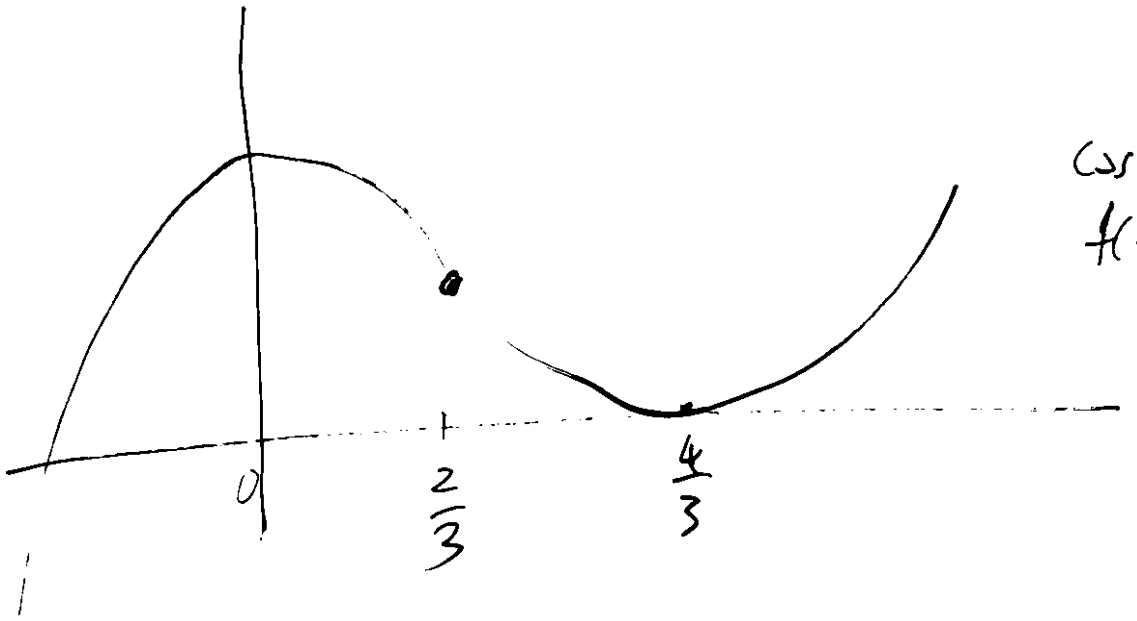




OSS una funzione strettamente crescente o può annullarsi in un punto solo

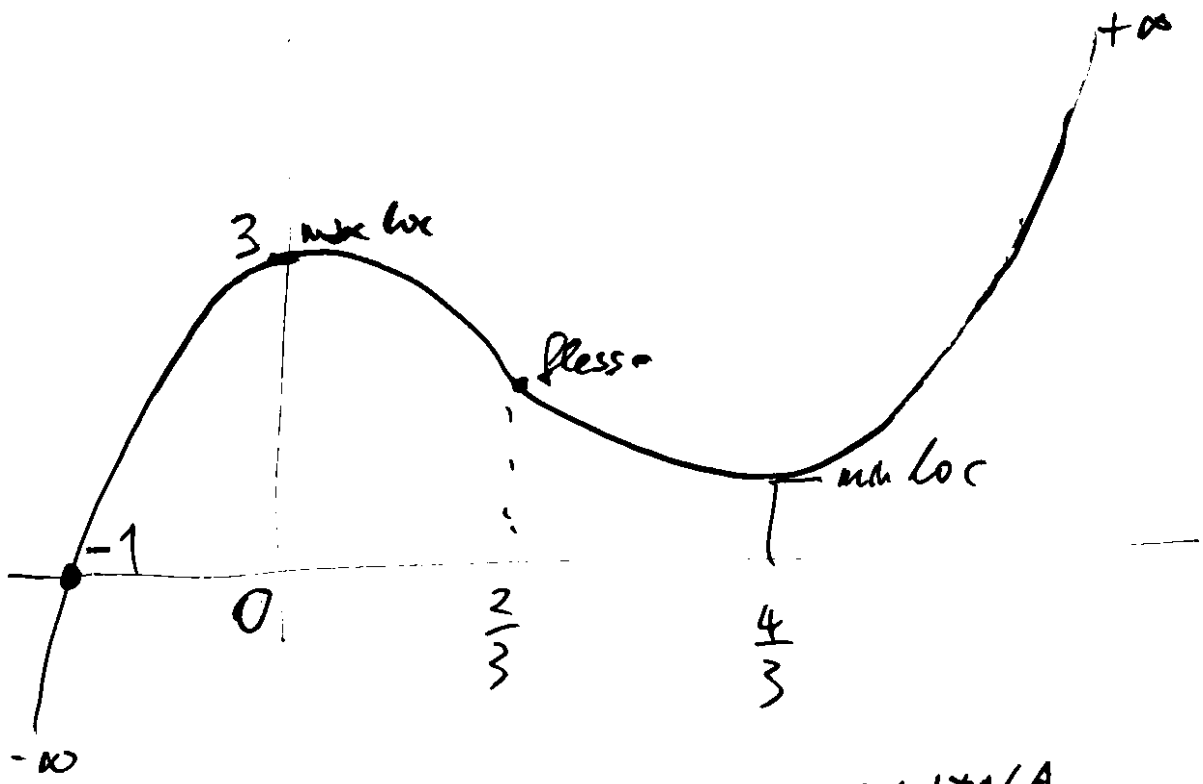


17 mag 2021 p. 8



caso
$f(\frac{4}{3}) = 0$

$f(\frac{4}{3}) = ? = +1,8$

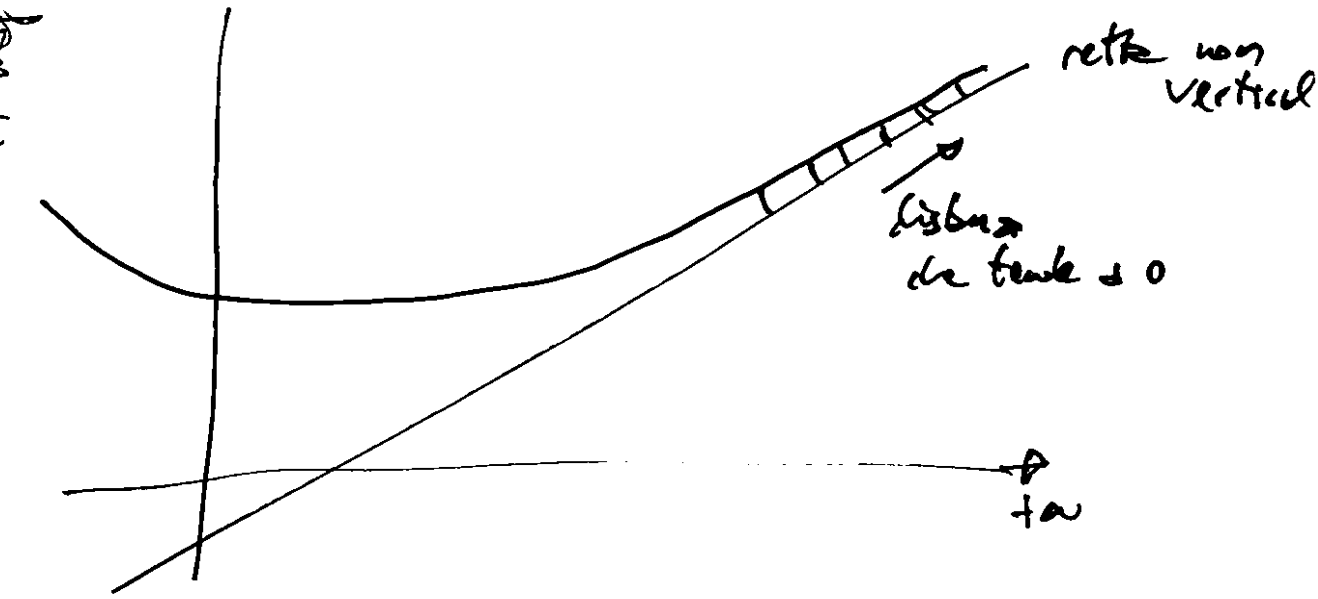


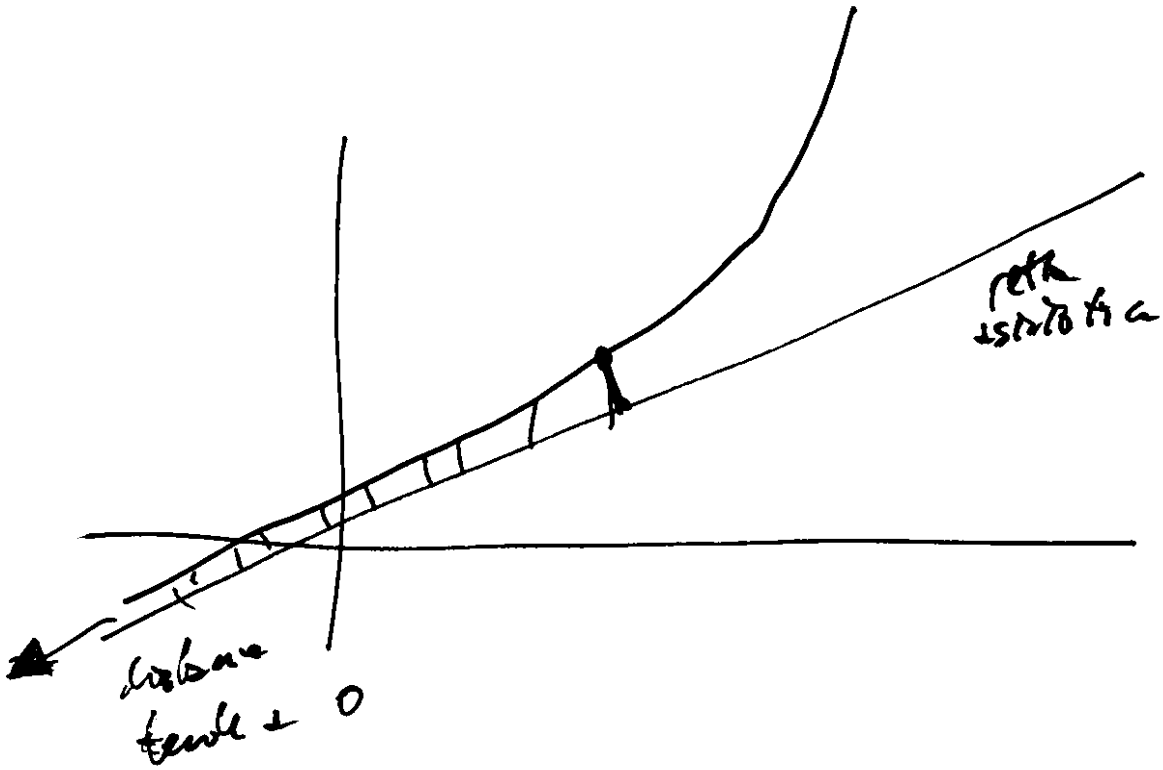
BUZZA DEFINITIVA

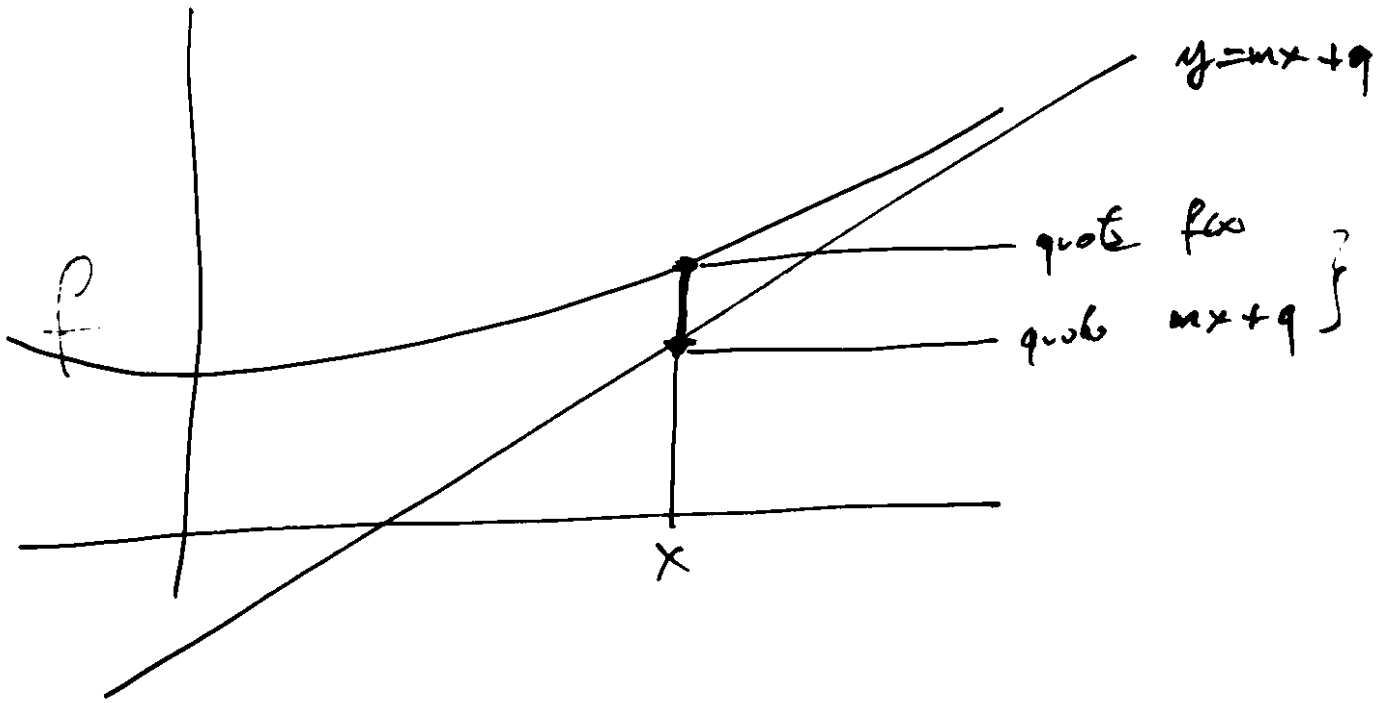
17 mag 2021 p. 9

ASINTOTI OBLIQUI (NON VERTICALE)

(RETTE ASINTOTICHE)







Definizione Data una funzione $f(x)$ e una retta $y = mx+q$ diremo che la retta è un asintoto (obliquo) del grafico di f se

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (mx+q) \right) = 0$$

oppure

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - (mx+q) \right) = 0$$

Problema: trovare, data f, le eventuali rette asintotiche

C'è un criterio pratico per trovare le rette asintotiche

17 mag 2021 p. 11

Proposizione La retta $y = mx + q$ è asintoto per la funzione f se e solo se valgono le relazioni seguenti:

1) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$

2) $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = q$

Dim Supponiamo che $y = mx + q$ sia asintoto.

cioè $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0$

Altra

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x) - (mx + q)}{x} = \frac{0}{\pm\infty} = 0$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x} \right) =$$

($\frac{f(x)}{x} \to m$, $\frac{q}{x} \to 0$)

$$= \left(\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \right) - m - 0$$

Ma sempre da $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$.

L'altra dice $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = q$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\underbrace{f(x) - mx - q}_{\text{per ipotesi tende a } 0} + q \right) = q$$

Viceversa, supponiamo $\neq 0$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = q$$

Allora la retta $y = mx + q$ è asintoto?

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - (mx+q) \right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left((f(x) - mx) - q \right) = q - q = 0$$

$\downarrow$ q $\quad$ $\downarrow$ q

È asintoto! $\quad$ C.V.D.

CRITERIO PRATICO Data f

1° passo calcola $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

se questo è infinito oppure non esiste
allora non c'è retta asintoto FINE
se questo limite esiste finito, chiamiamo $m = \lim \frac{f(x)}{x}$

2° passo calcolare $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$

se è infinito o non esiste, non c'è asintoto FINE

Se invece $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$ esiste finito,

chiamiamo q

l'asintoto $y = mx + q$ è obliquo.

Esempio $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

Ha rette asintotiche?

1° passo $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 1 \quad \text{finito!}$$

($\frac{1}{x^2} \to 0$)

2° passo $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+x^2} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$= \frac{1}{+\infty} = 0 = q \quad \text{finito!}$$

CONCLUSIONE: la retta $y = mx + q = x$ è asintoto per $x \to +\infty$

Caso $x \to -\infty$?

1° passo $m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} =$

$= \lim_{x\to-\infty} -\frac{\sqrt{1+x^2}}{-x} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{1+x^2}{(-x)^2}}$

$= -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = -1$

2° passo $q = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - mx\right) =$

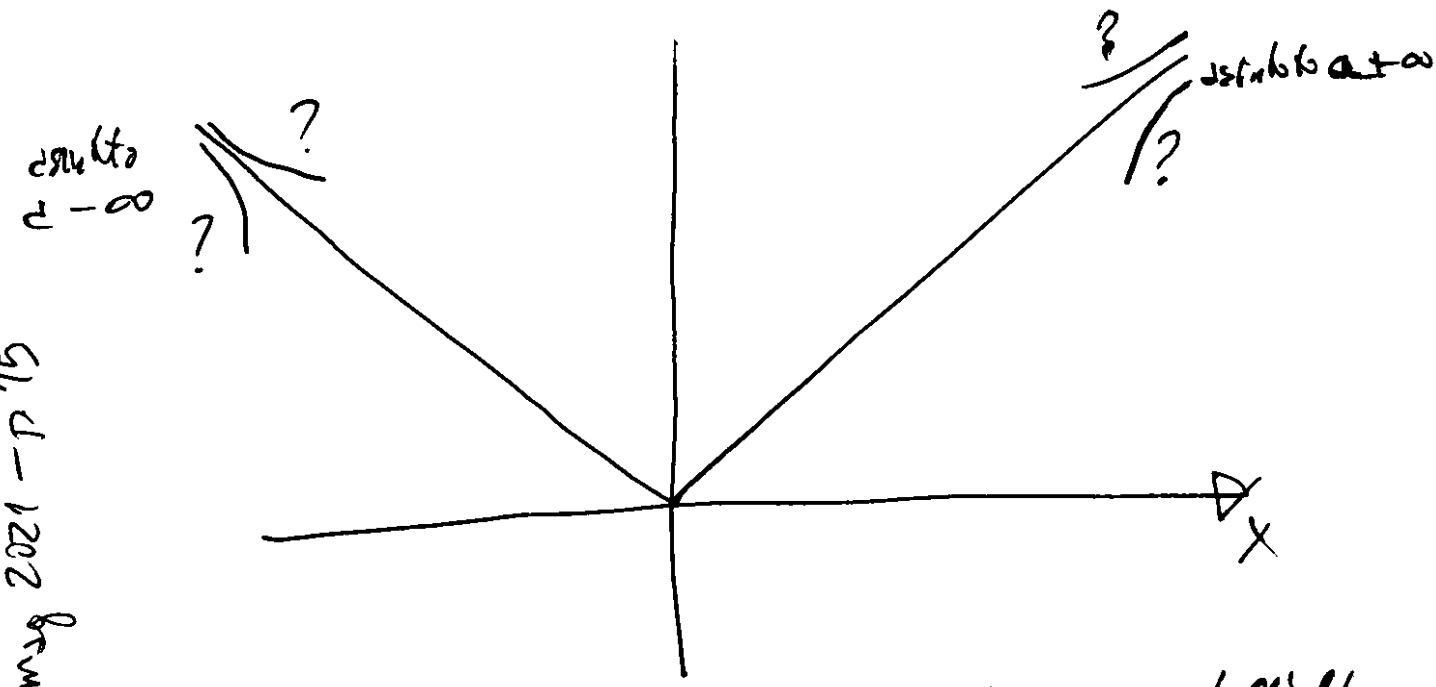
$= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{1+x^2} - (-1)x\right) =$

$= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{1+x^2} + x\right)$ F.I. $+\infty-\infty$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x} =$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = \frac{1}{+\infty} = 0$

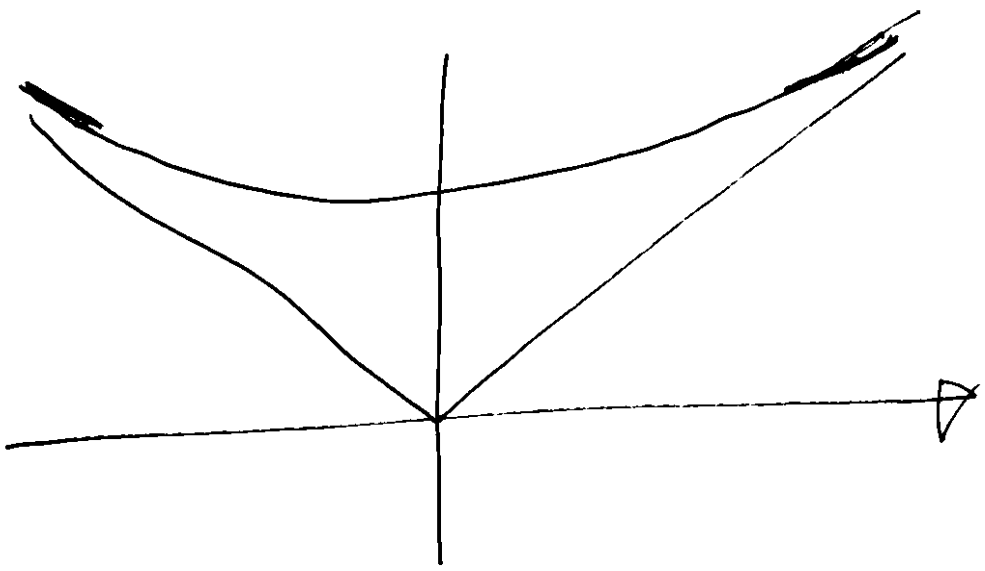
Conclusione: la retta $y = mx+q = -x$ è asintoto per $x \to -\infty$



segno di $f(x) - (mx+q)$ $\begin{cases} > 0 & \text{dall'alto} \\ < 0 & \text{dal basso} \end{cases}$

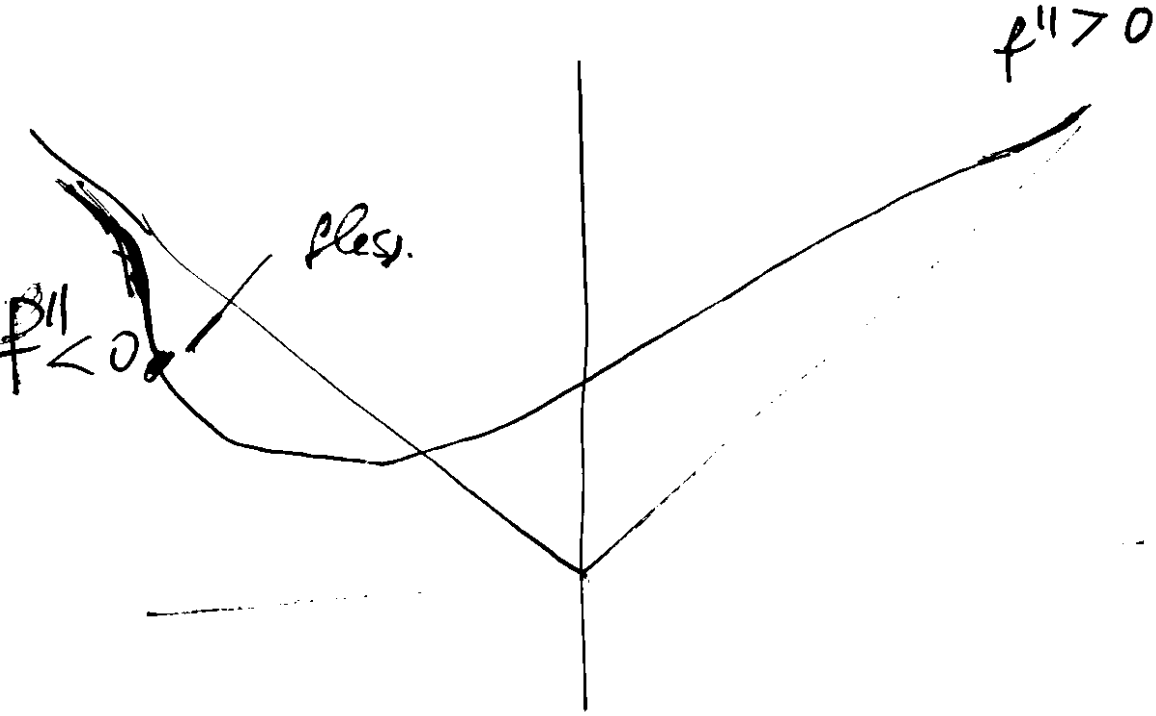
SCORCIATOIA non sicura però ci stacca spesso

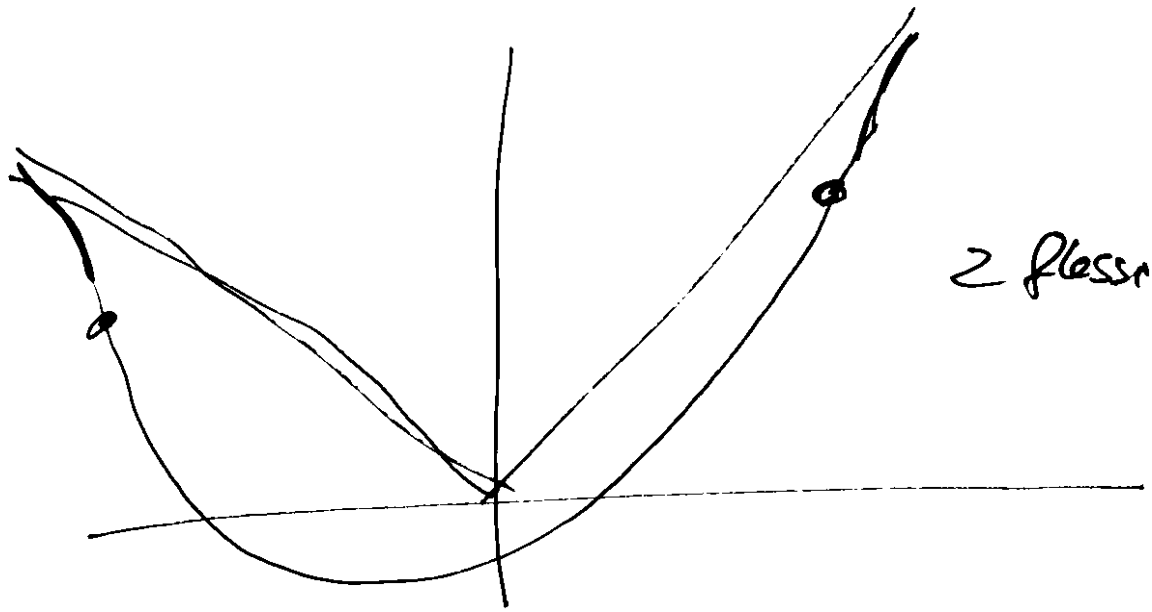
CRITERIO DEI MINIMI FLESSI

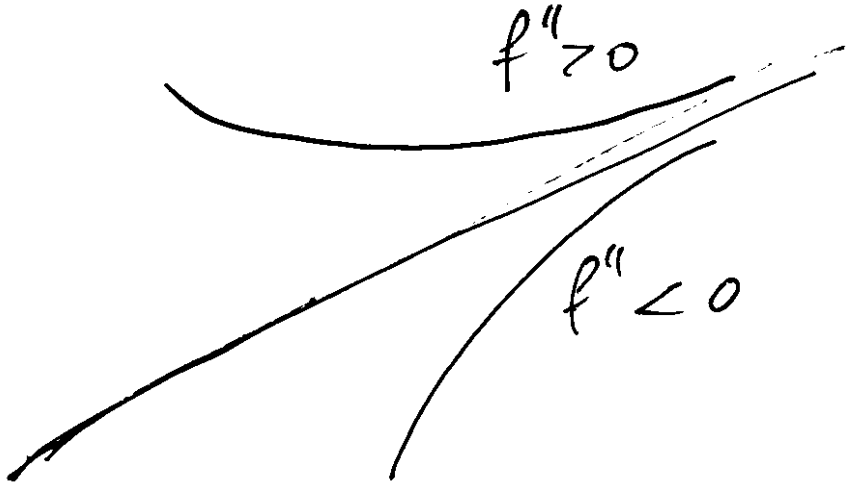


non ha flessi

Fra due eventualità è più probabile quella che ha meno flessi


f'' > 0
flesso
f'' < 0


2 flessi

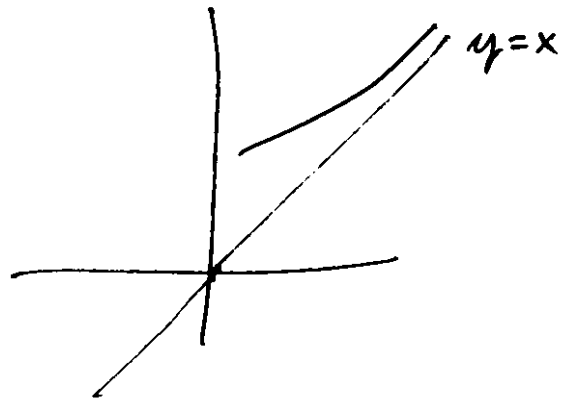

f'' > 0
f'' < 0

Torniamo agli esempi

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

Verifica definitiva:

$f(x) \geq x$?



$\sqrt{1+x^2} \geq x$?

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1+x^2 \geq x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ \sqrt{1+x^2} \geq x \end{cases}$$

VERO

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$x \geq 0 \vee x < 0$

$\Downarrow$

$x \in \mathbb{R}$ Sempre vero

$f(x) \geq -x$?

$\sqrt{1+x^2} \geq -x$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} -x \geq 0 \\ 1+x^2 \geq (-x)^2 \end{cases} \vee \begin{cases} -x < 0 \\ \text{VERO} \end{cases}$

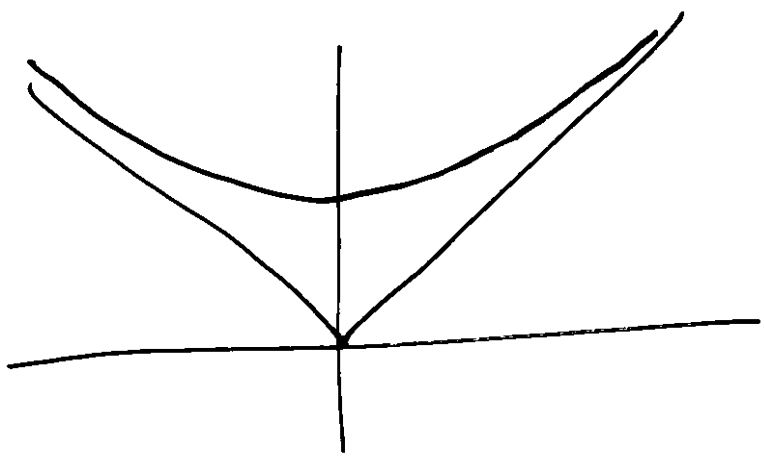
$\Updownarrow$

$\begin{cases} -x \geq 0 \\ \text{VERO} \end{cases} \vee -x < 0$

$x \leq 0 \vee x > 0$

$\Downarrow$

VERO

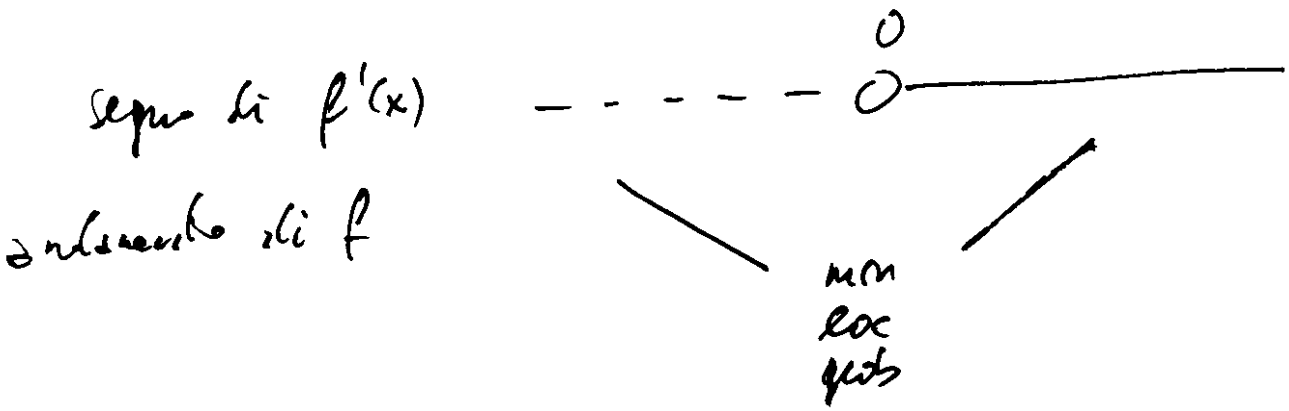


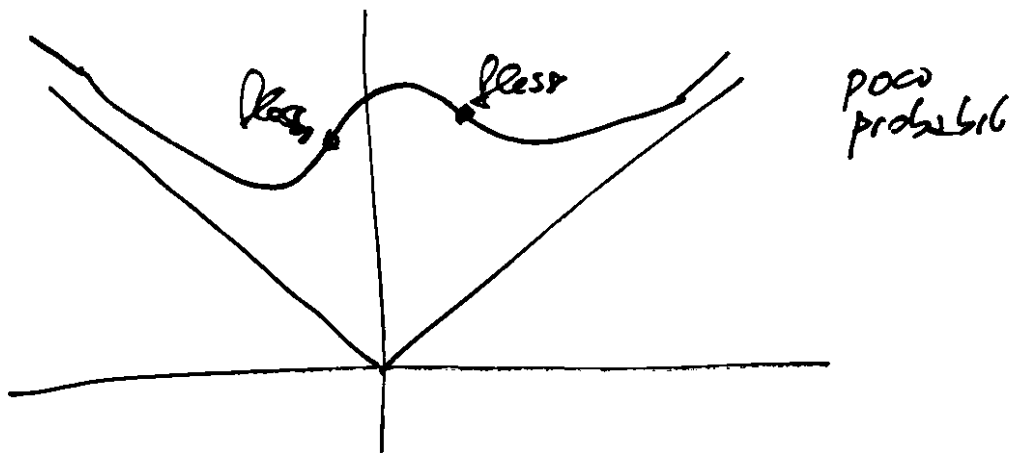
17 mag 2021 - p. 20

CRESCENZA / DECRESCENZA

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$





CONVESSITÀ / CONCAVITÀ

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \qquad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

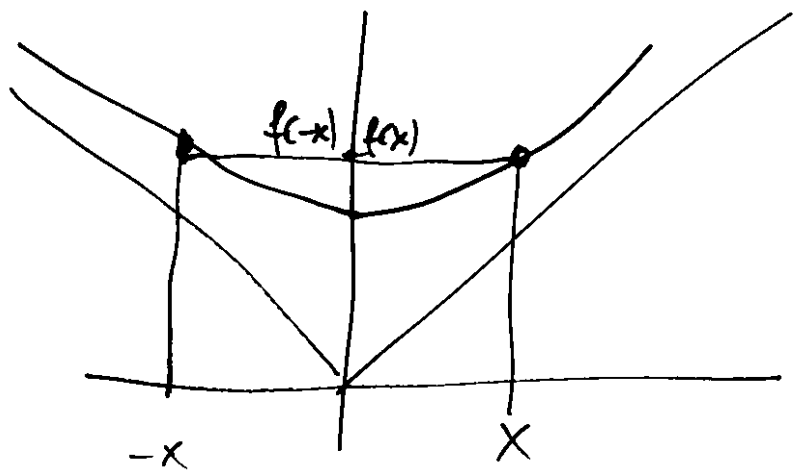
$$f''(x) = \frac{1\cdot\sqrt{1+x^2} - x\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} > 0$$

17 mag 2021 p. 21

Segno: $f(x) = \sqrt{1+x^2} > 0$ sempre

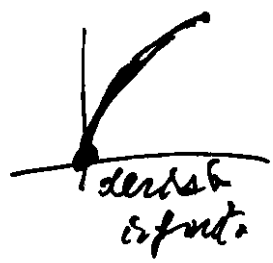
Simmetrie: $f(x) = f(-x)$



il grafico è simmetrico rispetto all'asse y

f è continua sul dominio perché la formula contiene solo funzioni notevoli continue

è derivabile? $\sqrt{\ }$ non è sempre derivabile



E' in sospetto di punti a tangente verticale o angolosi

Questo può capitare quando l'argomento della $\sqrt{\ }$ è zero

$\sqrt{1+x^2}$ $\quad 1+x^2 = 0$? MAI

È derivabile, però non del tutto bene

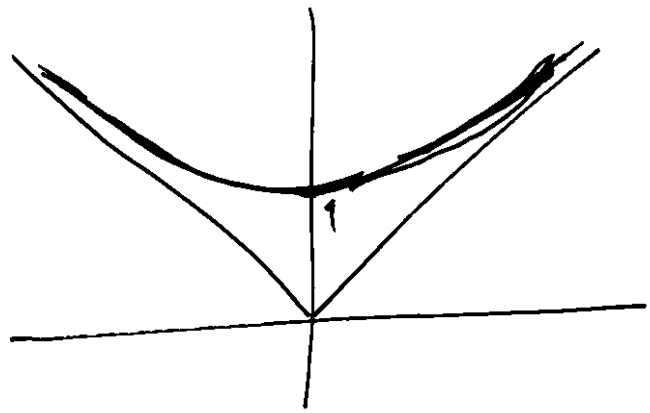
$= \sqrt{x^2}$ $\quad x^2 \geq 0$ $\quad \boxed{x=0}$

$|x|$ $\quad$ angoloso

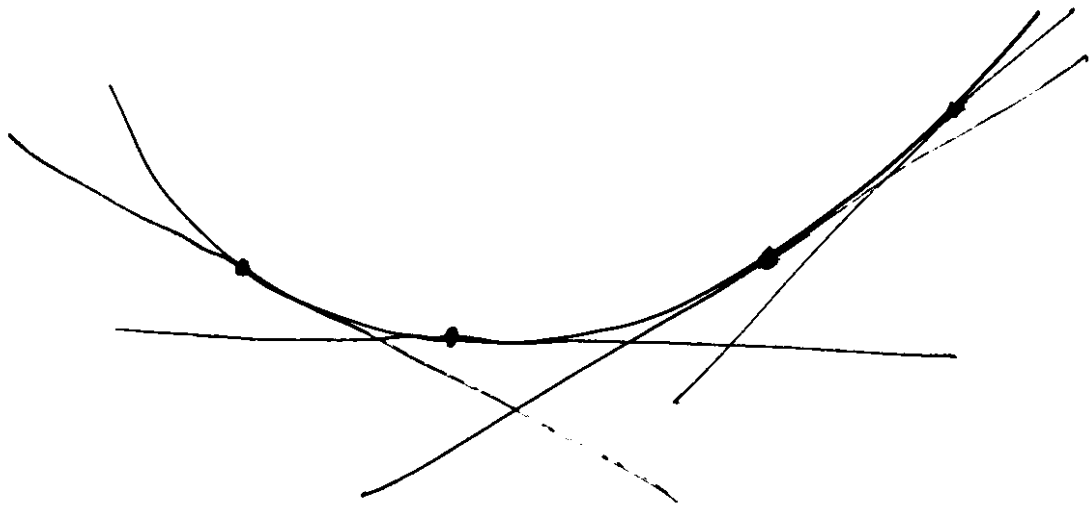
Dominio : $\sqrt{1+x^2}$

$1+x^2 \geq 0$ vera sempre

$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$

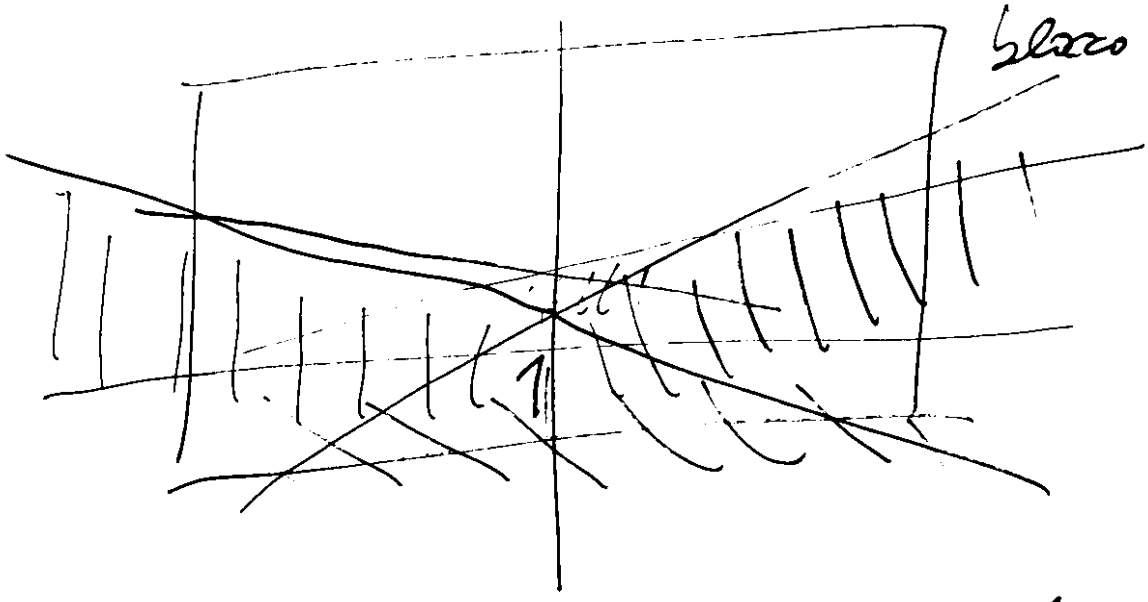


$f(0) = \sqrt{1+0^2}$
$= 1$



MOLATURA DELLE LENTI CONVESSE

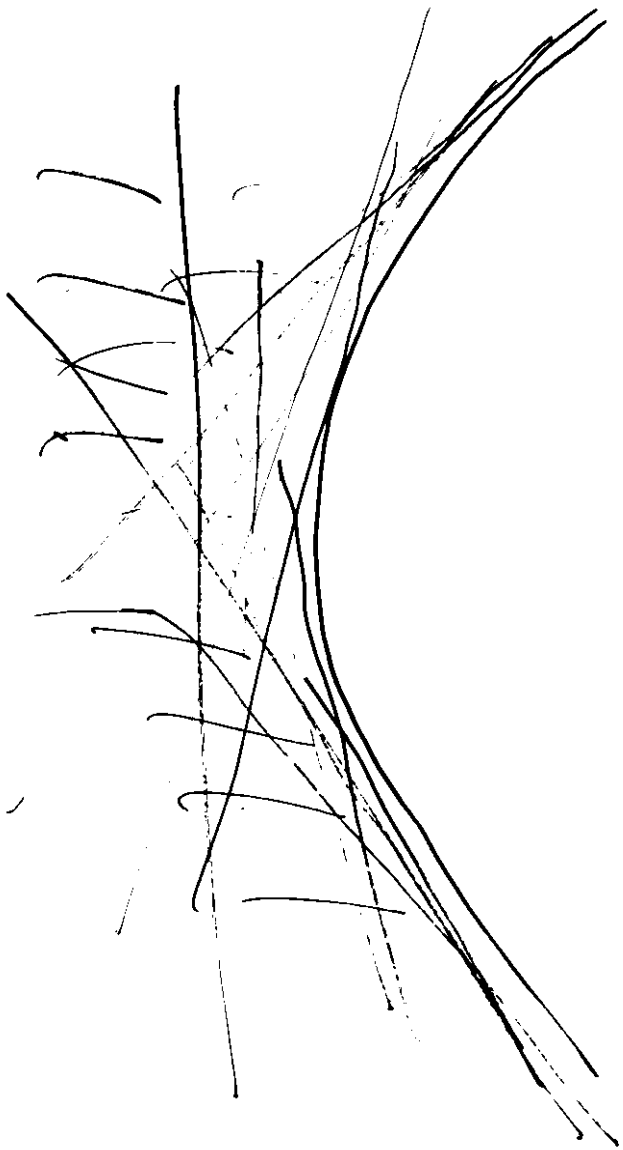
$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$



$x_0 = 1$

$y =$ retta

17 may 2021 – p. 24



21 mag 2021 - p.1

STUDIO DI FUNZIONE

$$f(x) = \frac{e^x(x-3)}{x^2+4x+6}$$

a) dominio, continuità, segno, limiti agli estremi, eventuali asintoti.

Dominio: condizione di esistenza $x^2+4x+6 \neq 0$

l'eq. associata è $x^2+4x+6=0$

$$\frac{\Delta}{4} = 4 - 6 < 0$$

Il denom non si annulla mai (sei reali).

$\text{dom } f = \mathbb{R}$

Continuità su tutto il dominio perché la funzione.

SEGNO

segno di e^x — sempre > 0

segno di e^x — 3

segno di $(x-3)$ — 0

segno di x^2+4x+6 —

segno di $f(x)$ — 0

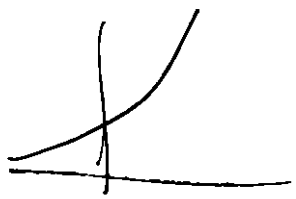
21 mag 2021 - 1.2

Gli estremi sono $\pm\infty$ del dominio

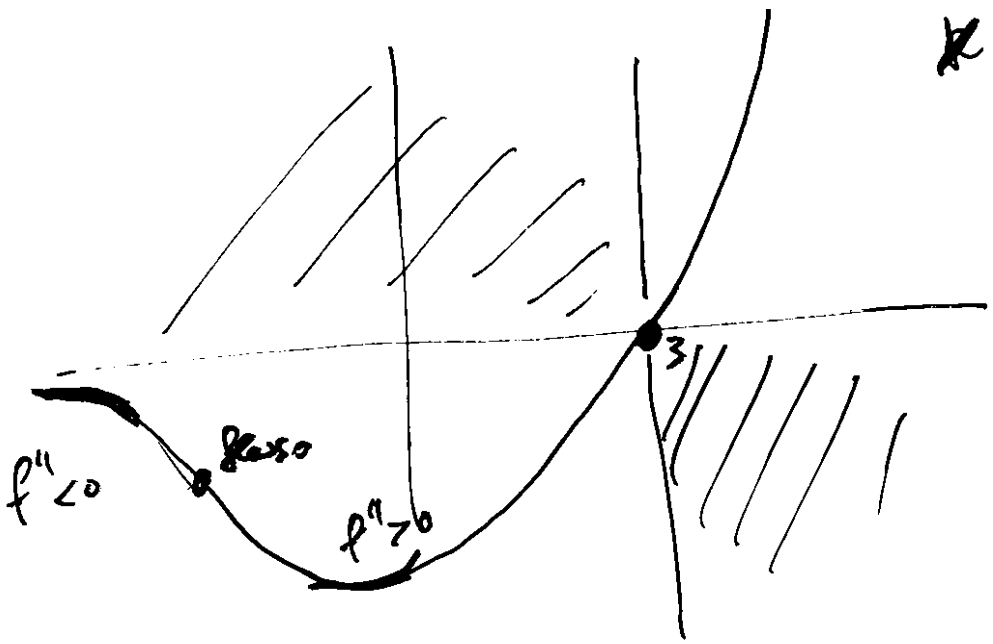
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(x-3)}{x^2+4x+6} = \frac{\infty}{\infty}\ \text{pol.} = \infty$$

anche fattibile a bar

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x(x-3)}{x^2+4x+6} = \frac{0}{\infty} = 0$$



Prima bozza di grafico



Asintoti verticali no, f continua su $\mathbb{R}$

orizzontali: l'asse y — per $x\to-\infty$

obliqui:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(x-3)}{x^2+4x+6}\cdot\frac{1}{x} = +\infty$$

b) calcolare $f'(x)$, trovare gli intervalli di crescenza/decrescenza e max/min locali.

$$f(x) = \frac{e^x(x-3)}{x^2+6x+6}$$

$$f'(x) = \frac{D(e^x(x-3))(x^2+6x+6) - e^x(x-3)D(x^2+6x+6)}{(x^2+6x+6)^2}$$

$$= \frac{(e^x(x-3)+e^x)(x^2+6x+6) - e^x(x-3)(2x+6)}{(x^2\ldots)^2} =$$

$$= e^x \frac{(x-2)(x^2+6x+6) - (x-3)(2x+6)}{(\ )^2} =$$

$$= e^x \frac{x^3+6x^2+6x-2x^2-8x-12-(2x^2+6x-6x-12)}{(\ )^2}$$

$$= e^x \frac{x^3+2x^2-2x-12-2x^2+2x+12}{(\ )^2} =$$

$$= e^x \frac{x^3}{(x^2+6x+6)^2}$$

segno di $f'(x)$ è lo stesso del segno di x^3

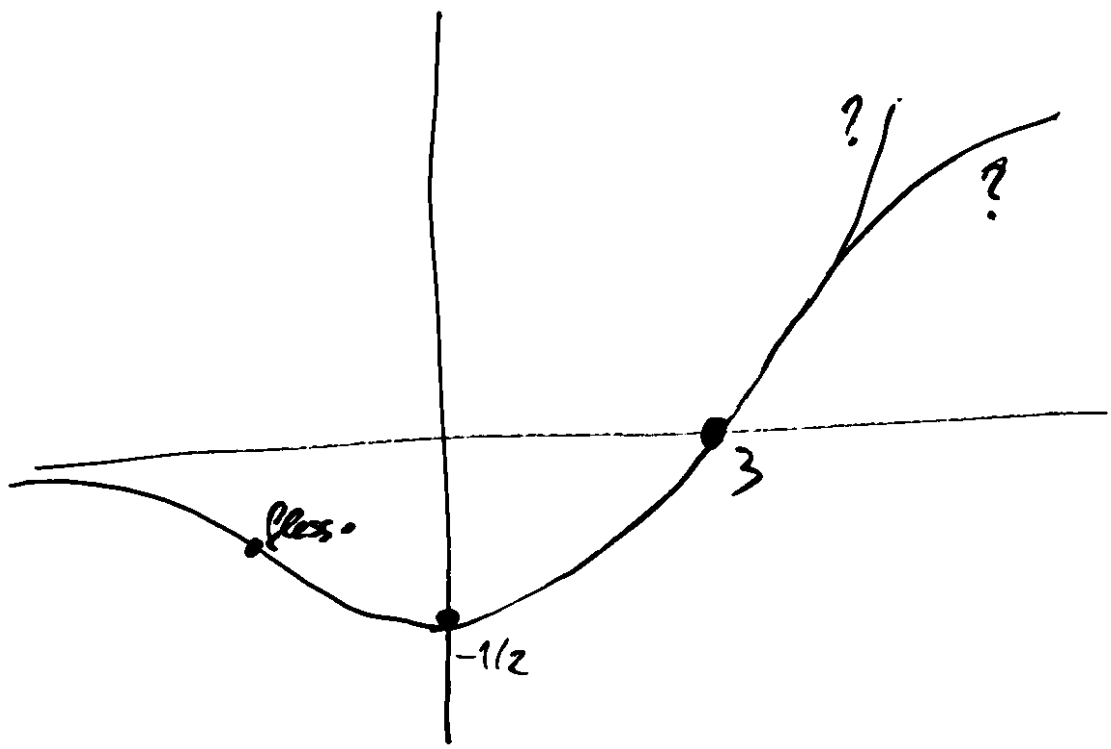
segno di $f'(x)$ ------ 0 ——

andamento di f ⟍ ⟋

min globale

Seconda bozza

$f(0) = \frac{e^0(0-3)}{6} = -\frac{1}{2}$



c) calcolare $f''(x)$ mostrando che esiste in ogni flesso.

$$f'(x) = \frac{e^x x^3}{(x^2+4x+6)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(e^x x^3 + e^x 3x^2)(\dots)^2 - e^x x^3 \, 2(\dots)(2x+4)}{(\dots)^{4\,3}}$$

$$= \frac{e^x(x^3+3x^2)(\dots) - 2e^x x^3(2x+4)}{(\;)^3} =$$

$$= e^x x^2 \frac{(x+3)(x^2+4x+6) - 2x(2x+4)}{(\;)^3} =$$

$$= e^x x^2 \frac{x^3 + 4x^2 + 6x + 3x^2 + 12x + 18 - 4x^2 - 8x}{(\;)^3}$$

$$f''(x) = e^x x^2 \frac{x^3 + 3x^2 + 10x + 18}{(x^2 + 4x + 6)^3}$$

I flessi sono i punti in cui $f''(x)$ cambia di segno.

0 non è un flesso

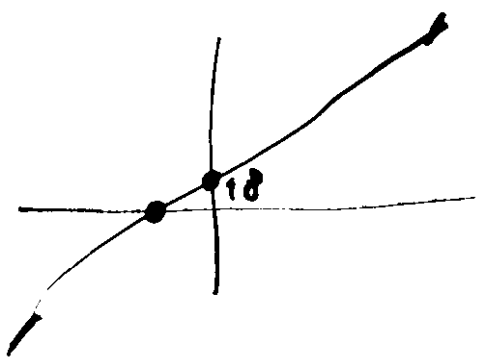
Eventuali flessi sono zeri di

$$x^3 + 3x^2 + 10x + 18$$

quante volte si annulla questo polinomio?

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 10x + 18$$

e provo a studiarla



Per il teorema dell'esistenza degli zeri, g deve annullarsi almeno una volta

Sappiamo che g è crescente (strett.) o zero sarebbe unico.

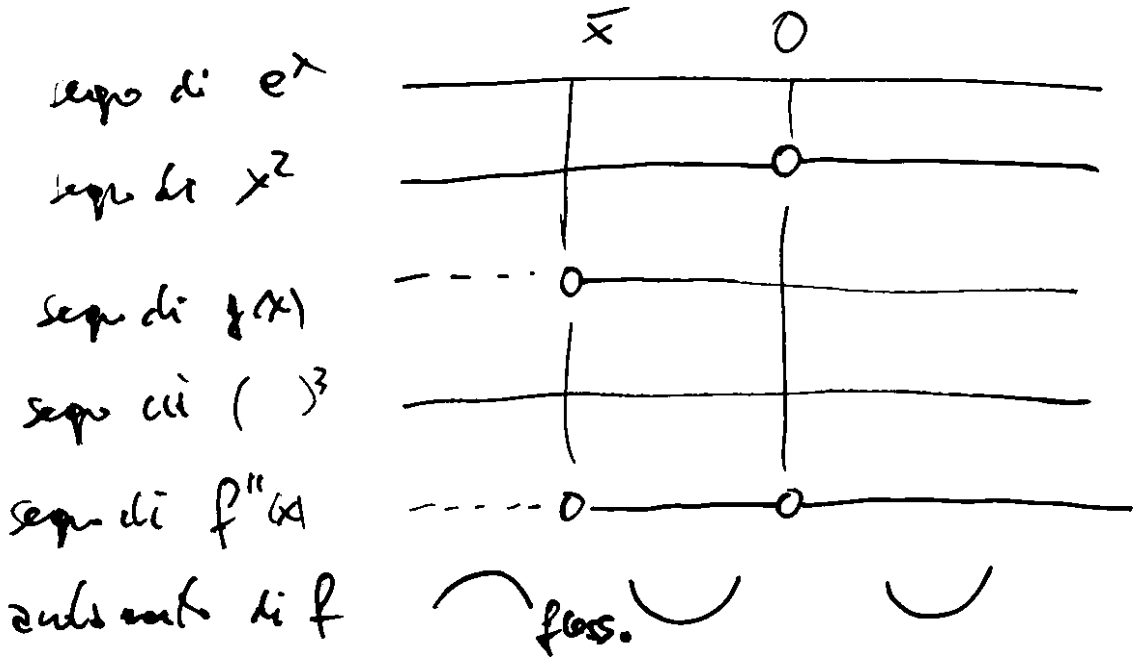
$$g'(x) = 3x^2 + 6x + 10$$

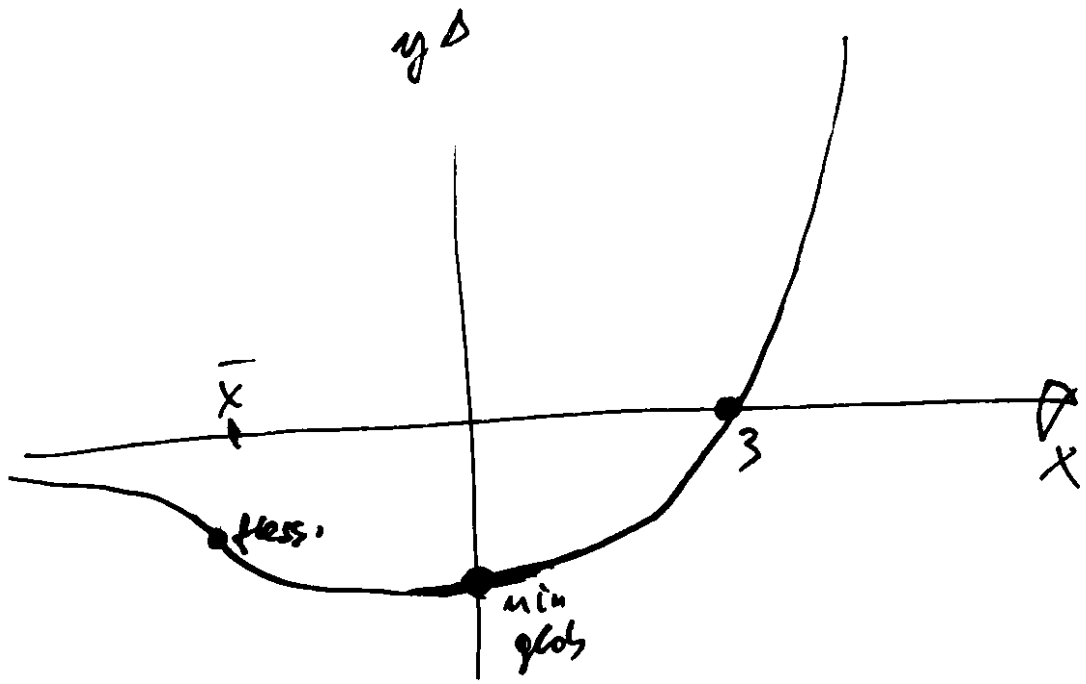
$g'(x) = 0 \quad 3x^2 + 6x + 10 = 0 \quad \frac{\Delta}{4} = 9 - 30 < 0$

$g'(x) > 0$ $\Rightarrow$ g è strettamente crescente

$g(x)$ si annulla per un unico $\bar{x} < 0$

$$f''(x) = e^x x^2 \frac{g(x)}{(x^2+6x+6)^3}$$





21 mag 2021 - 7.7

LIMITE

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 \left(\operatorname{sen}\frac{2}{x} - 2\operatorname{sen}\frac{1}{x} \right)$$

$x^3 \to +\infty$

$\operatorname{sen}\frac{2}{x} \to 0$ (da $+\infty$)

$2\operatorname{sen}\frac{1}{x} \to 0$ (da $+\infty$)

$\operatorname{sen}\frac{2}{x} - 2\operatorname{sen}\frac{1}{x} \to 0$

indet. $+\infty \cdot 0$

CDV $\quad \frac{1}{x} = t \to 0^+$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t^3} \left(\operatorname{sen} 2t - 2\operatorname{sen} t \right) \qquad \infty \cdot 0$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} 2t - 2\operatorname{sen} t}{t^3} \qquad \frac{0}{0} \text{ Hôpital}$$

21 may 2021 - p.8

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{2}{x} - 2\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}} \qquad \frac{0}{0} \text{ Hôpital}$$

$0\cdot\infty = \frac{0}{0}$

CDV $\frac{1}{x} = t$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{\operatorname{sen} 2t - 2\operatorname{sen} t}{t^3} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{t\to 0+} \frac{2\cos 2t - 2\cos t}{3t^2} \qquad \frac{2-2}{0} \frac{D}{0}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{t\to 0+} \frac{-4\operatorname{sen} 2t + 2\operatorname{sen} t}{6t} \qquad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos 2t - 2\frac{\operatorname{sen} t}{t}}{t} \to 1$$

$$\overset{H}{=} \lim_{t\to 0+} \frac{-8\cos 2t + 2\cos t}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$\lim_{t\to 0+} \left(-\frac{4}{3}\left(\frac{\operatorname{sen} 2t}{2t}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)\right) \to 1 \quad \to 1$$

$$= -\frac{4}{3} + \frac{1}{3} = -1$$

21 mag 2021 - p. 9

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{2}{x} - 2\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{2}{x^2}\cos\frac{2}{x} - 2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x}}{-3x^{-4}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2\cos\frac{2}{x} + 2\cos\frac{1}{x}}{-3x^{-2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\sin\frac{2}{x} - 2\sin\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^3\left(\sin\frac{2}{x} - 2\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot 1\cdot\frac{1}{x}\right) =$$

SBAGLIATA PSEUDO-REGOLA

$$= \lim_{x\to+\infty} x^3\left(\sin\frac{2}{x} - \frac{2}{x}\right)$$

CDV $t = \frac{1}{x}$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin 2t - 2t}{t^3} \overset{H}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{2\cos 2t - 2}{3t^2} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{-4\sin 2t}{6t} \overset{H}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{-8\cos 2t}{6} = -\frac{8}{6} =$$

$$= -\frac{4}{3}$$

21 mag 2021 - p. 10

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\sin\frac{2}{x} - 2\sin\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\cdot\frac{2}{x} - 2\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

SBAGLIATO!!

$$= \lim_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot 0 = \lim_{x\to+\infty} 0 = 0$$

0 numero secco
SECCO
non è una funzione
che tende a 0

Con 3 metodi stesso 3 risultati:

-1 $\quad -\frac{4}{3} \quad 0$

Attività Verifica numerica

$$f(x) = x^3\left(\sin\frac{2}{x} - 2\sin\frac{1}{x}\right)$$

pone $x = 1000$ $\quad f(1000) = -0,99999975\ldots$

21 mag 2021 - p. 11

CASI IN CUI LA PSEDOREGOLA

5ª REGOLA

$$\lim \left(f(x) + g(x) \right) = \lim \left(f(x) + L \right)$$

$g(x) \to$ limit finito L

$$\lim f(x)\, g(x) = \lim f(x)\, L$$

$g(x) \to L$ finito $\neq 0$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f(x)}{L}$$

$g(x) \to L$ finito $\neq 0$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)\, h(x)} = \lim \frac{f(x)}{L\, h(x)}$$

$g(x) \to L$ finito $\neq 0$

21 mag 2021 - p. 12

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\sin\frac{2}{x} - \frac{2}{0}\sin\frac{1}{x}\right) =$$

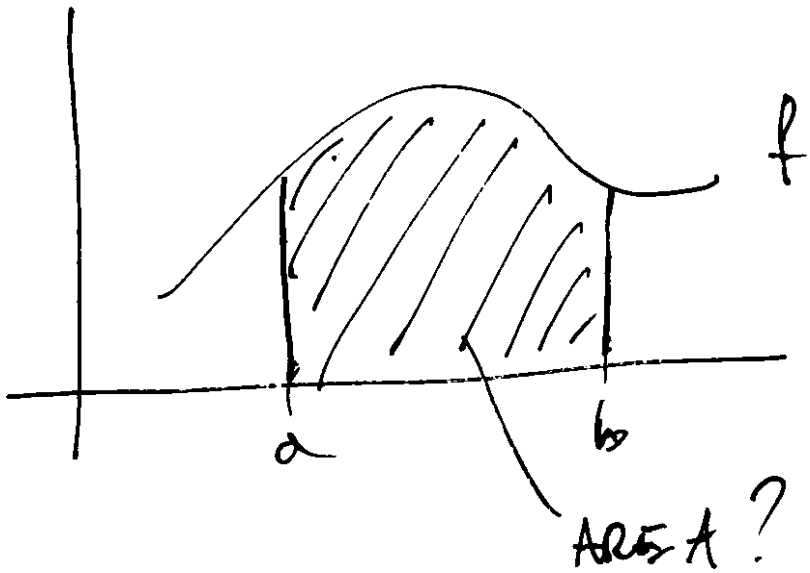
$$= \lim_{x\to+\infty} x^3\left(\sin\frac{2}{x} - 2\,\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\,\frac{1}{x}\right)$$

$\frac{1}{x} \to 0$, $\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \to 1$

$$f(x)\left(g(x) + h(x)\,s(x)\right)$$

$h(x) \to 1$

INTEGRALE



AREA = limite di somme di Riemann

NOTAZIONE

$$\text{AREA} = \int_a^b f(x)\,dx$$

INTEGRALE DA a A b DI f(x) IN DX

CALCOLO PRATICO DELL'INTEGRALE è DATO dal Teorema Fondamentale del Calcolo.

Teorema Siano $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni con le proprietà seguenti:

1) f è continua.
2) F è derivabile in ogni punto e $F'(x) = f(x)$.

Allora $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Il teorema fondamentale riconduce il problema di calcolare l'area, cioè $\int_a^b f(x)\,dx$, al problema di trovare una F la cui derivata sia f.
Se so risolvere il secondo ho risolto anche il primo.
Il secondo problema è chiamato il problema di calcolare PRIMITIVE.

Def Dicesi primitiva di $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ tale che

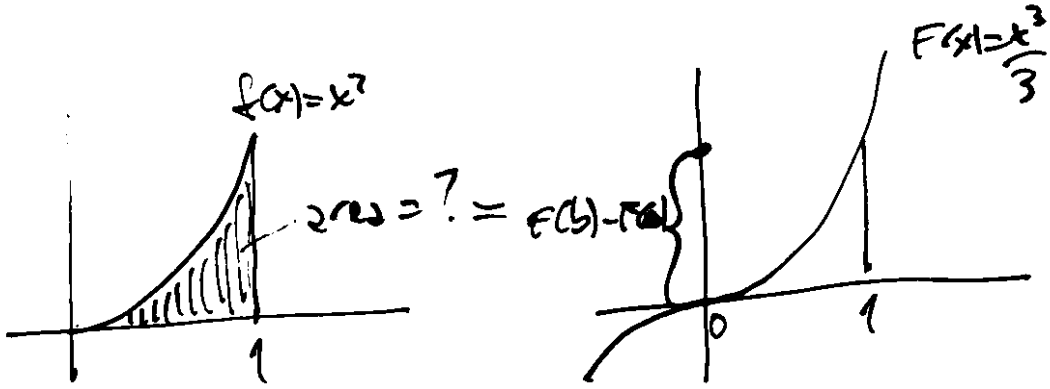
$$F'(x)=f(x) \quad \forall x\in[a,b]$$

PRIMITIVA

f ← derivata — F

f: data — F: incognita

$f'(x)=2x$ (derivata) ← derivata — $f(x)=x^2$ (data) ← derivata — $F(x)=\frac{x^3}{3}$ (primitive)

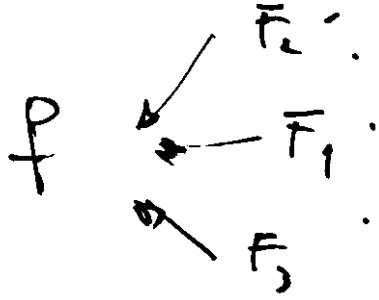


SPOSTIAMO L'ATTENZIONE nel resto del corso il problema delle primitive.

Cosa si sa in generale di questo problema?

Proposizione Se ho una primitiva F di una funzione f, ne esistono sempre infinite altre.

In altre parole il problema delle primitive non ha mai soluzione UNICA (quando esistono, sono infinite)



Dim se F è una primitiva e sommo una costante

$$F_1(x) = F(x) + C \quad \text{costante}$$

anche F_1 è una primitiva

ci sono infinite possibili costanti

$$F_1'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$$

Anche F_1 è una primitiva

Si può dire di più

Teorema se I è un <u>intervallo</u> e F_1, F_2 sono due primitive di $f: I \to \mathbb{R}$, allora F_1 e F_2 differiscono per una costante, cioè $F_2(x) = F_1(x) + c$

Se sono su un intervallo e conosco una primitiva, le conosco tutte: basta aggiungere una costante e ho <u>tutte</u> le altre.

Dim $F_1(x) - F_2(x)$ e calcolo la derivata:

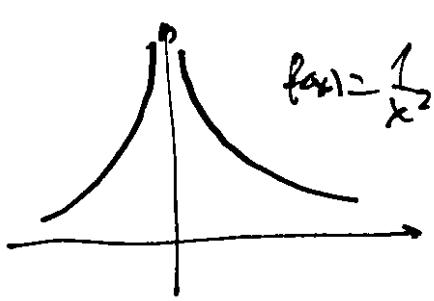
$$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

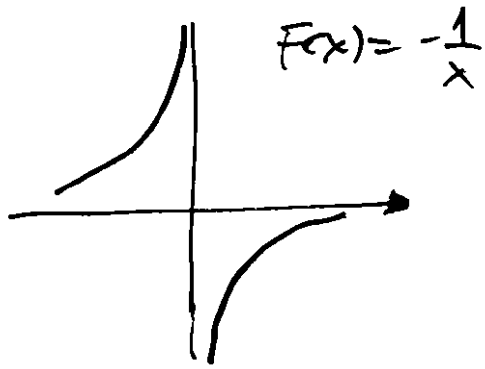
$\forall x \in I$.

$F_1 - F_2$ è una funzione $I \to \mathbb{R}$ con derivata <u>sempre nulla</u>. Il teorema delle derivate nulle ci garantisce che $F_1 - F_2$ è costante.

CVD

Esempio $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad F(x) = -\frac{1}{x}$ è una primitiva





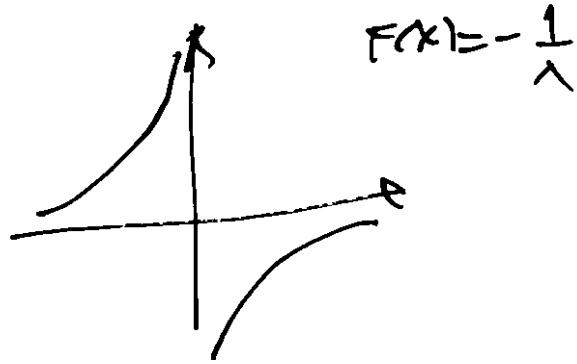
Altre primitive? Sì, basta aggiungere una costante

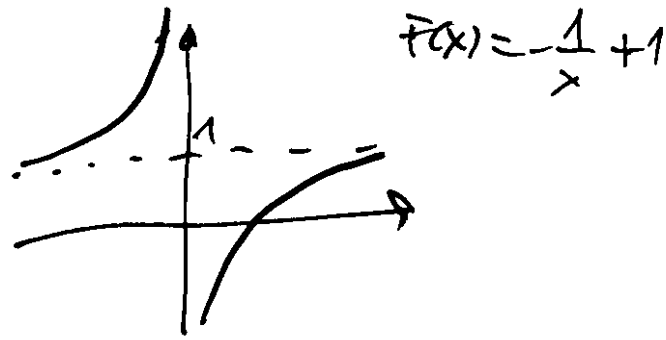
$F(x) = -\frac{1}{x} + C$ sono altre primitive

f_1

$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

non è un intervallo

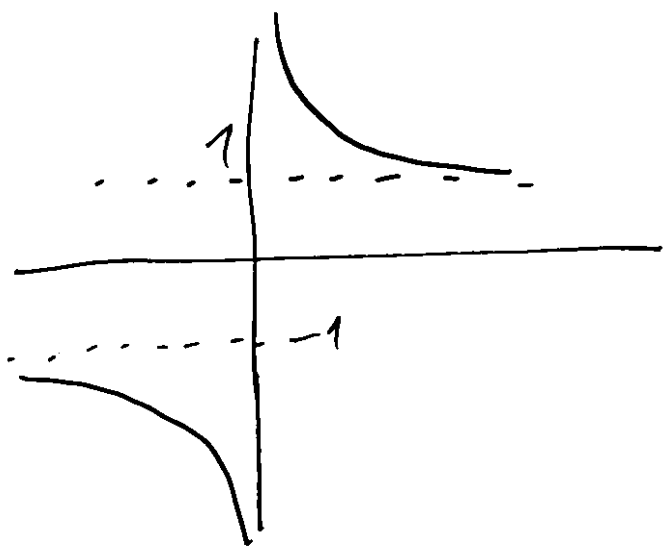




Ci sono primitive non ottenibili in questo modo

Per esempio

$$F_1(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + 1 & \text{se } x > 0 \\ -\frac{1}{x} - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



F_1 è una primitiva però non è del tipo $F(x) + \text{costante}$

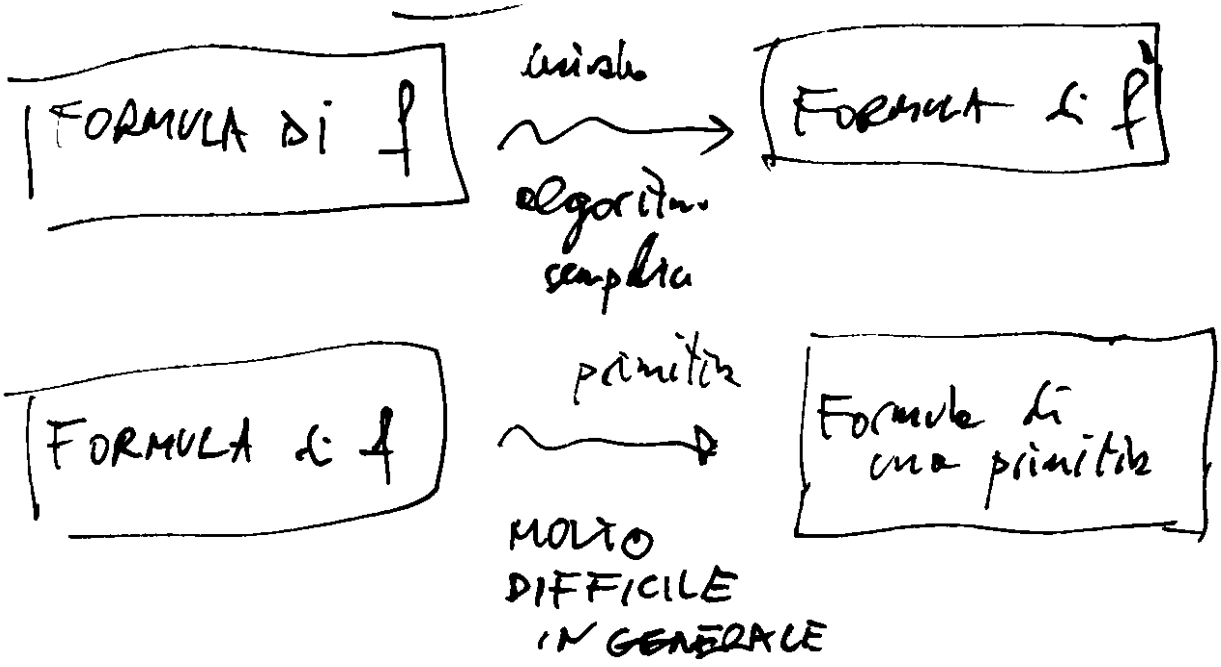
31 mag 2021 – p. 6

Problema delle primitive:

UNICITÀ: NO

ESISTENZA: non è semplice

Mentre abbiamo un numero finito di regole per calcolare la derivata di una funzione elementare



Esiste un algoritmo che prende una formula di una funzione elementare e dà una formula di una primitiva, però l'algoritmo è tremendamente complicato ("ALGORITMO" DI RISCH)

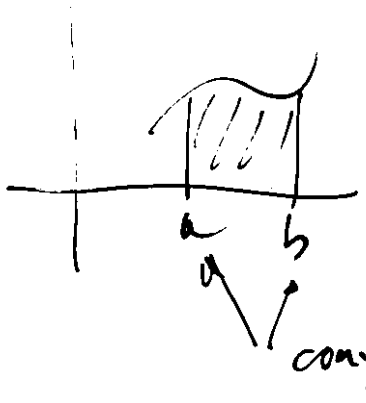
A tutt'oggi non ci sono implementazioni complete dell'algoritmo, ma solo parziali

Quand'anche l'algoritmo arrivi a un risultato, potrebbe essere così complicato da

Senza aiuto di macchine, ci sono diversi trucchi che si possono usare per calcolare primitive pratiche.

Notazione $\int f(x)\,dx$ è il simbolo di Leibniz per una primitiva generica di $f(x)$

$\int f(x)\,dx$ è detto anche INTEGRALE INDEFINITO



Piccolo elenco di funzioni che non hanno primitiva elementare (hanno primitive, ma non elementare)

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \int \frac{\lg x}{x}\,dx \qquad \int \operatorname{sen}(x^2)\,dx$$

$$\int e^{-x^2}\,dx \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}\,dx$$

non è elementare

MORALE: se si scrive a caso una frazione elementare che non sia solo polinomiale, ma con un misto di funzioni non polinomiali, è altissima la probabilità che NON abbia primitiva elementare.

REGOLE DI INTEGRAZIONE
(calcolo di primitive)

Linearità $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

(l'integrale della somma = somma degli integrali)

$$\int c f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$$

(una costante moltiplicativa si può portare dentro e fuori dal segno di integrale

Esempio $\int (1+x^2)^2\,dx =$

$$= \int (1 + x^4 + 2x^2)\,dx =$$

$$= \int 1\,dx + \int x^4\,dx + \int 2x^2\,dx =$$

$$= x + \frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3}$$

31 mag 2021 - 9

INTEGRALI IMMEDIATI

Partiamo da una tavola di derivate

$f \to f'$	
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	$n x^{n-1}$

prendo funzione

funzione	primitiva
1	x
$2x$	x^2
$3x^2$	x^3
$n x^{n-1}$	x^n

poco pratica

$x^{n-1} \quad \frac{x^n}{n}$

$m = n-1$

$x^m \quad \frac{x^{m+1}}{m+1}$

VARIABILE

funzione	primitive
1	x
x	$\frac{x^2}{2}$
x^2	$\frac{x^3}{3}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$Dx^n = n x^{n-1}$$

La regola $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

funziona anche con gli n negativi:

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$$

anche per gli n frazionari.

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{3/2}}{3/2} =$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2}$$

C'È UN CASO IN CUI la regola fallisce:

$$\boxed{n \geq -1}$$

$$= \int x^{-1} dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{x^0}{0} = \frac{1}{0}$$ non ha senso

$$= \int \frac{1}{x} dx = \left| \lg x = \ln x \right.$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \lg x$$

ha senso $\forall x \neq 0$ | ha senso solo per $x > 0$

ASIMMETRIA

REGOLA DEFINITIVA:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \lg|x|$$

è simmetrica: il dominio dei due membri è lo stesso. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

VERIFICA:

$$D\lg|x| = ? = \frac{1}{x}$$

1° modo: spezzare in due

Se $x>0$ $\quad D\lg|x| = D\lg x = \boxed{\frac{1}{x}}$

Se $x<0$ $\quad D\lg|x| = D\lg(-x) =$

$$= \frac{1}{-x}\cdot D(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{x}}$$

2° modo

$$D|x| = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} \quad (\operatorname{Sgn} x \text{ se } x\neq 0)$$

$$D\lg|x| = \frac{1}{|x|}\cdot D|x| = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}$$

ALTRI INTEGRALI IMMEDIATI

$f \to f'$	
e^x	e^x
$\lg x$	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

funzione $\to$	primitiva
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$\lg \lvert x \rvert$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsen} x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$

INTEGRALI QUASI IMMEDIATI

funz.	primitive
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

funz.	primitive
$f(x)^n f'(x)$	$\frac{f(x)^{n+1}}{n+1}$

$n=5$

$$= \int (3x+1)^5 \, dx \overset{?}{=} \int f(x)^n f'(x) \, dx$$

$$= \int f(x)^5 f'(x) \, dx$$

$f(x) = 3x+1$

$f'(x) = 3$

$$= \frac{1}{3} \int (3x+1)^5 \cdot 3 \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+1)^{5+1}}{5+1} =$$

$$= \frac{1}{18} (3x+1)^6$$

VERIFICA prendere il risultato e calcolare la derivata

$$D \frac{1}{18} (3x+1)^6 = \frac{1}{18} \cdot 6 (3x+1)^5 \cdot 3 = (3x+1)^5$$ OK

$$\int f(x)^n f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1}$$

funzione	primitiva
e^x	e^x
$e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$e^{f(x)}$

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)}$$

Esempio:

$$= \int e^{2x}\,dx = ? = \int e^{f(x)} f'(x)\,dx$$

$f(x) = 2x$

$f'(x) = 2$

$$= \frac{1}{2}\int e^{2x} \cdot 2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} e^{f(x)} = \frac{1}{2} e^{2x}$$

VERIFICA $D\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot 2 = e^{2x}$ OK

31 mag 2021 p. 15

$$= \int x\, e^{x^2} dx = ? = \int e^{f(x)} f'(x)\, dx$$

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$$= \frac{1}{2} \int e^{x^2} \cdot 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2}$$

VERIFICA: $D \frac{1}{2} e^{x^2} = \frac{1}{2} e^{x^2} \cdot Dx^2 = \frac{1}{2} e^{x^2} \cdot 2x$

$= x e^{x^2}$ OK

INTEGRALE DELLA GAUSSIANA

$$\int e^{-x^2} dx = ? = \int e^{f(x)} f'(x)\, dx$$

$f(x) = -x^2$

$f'(x) = -2x$

$$\int \frac{1}{2x} e^{-x^2} \cdot 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} e^{-x^2} 2x \, dx$$

SBAGLIATO $\int \frac{1}{2x} e^{-x^2} \cdot 2x \, dx = \frac{1}{2x} e^{-x^2}$

VERIFICA: $D \frac{1}{2x} e^{-x^2} = -\frac{1}{2x^2} e^{-x^2} + \frac{1}{2x} (-2x) e^{-2x}$

non è la funzione di partenza

ERRORE GRAVE

$$\int f(x)\, g(x)\, dx = f(x) \int g(x)\, dx$$

$$\int c\, g(x)\, dx = c \int g(x)\, dx$$

c COSTANTE

funzione	primitiva	funzione	primitiva
$\frac{1}{x}$	$\lg \lvert x \rvert$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\lg \lvert f(x) \rvert$

$$D \lg \lvert f(x) \rvert = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$D \underbrace{\lg \lvert f(x) \rvert}_{g(f(x))} = g'(f(x))\, f'(x) = \frac{1}{f(x)}\, f'(x)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \lg|f(x)|$$

Esempi.

$$= \int \frac{1}{3x+1}\,dx = ? = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$f(x) = 3x+1$

$f'(x) = 3$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\lg|3x+1|$$

$$\int \frac{1}{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\lg(3x+1)$$

$\mathrm{dom}(\ ) = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{3}\}$

$\mathrm{dom}(\ ) =]\frac{1}{3}, +\infty[$

funzione	primitiva
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$

funzione	primitiva
$\frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$	$\operatorname{arctg} f(x)$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx = \operatorname{arctg} f(x)$$

Esempi:

$$= \int \frac{1}{1+2x^2}\,dx = ? = \int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{1+(\sqrt{2}x)^2}\,dx = \int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx$$

$$f(x) = \sqrt{2}\,x$$
$$f'(x) = \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}x)^2}\,dx = \int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x)$$

VERIFICA $D\,\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{1+(x\sqrt{2})^2} \cdot D(x\sqrt{2}) = OK$

31 maj 2021 - p. 19

$$= \int \frac{1}{2+x^2}\,dx = ? = \int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{2\left(1+\frac{x^2}{2}\right)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx \overset{?}{=} \frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\text{L}\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x_0}{\sqrt{2}} = \dots$$

CALCOLO DI PRIMITIVE

Def Dicesi primitiva (o integrale indefinito) di una funzione f un'altra funzione la cui derivata è f.

$$F \text{ tale che } F' = f$$

F ↑ primitiva di f

Il problema di trovare primitive di funzioni date è importante, per esempio per calcolare AREE.

Il problema in generale è molto difficile.

Ci sono tecniche per fare calcoli e molte situazioni importanti

PRIMITIVE IMMEDIATE: si prende un elenco di derivate e lo si trasforma subito o quasi subito in un elenco di primitive.

PRIMITIVE QUASI IMMEDIATE

f	f'
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

f	$\int f(x)\,dx$ primitive
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcsen} x$

funzione	primitiva
$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$	$\arcsin f(x)$

Inversa proc

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx = \arcsen f(x)$$

Esempio $\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx =$

$= \int \frac{1}{\sqrt{2\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}}\,dx =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}\,dx$ schema $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,dx$ $\quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,dx$

$= \arcsen f(x) = \arcsen \frac{x}{\sqrt{2}}$

VERIFICA $D \arcsen \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}} \cdot D\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ OK

VARIANTE

$$\int \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}\,dx = \qquad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,dx$$

denominatore OK

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$= \int \frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx$$

NON RIENTRA NESSUN SCHEMA

TENTIAMO UN'ALTRA VIA

$$\int f(x)^n f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}\,dx =$$

$n = -\frac{1}{2}$

$f(x) = 2-x^2$

$f'(x) = -2x$

$$= \int (2-x^2)^{-1/2} x\,dx =$$

$$= \frac{1}{-2} \int \underbrace{(2-x^2)}_{f(x)}^{\overbrace{-1/2}^{n}} \underbrace{(-2x)}_{f'(x)}\,dx = -\frac{1}{2} \int f(x)^n f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{(2-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = -\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2-x^2}}{\frac{1}{2}} = \boxed{-\sqrt{2-x^2}}$$

VERIFICA $\quad D\left(-\sqrt{2-x^2}\right) =$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2-x^2}}\,(-2x) = \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} \quad \text{OK}$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

Punto di partenza è la formula della derivata del prodotto:

$$D\left(f(x)\,g(x)\right) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,Dg(x)$$

$$f'(x)\,g(x) = D\left(f(x)\,g(x)\right) - f(x)\,g'(x)$$

Prendo gli integrali dei due membri

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = \underbrace{\int D\left(f(x)\,g(x)\right)dx}_{\text{BANALE} \;=\; f(x)\,g(x)} - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

REGOLA BANALE

$$\int Df(x)\,dx = f(x) \qquad D\int f(x)\,dx = f(x)$$

D e $\int$ si comportano come funzioni inverse una dell'altra

$$\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx$$

$$\boxed{\int (Df(x))\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, (Dg(x))\, dx}$$

SCHEMA DELL'INTEGRAZIONE PER PARTI

$= \int$ prodotto di due fattori $dx = ?$

?!

$(Df(x)) \cdot g(x)$

$= f(x)\, g(x) - \int f(x) \cdot (Dg(x))\, dx$

FATTO: ci sono molte situazioni in cui il nuovo integrale $\int f(x)\, Dg(x)\, dx$ è più semplice di quello di partenza.

Esempio

$$\int \underbrace{x\, e^x}_{\text{prodotto}}\, dx = \int \left(D\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)(e^x)\, dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} \cdot De^x\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x\, dx \quad \text{più complicato}$$

$$\int x\, e^x\, dx = \int D(e^x) \cdot (x)\, dx =$$

$$= e^x \cdot x - \int e^x \cdot Dx\, dx =$$

$$= e^x x - \int e^x \cdot 1\, dx =$$

$$= e^x x - \int e^x dx = e^x x - e^x =$$

$$= (x-1)e^x$$

VERIFICA: $D((x-1)e^x) = 1\, e^x + (x-1)e^x =$

$$= e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

ok

$$= \int \lg x\, dx = \int (D\lg x)\, (x)\, dx$$

non c'è prodotto

$$= \int (\lg x) \cdot (1)\, dx = \int D(x) \cdot \lg x\, dx =$$

$$= x \lg x - \int x \cdot D \lg x\, dx =$$

$$= x \lg x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \lg x - \int 1\, dx = \boxed{x \lg x - x}$$

$$D(x\lg x - x) = 1\cdot \lg x + x\frac{1}{x} - 1 =$$

$$= \lg x + 1 - 1 = \lg x \quad OK$$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = \int D(-\cos x)\,(x^2)\, dx =$$

$$= (-\cos x)x^2 - \int (-\cos x)\, Dx^2\, dx =$$

$$= -x^2\cos x + \int (\cos x)\cdot 2x\, dx =$$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\, dx =$$

$$= -x^2\cos x + 2\int D(\operatorname{sen} x)\,(x)\, dx =$$

$$= -x^2\cos x + 2\left((\operatorname{sen} x)\,x - \int (\operatorname{sen} x)\underbrace{Dx}_{\substack{4\\1}}\, dx \right) =$$

$$= -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x - 2\int \operatorname{sen} x\, dx =$$

$$= \boxed{-x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x}$$

$D(-x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x) = -2x\cos x + x^2\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x + 2x\cos x$
$-2\operatorname{sen} x = x^2\operatorname{sen} x$ OK

SITUAZIONE NOTEVOLE

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \int D(e^x)(\operatorname{sen} x)\, dx =$$

$$= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x D \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx =$$

$$= e^x \operatorname{sen} x - \int D(e^x)(\cos x)\, dx =$$

$$= e^x \operatorname{sen} x - \left(e^x \cos x - \int e^x D \cos x \, dx \right) =$$

$$= e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x + \int e^x (-\operatorname{sen} x)\, dx =$$

$$= e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

lo stesso

Portiamo l'ultimo integrale a primo membro

$$2\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x$$

dividiamo per 2:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x}{2}$$

VERIFICA

$$D\,\frac{e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x}{2} = \frac{1}{2}\Big(e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$$

$$- e^x \cos x - e^x(-\operatorname{sen} x) \Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(e^x \operatorname{sen} x + e^x \operatorname{sen} x \Big) = e^x \operatorname{sen} x$$

OK

APPLICANDO DUE VOLTE l'integrale per parti puoi succedere di scrivere a quel cosa di questo tipo.

$$\left(\int \text{di partenza}\right) = (\text{funz noti} + c\left(\int \text{di partenza}\right)$$

Se $c = 1$ gli integrali si cancellano, nulla di fatto

Se $c \neq 1$ si ricava

$$\int \text{di part} = \frac{\text{funz noti}}{1-c}$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE O CAMBIO DI VARIABILI

PRIMO SCHEMA

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

CDV $\quad y = g(x)$

REGOLA DI LEIBNIZ

$$dy = g'(x)\, dx$$

$$= \int f(y)\, dy = F(y)$$

Supponiamo di riuscire a calcolare

L'integrale di partenza è

$$F(g(x))$$

VERIFICA $\quad D(F(g(x))) =$

$$= \underbrace{F'}_{f}(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x) \quad \text{OK}$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \overset{?}{=} \int f(g(x))\,g'(x)\,dx$$

$$= \int \frac{1}{1+e^x}\,e^x\,dx$$

CDV $\quad y = e^x$

Leibniz $\quad dy = e^x\,dx$

$$= \int \frac{1}{1+y}\,dy =$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \lg|f(x)|$$

$f(x) = 1+x$

$f'(x) = 1$

$$= \lg|1+y| =$$

$$= \boxed{\lg|1+e^x|}$$

VERIFICĂ $\quad D\left(\lg|1+e^x|\right) =$

$$= \frac{1}{1+e^x}\cdot D(1+e^x) = \frac{1}{1+e^x}\cdot e^x = \frac{e^x}{1+e^x}$$

OK

CAMBIO DI VARIABILI

SECONDO SCHEMA

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(y))\,g'(y)\,dy =$$

CDV $\quad x = g(y)$

Leibniz $\quad dx = g'(y)\,dy$

Supponiamo di riuscire a calcolare l'ultimo integrale

$$= F(y) = F(g^{-1}(x))$$

sostituzione inverso

funzione inversa di g, da calcolare

VERIFICA

$$D\left(F(g^{-1}(x))\right) = F'(g^{-1}(x))\,Dg^{-1}(x) =$$

$$= f(\cancel{g(g^{-1}(x))})\,g'(g^{-1}(x)) \cdot Dg^{-1}(x) =$$

$$= f(x)\,\cancel{g'(g^{-1}(x))} \cdot \frac{1}{\cancel{g'(g^{-1}(x))}} = f(x) \quad \underline{\text{OK}}$$

Esempio

$$= \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

CDV $x = \lg y$

$$dx = \frac{1}{y}\,dy$$

$$= \int \frac{e^{\lg y}}{1+e^{\lg y}} \cdot \frac{1}{y}\,dy =$$

$$= \int \frac{\cancel{y}}{1+y} \cdot \frac{1}{\cancel{y}}\,dy = \int \frac{1}{1+y}\,dy =$$

$e^x = y$

$$= \lg|1+y|$$

$$= \lg|1+e^x|$$

SBAGLIATO

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int \frac{y}{1+y}\,dy$$

$e^x = y$

REGOLA DI LEIBNIZ

$$y = f(x)$$

$$dy = f'(x)\,dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= g(y) \\ dx &= g'(y)\,dy \end{aligned}}$$

esempi

$$\begin{cases} x = y^3 \\ dx = 3y^2\,dy \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ dy = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx \end{cases}$$

ULTIME DUE ESERCITAZIONI

VEN 11 GIU ~~14:30 16:30~~ 9-11

LUN 14 GIU ~~8:30 9-11~~ 14:30-16:30

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI

Una funzione razionale è il rapporto fra due polinomi.

$$\frac{\text{numeratore (polinomio)}}{\text{denominatore (polinomio)}}$$

Per le funzioni razionali c'è un algoritmo relativamente semplice che ci dà sempre una primitiva elementare, SE si riesce a scomporre in fattori il denominatore.

PRIMO PASSO riduzione del grado del numeratore

si fa quando la funzione è del tipo:

$$\frac{\text{num. di grado alto}}{\text{denom. di grado basso}} \quad \text{oppure uguale}$$

$$\text{grado(num.)} \geq \text{grado(denom)}$$

(se no si salta il primo passo).

Il 1° primo passo consiste nel fare la

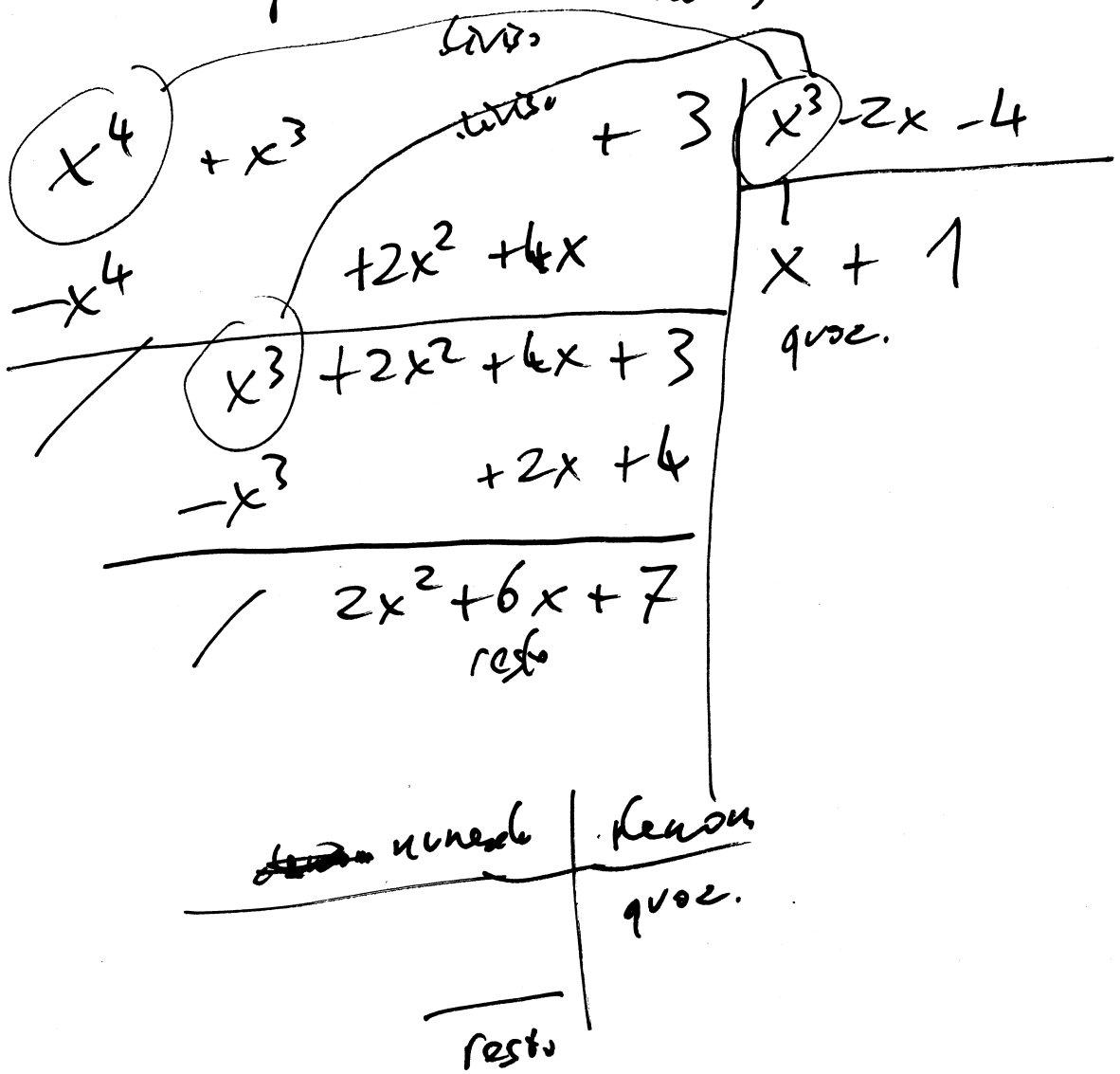
DIVISIONE DEI POLINOMI: di grado ≤ del denom.

$$\frac{P}{Q} = \text{polinomio (quoziente)} + \frac{\text{resto}}{Q}$$

La divisione:

$$\frac{P}{Q} = \frac{x^4 + x^3 + 3}{x^3 - 2x - 4} \qquad \int \frac{P}{Q}\,dx = ?$$

grado 4 / grado 3 — si fa il primo passo cioè la divisione



$$\frac{x^4+x^3+3}{x^3-2x-4} = \text{quoziente} + \frac{\text{resto}}{\text{denom}} =$$

$$= x+1 + \frac{2x^2+6x+7}{x^3-2x-4}$$

polin

$$\int \frac{x^4+x^3+3}{x^3-2x-4}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{2x^2+6x+7}{x^3-2x-4}\,dx$$

SECONDO PASSO

DECOMPOSIZIONE IN FRATTI PIÙ SEMPLICI

Principio Se ho $\dfrac{P(x)}{Q_1(x)\,Q_2(x)}$ (grado num) < grado (denom) e $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ scomposti in 2 fattori

non hanno radici in comune

allora si può decomporre la funzione iniziale come una somma del tipo

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}$$

in entrambe le frazioni il num ha grado < denom.

7 gen 2021 - P4

$$\frac{P}{Q_1 Q_2} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}$$

Esempio $\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx$

Applico il principio: (grado 0 sono costanti!)

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{P_1}{x-1} + \frac{P_2}{x+2} =$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

Come faccio a trovare le due costanti.

Faccio il denominatore comune

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax+2A+Bx-B}{(x-1)(x+2)} =$$

$$= \frac{(A+B)x + 2A - B}{(\ )(\ )} = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

↑ impongo

grado 0 $\quad 2A - B = 1$

grado 1 $\quad A + B = 0$

errore: $(A+B)x = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

7 giu 2021 – p.5

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+2} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)$$

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx = \int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\lg|x-1| - \lg|x+2|\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\lg\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$$

CASI PIÙ COMPLICATI

$$\frac{P}{\underbrace{Q_1 Q_2 Q_3}_{\text{zeri di } Q \text{ in comune}}} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} + \frac{P_3}{Q_3}$$

grado < denom

$$\int \frac{x+3}{x(x+1)(x-2)}\,dx$$

costanti (grado 0)

$$\frac{x+3}{x(x+1)(x-2)} = \frac{P_1}{x} + \frac{P_2}{x+1} + \frac{P_3}{x-2}$$

7 giu 2021 p. 6

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} =$$

$$= \frac{A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)} =$$

$$= \frac{Ax^2 - Ax - 2A + Bx^2 - 2Bx + Cx^2 + Cx}{x(\dots)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (-A-2B+C)x - 2A}{\epsilon \quad \dots}$$

impongo $= \dfrac{x+3}{\dots}$

$$\begin{cases} -2A = 3 \\ -A - 2B + C = 1 \\ A + B + C = 0 \end{cases} \quad \dots$$

$$\int \frac{x+3}{x(x+1)(x-2)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}\right) dx =$$

$$= A \log|x| + B \log|x+1| + C \log|x-2|$$

$\frac{P}{(x-\alpha)^n}$ ← grado < denom

↓ questi non si può applicare il principio

non c'è modo di scomporre il denominatore in modo che i fattori non abbiano radici in comune

~~Teorema~~ Altro principio: (scritti)

$$\frac{P}{(x-\alpha)^n} = \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-\alpha)^n}$$

Esempio:

$$\int \frac{x}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$$

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{Ax + (A+B)}{(x+1)^2}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\frac{x}{x^2+2x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{x}{x^2+2x+1}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx =$$

$(x+1)^{-2}$

$$= \log|x+1| - \frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} =$$

$$= \boxed{\log|x+1| + \frac{1}{x+1}}$$

UN ALTRO CASO IN CUI IL PRINCIPIO NON BASTA:

$$\int \frac{\text{grado} \geq 0}{\text{pol. di grado} \geq 2 \text{ senza radici reali}}\,dx$$

Esempio $\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,dx$

$$\frac{\Delta}{4} = 1^2 - 2 < 0$$

Procedimento per questo caso:

costante

costante

Passo 1

$$\frac{P}{Q} = \frac{A\cdot(\text{Derivata di } Q)}{Q} + \frac{B}{Q}$$

$$\frac{x}{x^2+2x+2} = \frac{A\cdot(2x+2)}{x^2+\dots} + \frac{B}{\dots} =$$

$$= \frac{2Ax + 2A + B}{\dots}$$

$$\begin{cases} 2A+B=0 \\ 2A=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\frac{x}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\,\frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{x^2+2x+2}$$

$$\int \dots dx = \int (\quad) dx - \int \dots dx$$

$$\int \frac{Q'(x)}{Q(x)}\,dx = \lg|Q(x)|$$

quasi immediato

$$\frac{1}{2}\lg|x^2+2x+2| - \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$$

7 фев 2021 - p. 10

$$\int \frac{1}{x^4-1}\,dx = \int \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\,dx$$

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) +}{(x)(-.)(\ )}$$

$$\frac{+(Cx+D)(x^2-1)}{} =$$

$$= \frac{Ax^3 + Ax + Ax^2 + A +}{- \quad -}$$

$$\frac{+Bx^3 + Bx - Bx^2 - B +}{}$$

$$\frac{+Cx^3 - Cx + Dx^2 - D}{} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 +}{- \quad \cdot \quad \cdot}$$

$$\frac{+(A+B-C)x + A - B - D}{\cdot \quad \cdot \quad \cdot}$$

$$\begin{cases} A-B-D=1 \\ A+B-C=0 \\ A-B+D=0 \\ A+B+C=0 \end{cases} \quad \dots$$

7 giu 2021 – p. 11

$$\int \frac{1}{x^4-1}\,dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \right) dx$$

$$= A \lg|x-1| + B \lg|x+1| +$$

$$\int \underbrace{\frac{Cx+D}{x^2+1}}\,dx$$

$\Delta < 0$ radici complesse

$C=1$, $D=1$ (supponiamo, per avere dei numeri)

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$$

$$\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{A\,D(x^2+1) + B}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A\,2x + B}{x^2+1}$$

$$\begin{cases} B=1 \\ 2A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=1 \end{cases}$$

$$\int \left(\frac{1}{2} \frac{D(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \lg|x^2+1| + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \lg|x^2+1| + \operatorname{arctg} x \quad -$$

Torniamo al problema

$$\int \frac{P}{Q}\,dx$$

P grado 1

Q grado 2 senza radici reali cioè $\Delta < 0$

costanti

$$= \int \frac{A\,Q' + B}{Q}\,dx =$$

$$= A\int \frac{Q'}{Q}\,dx + B\int \frac{1}{Q}\,dx$$

$$= A \lg|Q| + B\left[\int \frac{1}{Q}\,dx\right]$$

SECONDO PASSO $\int \frac{1}{Q}\,dx$

COMPLETARE IL QUADRATO

$$ax^2+bx+c = \left((\text{prod}1)^2 + \text{costante}\right)\cdot \text{costante}$$

(costante positiva)

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\underbrace{x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{y} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

quadrato perfetto

$$= a\left(\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{primo quadrato}} + \underbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}}_{\text{costante}}\right)$$

$$x^2 + 2x + 2 =$$

$$= \underbrace{x^2 + 2x + 1}_{} + 1 =$$

$$= (x+1)^2 + 1$$

$$x^2 + 3x - 1 =$$

$$= x^2 + 2\frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 =$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

7 gen 2021 - p. 14

$$2x^2 + x + 1 =$$

$$= 2\left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2\left(x^2 + 2\left(\frac{1}{4}\right)x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right)$$

Il problema rimane così

$$\int \frac{1}{2^\circ \text{ grado}}\,dx = \int \frac{1}{(\quad)^2 + c}\,dx$$

(primo pol) → 70

$$= \int \frac{1}{(ax+b)^2 + c}\,dx$$

RIPORTARSI all'ARCOTANGENTE

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{c}\int \frac{1}{1+\left(\frac{ax+b}{\sqrt{c}}\right)^2}\,dx$$

CDV

$$y = \frac{ax+b}{\sqrt{c}}$$

$$\left| \begin{array}{l} dy = \frac{a}{\sqrt{c}}\,dx \qquad dx = \frac{\sqrt{c}}{a}\,dy \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{c} \int \frac{1}{1+y^2} \frac{\sqrt{c}}{a}\,dy =$$

$$= \frac{\sqrt{c}}{ac} \int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{\sqrt{c}}{ac} \operatorname{arctg} y =$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{c}} \operatorname{arctg} \frac{ax+b}{\sqrt{c}}$$

ESEMPIO

$$= \int \frac{1}{2x^2+x+1}\,dx =$$

$$\Delta = 1^2 - 8 < 0$$

$$= \int \frac{1}{2\left(\frac{7}{16} + \left(x+\frac{1}{4}\right)^2\right)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\frac{7}{16} + \left(x+\frac{1}{4}\right)^2}\,dx \qquad \int \frac{1}{1+y^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\frac{7}{16}\left(1 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right)^2\right)}\,dy$$

7 giu 2021 - p. 16

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{7} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{\sqrt{7}}\left(x + \frac{1}{4}\right)\right)^2} dx$$

CDV $\quad y = \frac{4}{\sqrt{7}}\left(x + \frac{1}{4}\right)$

$$dy = \frac{\sqrt{7}}{4} dx \qquad \frac{4}{\sqrt{7}} dx$$

$$= \frac{8}{7} \int \frac{1}{1 + y^2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} dy =$$

$$= \frac{2\sqrt{7}}{7} \operatorname{arctg} y = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\left(x + \frac{1}{4}\right)\right)$$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = (\ ) \cdot \operatorname{arctg}(\ )$$

ULTIMA SITUAZIONE RIMANENTE

$$\int \frac{1}{q^n} dx$$

con q di grado 2 e senza radici reali

$$\frac{1}{q^n} = \frac{1^\circ}{q} + \frac{1^\circ}{q^2} + \cdots + \frac{1^\circ}{q^n}$$

7 gen 2021 - p. 17

RIASSUMENTO

$$\int \frac{P}{Q}\,dx$$

1° domanda a

grado(num) $\geq$ grado(denom)

?

se sì, si fa la divisione

$$\frac{P}{Q} = \text{quoziente} + \frac{\text{resto}}{Q}$$

← grado < denom

grado fisso
grado dx

Scomporre in fattori il denominatore

$$\frac{P}{Q} = \frac{P}{Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_n}$$

~~grado 1 o 2~~
senza radici in comune

$$= \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} + \cdots + \frac{P_n}{Q_n}$$

4 tipi di denom.

1° caso denom. di primo grado

$$\int \frac{c}{ax+b}\,dx = \frac{c}{a}\lg|ax+b|$$

2° caso $(\text{primo grado})^n$

$$\frac{(\text{grado } n-1)}{(ax+b)^n} = \frac{c_1}{ax+b} + \frac{c_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{c_n}{(ax+b)^n}$$

3° caso denom. di secondo grado $\Delta < 0$

1° passo

$$\frac{\cancel{ax+b}^{\,1^\circ\text{ grado}}}{ax^2+bx+c} = \frac{A\,D(ax^2+bx+c)+B}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{1^\circ\text{ gr.}}{ax^2+bx+c}\,dx = A\lg|\text{denom}| + \int \frac{\cos\text{nto}}{\text{denom}}\,dx$$

1° passo completamento del quadrato

si scrive a arctg

Esempio

$$\int \frac{x^4 + x^3 + 3}{x^3 - 2x - 4}\, dx$$

Integrale di funzione razionale

grado 4 / grado 3

Divisione (già fatta)

$$= \int \left(x + 1 + \frac{2x^2 + 6x + 7}{x^3 - 2x - 4} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{2x^2 + 6x + 7}{x^3 - 2x - 4}\, dx$$

Scomposizione del denominatore

Tentativi

$x = 0$ NO

$x = 1$ NO

$x = -1$ NO

$x = 2$ $8 - 4 - 4 = 0$

Scomponiamo con Ruffini

7 фев 2021 г. 20

$x^3-2x-4 \qquad x=2$

	1	0	-2	-4
		2	4	4
2	1	2	2	0

$$x^3-2x-4=(x-2)(x^2+2x+2)$$

$$\frac{\Delta}{4}=1^2-2<0$$

$$\frac{2x^2+6x+7}{(x-2)(x^2+2x+2)}=$$

$$=\frac{A}{x-2}+\frac{B\cdot(x^2+2x)'+C}{x^2+2x+2}=$$

$$=\frac{Ax^2+2Ax+2A+B(2x+2)(x-2)+Cx-2C}{(\quad)(\quad)}$$

$$=\frac{Ax^2+2Ax+2A+2Bx^2-4Bx+2Bx-4B+Cx-2C}{(\quad)(\quad)}$$

$$= \frac{(A+2B)x^2 + (2A - 4B + 2B + C)x + 2A - 4B - 2C}{C)(\quad)}$$

$$\begin{cases} A+2B = 2 \\ 2A - 2B + C = 6 \\ 2A - 4B - 2C = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 2 - 2B \\ 4 - 4B - 2B + C = 6 \\ 4 - 4B - 4B - 2C = 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A = 2 - 2B \\ -6B + C = 2 \\ -8B - 2C = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 2 - 2B \\ -6B + C = 2 \\ -20B = 7 \end{cases}$$

$$-12B + 2C = 4$$

$$\iff \begin{cases} B = -\frac{7}{20} \\ A = 2 - 2B = 2 + \frac{2 \cdot 7}{20} = 2 + \frac{7}{10} = \\ \qquad = \frac{27}{10} \\ C = 2 + 6B = 2 + \frac{6 \cdot 7}{20} = \frac{20 - 21}{10} = \\ \qquad = -\frac{1}{10} \end{cases}$$

7 qiu 2021 - p. 22

$$\int \frac{2x^2+6x+7}{(\quad)(\quad)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B\,(x^2+2x+2)' + C}{x^2+2x+2} \right) dx$$

$$= A \lg|x-2| + B \lg|x^2+2x+2| +$$

$$+ C \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$= \ldots\ldots + C \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx =$$

$$= \ldots\ldots + C \operatorname{arctg}(x+1)$$

7 gen 2021 - p. 23

Esercitazioni

venerdì 9 - 11

lunedì 14:30 - 16:30