Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea in IBML

Esercizi di Analisi Matematica

Esercizi del 5 ottobre 2024

1. Nella rappresentazione decimale di un numero irrazionale non c'è mai nessun blocco di 5 cifre che si ripeta infinite volte. O sì? E per un numero razionale?

2. Chiamiamo x il numero decimale infinito ottenuto giustapponendo le rappresentazioni in base dieci dei numeri naturali in questo modo: $x = 0{,}12345678910111213141516\ldots$ Dimostrare che x non è periodico. Questo numero ha persino un nome: costante di Champernowne. Un numero collegato è la frazione 1/998001: calcolatene le cifre decimali.

3. Chiamiamo x il numero decimale infinito ottenuto facendo sequenze crescenti di zeri e di uni in questo modo: $x = 0{,}10110011100011110000\ldots$ Dimostrare che x non è periodico.

4. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $0 \le x < y$. Dimostrare che esiste un $r \in \mathbb{Q}$ tale che $x < r^2 < y$. In altre parole, i quadrati dei numeri razionali sono densi fra i numeri reali positivi.

5. Interpretare i puntini nelle seguenti espressioni:

$$\{1,3,5,7,9,\ldots,19\}, \qquad \{1,3,5,7,9,\ldots\}, \qquad \{\ldots,-3,-2,-1,0\},$$
$$\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{7}\right\}, \qquad \left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots\right\},$$
$$\{1^2,2^2,3^2,4^2,\ldots,n^2\}, \qquad \{2^1,2^2,2^3,2^4,\ldots\}, \qquad \{1^1,2^2,3^3,4^4,\ldots,n^n\},$$
$$\{1^1,2^2,3^3,4^4,\ldots,n^n,\ldots\}, \qquad \{n^2,(n+1)^2,(n+2)^2,\ldots,(2n)^2\}.$$

6. Trovare il quadrato successivo della sequenza seguente:

$$1 \qquad \begin{matrix}1&2\\2&3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{matrix} \qquad \begin{matrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{matrix}$$

e poi rappresentare il generico n-esimo quadrato.

7. Vero, falso, senza senso?

$$-\frac{1+\sqrt{2}}{2} = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \qquad \frac{\log(1+x)}{x} = \log\frac{(1+x)}{x},$$
$$\frac{3+x}{2-\sqrt{x}} \cdot \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} = \frac{3+x}{4-x} \cdot 2 + \sqrt{x},$$
$$\sqrt{2x+1}\sqrt{2x+1} = \sqrt{\sqrt{2x+1}},$$

$$\frac{\log(x)}{x} = \log\frac{(x)}{x}, \qquad \mathrm{sen}(1-x)(1+x) = \mathrm{sen}(1-x^2),$$

$$\frac{\cos(a-b)(a+b)}{a+b} = \cos(a-b), \qquad \cos 1 = 0,$$

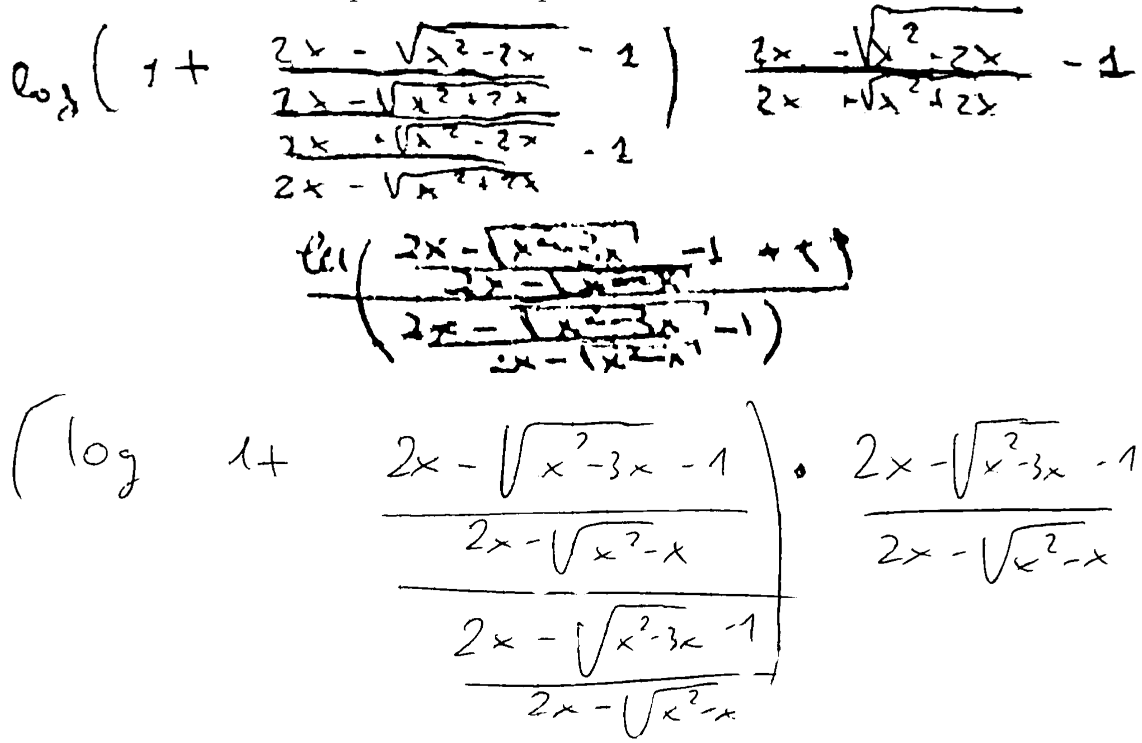
$$\log\left(\frac{1+x}{x}\right) \qquad \frac{-1+\sqrt{2}}{2} = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{1+\sqrt{2}}{2} = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \qquad -\frac{1+\sqrt{2}}{2} = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\frac{a}{b+1}}{a+b+3}\cdot\frac{b}{b+1} = \frac{ab}{a+b+3}, \qquad (a-b)(a+b) = a^2-b^2,$$

$$(a+b-c)(a-b+c) = a^2-b^2-c^2, \qquad (a+b-c)(a+b+c) = a^2+b^2-c^2$$

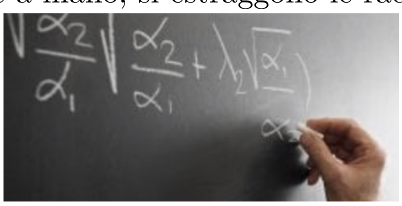
8. Discutere l'eventuale corrispondenza di queste formule scritte a mano



con quest'altra:

$$\frac{\log\left(1+\frac{2x-\sqrt{x^2-2x}}{2x-\sqrt{x^2+2x}}-1\right)}{\frac{2x-\sqrt{x^2-2x}}{2x-\sqrt{x^2+2x}}-1}\cdot\left(\frac{2x-\sqrt{x^2-2x}}{2x-\sqrt{x^2+2x}}-1\right).$$

9. Nelle formule seguenti scritte a mano, si estraggono le radici quadrate di cosa?



Esercizi del 14 ottobre 2024

10. Di ciascuna delle seguenti espressioni dire innanzitutto se hanno senso, poi se hanno o no un valore di verità (vero o falso), e, se sì, quale:

$$1+1=2,\quad 4-1=3,\quad \frac{4}{3}+\frac{1}{4}=\frac{5}{7},\quad 3-7,\quad 5-4=4-5,$$

$$3-(2-1)=(3-2)-1,\quad \frac{51}{\frac{13}{7}}=\frac{51}{7}\cdot 13,\quad \frac{17}{\frac{9}{7}}=\frac{\frac{17}{9}}{7},\quad \frac{\frac{11}{3}}{4},$$

$$\frac{1}{\frac{2}{3}+\frac{2}{5}}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2},\quad \frac{1/2}{3/5}=2\cdot\frac{3}{5},\quad \frac{3/2}{5/7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5},\quad \frac{3/2}{5/7}=\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{5},\quad 3-2\geq 1,$$

$$7\geq 4+3,\quad (-1)^5<(-1)^4,\quad -1<3-2<2,\quad 1+2+3+4,\quad \frac{7}{2>1},\quad 1>\pm\sqrt{3}$$

$$1+1=2\vee 2+2=3,\quad 1-1=2\wedge 2+2=3,\quad 3\geq\pi\vee 3<\pi,\quad 3\geq\pi\wedge 3<\pi,$$

$$1\in\mathbb{Q},\quad 1\subset\mathbb{Q},\quad \frac{2}{3}\in\{\mathbb{R}\},\quad \{-1\}\in\{\mathbb{Z}\},\quad \{1,-1/2\}\subset\mathbb{Q}.$$

11. Di ciascuna delle seguenti espressioni discutere innanzitutto se hanno senso, poi se hanno o no un valore di verità (vero o falso) per valori reali generici delle variabili, e, se sì, quale:

$$a+b=b+a,\qquad a-b=b-a,\qquad a-b=-b+a,$$

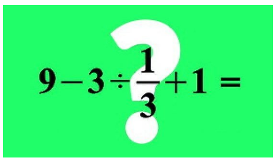
$$(a-2x)^2,\qquad \frac{1}{x-y}=\frac{-1}{y-x},\qquad (a+b+c)(a-b-c)=a^2-b^2-c^2$$

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},\qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d+e}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{d+e},\qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d+e}}=\frac{a}{b}\cdot c(d+e),$$

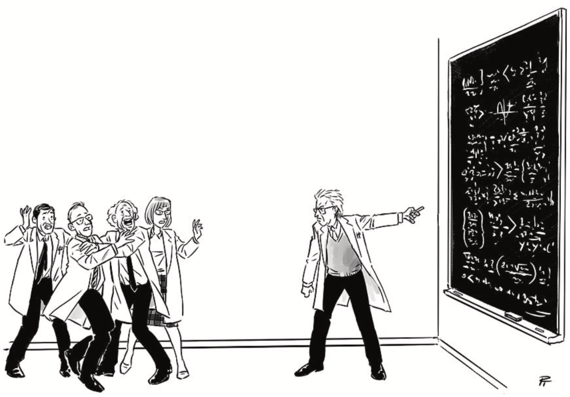
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d+e}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d+e}{c},\qquad \frac{1}{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}}=\frac{b}{a}-\frac{d}{c},\qquad \frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}=\frac{b}{a}+\frac{d}{c},$$

$$x^4-2x+1=x\left(x^{4-1}-2+\frac{1}{x}\right),\qquad x-2b=\frac{x+2b}{x^2-4b^2}.$$

12. Un quiz apparso in rete:

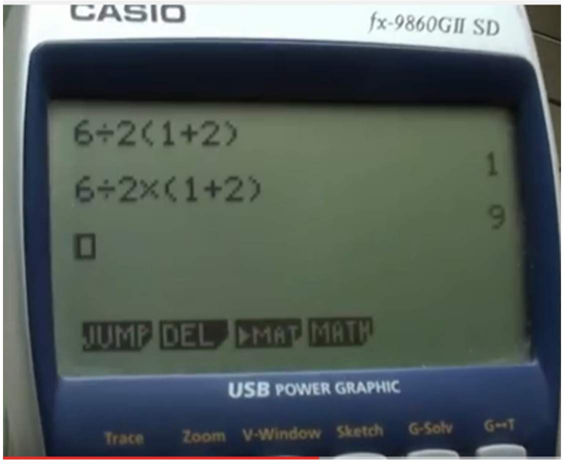


13. Discutere il senso della seguente vignetta di Pia Guerra dal *New Yorker*:



"Just give him whatever he wants! He's threatening to divide by zero!"

14. Discutere la gestione dell'ordine delle operazioni in questo calcolatore:



I connettivi logici che useremo sono $\neg$ la negazione (`not`), $\vee$ la disgiunzione (`or`), $\wedge$ la congiunzione (`and`), $\Rightarrow$ l'implicazione (`if`...`then`...), $\Leftarrow$ l'implicazione inversa, $\iff$ la doppia implicazione o equivalenza (`iff`). Si rammenta la tabella di verità:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftarrow q$	$p \iff q$
vero	vero	falso	vero	vero	vero	vero	vero
vero	falso	falso	falso	vero	falso	vero	falso
falso	vero	vero	falso	vero	vero	falso	falso
falso	falso	vero	falso	falso	vero	vero	vero

15. Vero, falso, malformato, senza senso?

$$a = b \Rightarrow -b = -a, \qquad x^2 + 2x - 3 = 2 \iff x^2 - 3 = 2 - 2x$$

$$x = 2 \vee x = 1 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(x-1) = 0,$$

$$\begin{cases} a + b = c \\ a - b = c \end{cases} \Rightarrow \quad a = c, \qquad \begin{cases} a + b = c \\ a - b = c \end{cases} \Leftarrow \quad a = c,$$

$$\begin{cases} a + b = c \\ a - b = c \end{cases} \iff \quad a = c$$

$$\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \iff \begin{cases} a = b \\ a + c = b + d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \iff \begin{cases} a < b \\ a + c < b + d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \Rightarrow \quad a - c = b - d$$

$$\begin{cases} a > b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow \quad a - c > b - d$$

16. Ai tempi delle trasvolate oceaniche, attorno al 1930, fu coniato un motto di cui ho trovato in rete tre versioni. Una è "Chi vola vale, chi non vale non vola, chi vale e non vola è un vile". Un'altra è "Chi vola vale, chi non vola non vale, chi vale e non vola è un vile". La terza è "Chi vale vola. Chi vola vale. Chi vale e non vola è un vile!". Farne l'analisi logica.

17. Discutere la validità delle implicazioni di questa catena:

$$a = b \quad \Rightarrow \quad a^2 = ab \quad \Rightarrow \quad a^2 - b^2 = ab - b^2 \quad \Rightarrow \quad (a+b)(a-b) = b(a-b) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (a+b) = b \quad \Rightarrow \quad a + a = a \quad \Rightarrow \quad 2a = 1a \quad \Rightarrow \quad 2 = 1.$$

18. Nelle espressioni seguenti, si possono cancellare delle coppie di parentesi in modo che rimanga inalterato il valore?

$$-(a+b), \quad 2(a-x), \quad \frac{(ab)+1}{a(b+1)}, \quad \sqrt{(1+\sqrt{2})},$$
$$\frac{x-2}{x^2+3}(x^2-3), \quad (\log x)y, \quad (\cos x^2)2x, \quad (\tan x)-(\tan y), \quad \operatorname{sen} 2(x+\pi),$$
$$2^{(x-y)}, \quad 3^{(x^2)}, \quad (a+2)^{a-2}, \quad 1/(2x), \quad x/(x-2), \quad 2^{(n-1)/(n+1)}.$$

19. Al posto dei punti interrogativi inserire il più appropriato fra $=, \Rightarrow, \Leftarrow, \iff$, o niente:

$$\begin{aligned}
x=x^2-1 &\quad ? \quad x+1=x^2,\\
x^2-1 &\quad ? \quad (x-1)(x+1),\\
2x-1=\sqrt{2} &\quad ? \quad (2x-1)^2=2,\\
x>\sqrt{2} &\quad ? \quad x+1>\sqrt{2},\\
2x-1<\sqrt{2} &\quad ? \quad (2x-1)^2<2,\\
x<3\wedge a<1 &\quad ? \quad x+a<4,\\
\begin{cases} x<1 \\ 1>y \end{cases} &\quad ? \quad x>y,\\
x>2\vee x<4 &\quad ? \quad x>4,\\
x>x &\quad ? \quad (-1)^2=-1,\\
2<x>4 &\quad ? \quad 2<x<4,\\
2<x>4 &\quad ? \quad x>4,\\
2>x<4 &\quad ? \quad x<2,\\
2>x<4 &\quad ? \quad x<4,\\
(x^3-2x+5)(3x^2-1)=0 &\quad ? \quad (x^3-2x+5)=0\vee(3x^2-1)=0\\
n^2<0 &\quad ? \quad n^2-1<0\\
xy\le ab &\quad ? \quad x\le a\wedge y\le b,\\
xy\le ab &\quad ? \quad x\le a\vee y\le b,\\
0\le a=b &\quad ? \quad a^2=b^2,\\
0\le a<b &\quad ? \quad a^2<b^2,\\
0\le a\ge b &\quad ? \quad a^2\ge b^2,\\
n\in\mathbb{Z} &\quad ? \quad n<\frac{1}{3}\vee n\ge 1,\\
n\in\mathbb{Z} &\quad ? \quad n^2\in\mathbb{Z}.\\
x^2+y^2\le 4 &\quad ? \quad x^2+y^2\le 1x^2+y^2<c \quad ? \qquad y^2<c,\\
x^2+y^2<0 &\quad ? \quad x^2+y^2<-1.
\end{aligned}$$

20. Al posto dei punti interrogativi inserire il più appropriato fra $\Rightarrow, \Leftarrow, \iff$, o niente:

$$\begin{aligned}
x\ne y &\quad ? \quad y\ne x,\\
x\ne y\ne z &\quad ? \quad x\ne z,
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rcl}
x \neq y \ \wedge \ z \neq w & ? & x+z \neq y+w \\
x \neq y \ \wedge \ z = w & ? & x+z \neq y+w \\
x \neq 0 & ? & x > 0 \\
x \neq 0 & ? & x < 0 \\
x \neq 0 & ? & x > 0 \ \vee \ x < 0 \\
x \neq 0 \ \vee \ x \neq 1 & ? & \text{vero} \\
x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 1 & ? & \text{falso} \\
x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 1 & ? & 0 < x < 1 \\
x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 1 & ? & x < 0 \ \vee \ 0 < x < 1 \ \vee \ x > 1
\end{array}
$$

21. Cerchiamo regole di trasformazione per le disuguaglianze del tipo $x \neq y$. Si può aggiungere la stessa quantità ad ambo i membri? Si può moltiplicare per la stessa quantità ambo i membri? Si possono sommare membro a membro? In altre parole, da $x \neq y \wedge z \neq t$ segue $x + z \neq y + t$? Si possono moltiplicare membro a membro?

22. Devo esprimere in formule l'idea che i quattro numeri x_1, x_2, x_3, x_4 sono distinti. Va bene se scrivo $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_4$?

Esercizi del 25 ottobre 2024

23. Vero, falso, malformato?

$$
\begin{gathered}
x = y \Rightarrow x^2 = y^2; \qquad x = y \Rightarrow x^3 = y^3; \\
x \neq y \Rightarrow x^2 \neq y^2; \qquad x \neq y \Rightarrow x^3 \neq y^3; \\
\forall x \in \{0,1,2,3\} \quad x^2 > 1; \qquad \exists x \in \{0,1,2,3\} \text{ tale che } x^2 > 1; \\
\exists! x \in \{0,1,2,3\} \text{ tale che } x^2 > 1; \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + 2n - 1; \\
\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \Rightarrow x > 2; \qquad \exists x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x > 1 \Rightarrow x > 2; \\
\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \Rightarrow x \geq 0; \qquad (\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 0).
\end{gathered}
$$

24. Delle seguenti espressioni dire quali hanno senso compiuto, e in tal caso se sono vere o false o altro:

$$
\begin{gathered}
\forall x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x < 0, \\
\exists x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x^2 < 0, \\
\forall x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 \geq 0, \\
\forall x < 1, \\
\{\forall x < 1\}, \\
\{\forall x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, \\
\{x^2 - 1 \mid \forall x \in \mathbb{R}\}, \\
\{\exists x \mid x^2\}, \\
\{\nexists x \in \mathbb{R}\}, \\
\{x \in \mathbb{R} \mid [0,1] \cup [3,5]\}, \\
\forall x > 0 \vee \forall n \in \mathbb{N}, \\
\forall x \in \mathbb{R} \wedge \forall n \in \mathbb{Z}.
\end{gathered}
$$

25. Vogliamo formalizzare l'affermazione "tutti gli uomini hanno gli stessi diritti". Sia U l'insieme di tutti gli uomini. Quale delle formulazioni seguenti è corretta?

$$\begin{gathered}\forall U \quad U \text{ ha gli stessi diritti},\\ \forall x \in U \quad x \text{ ha gli stessi diritti},\\ \forall x \in U \quad x \text{ ha gli stessi diritti di } U,\\ \forall x, y \in U \quad x \text{ ha gli stessi diritti di } y.\end{gathered}$$

26. Ho trovato su un libro la frase "c'è qualcuno che vince la lotteria ogni settimana". Come si potrebbe formalizzare con predicati e quantificatori?

27. Vogliamo formalizzare l'affermazione "gli esseri umani sono tutti diversi". Sia U l'insieme di tutti gli esseri umani. Qualcuna delle formulazioni seguenti è corretta?

$$\begin{gathered}\forall x \in U \quad x \text{ è diverso},\\ \forall x \in U \quad x \text{ è diverso da } U,\\ \forall x, y \in U \quad x \neq y.\end{gathered}$$

28. Dare una rappresentazione grafica degli insiemi di numeri reali x che verificano le condizioni seguenti:

$$\begin{gathered}x < 1 \vee x > 3, \quad x < 1 \wedge x > 3, \quad \neg(x < 0), \quad x < 2 \wedge x = -1,\\ x < 1 \Rightarrow 2x < 2, \quad x < 1 \iff x < 0, \quad x > 2 \Rightarrow x^2 > 4, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.\end{gathered}$$

29. Sia A l'insieme che comprende i numeri reali > 2 e quelli < -1, e nessun altro. Dire quali dei seguenti insiemi coincidono con A:

$$\begin{gathered}\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \wedge x < -1\}, \qquad \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \vee x < -1\},\\ \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2)(x+1) > 0\}, \qquad \{(x-2)(x+1) \mid x \in \mathbb{R}, (x-2)(x+1) > 0\},\\ ]-\infty, -1[\cup]2, +\infty], \qquad]-\infty, -1[\cap]2, +\infty]\end{gathered}$$

30. Usando le regole di base delle disuguaglianze, dimostrare che se $a, b, c > 0$ allora $a/(b+c) < a/b < (a+c)/b$. Cioè se si parte da una frazione positiva, questa aumenta se si aumenta il numeratore, ma cala se si aumenta il denominatore.

31. Dimostrare che $x/(1+x^2) \leq x$ quando $x \geq 0$, usando i principi base dei numeri reali.

32. La sottrazione è commutativa? è associativa? La divisione è commutativa? è associativa? L'elevamento a potenza è commutativo? è associativo? Come vanno interpretate espressioni come $1-2-3$, $1/2/3$, 2^{3^4}, a/bc?

33. Rappresentare graficamente gli insiemi seguenti:

$$\begin{gathered}\{0, \sqrt{2}, \pi\}, \qquad \big\{x^2 : x \in \{-1, 2\}\big\}, \qquad \big\{x \in \mathbb{R} : x^2 \in \{-1, 2\}\big\},\\ \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\}, \qquad \{(-1)^n : n \in \mathbb{Z}\}, \qquad \{n \in \mathbb{Z} : (-1)^n \in \mathbb{N}\},\\ \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 7^2\}, \qquad \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots, 7^2\}, \qquad \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\},\\ \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2\}, \qquad \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots\}.\end{gathered}$$

34. Gli insiemi seguenti coincidono?

$$\left\{\frac{n}{n^2+1}\;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\},\qquad \left\{n\in\mathbb{N}\;\middle|\;\frac{n}{n^2+1}\geq 0\right\},\qquad \left\{n\in\mathbb{N}\;\middle|\;\frac{n}{n^2+1}\in\mathbb{N}\right\}$$

35. Vero, falso o senza senso? Rappresentare graficamente i vari insiemi.

$$\frac{2}{3} \text{ è un elemento di } \left\{\frac{n}{n+1} : n\in\mathbb{N}\right\},$$
$$\frac{2}{3}\in\left\{n\in\mathbb{N} : \frac{n}{n+1}\in\mathbb{N}\right\},$$
$$[0,1]\subseteq\{x\in\mathbb{R} : x^2+2x-4<0\},$$
$$[0,1]\subseteq\{x^2+2x-4 : x\in\mathbb{R}, x<0\},$$
$$[0,1]\Rightarrow[-1,2]$$
$$\frac{n^2-1}{n^2+1}\subseteq\left\{\frac{n^2-1}{n^2+1}\;\middle|\; n\in\mathbb{Z}\right\},$$
$$x-1<\{x\in\mathbb{R}\mid (x-1)(x+1)>0\}.$$

36. Trovare massimo e minimo dei seguenti insiemi finiti di numeri reali:

$$\left\{\frac{2}{17},-\frac{14}{19},\frac{1}{13},\frac{16}{9},-\frac{13}{8},-\frac{5}{4},\frac{1}{4}\right\},\qquad \left\{\frac{1}{4},\sqrt{2}-1,\frac{1}{\sqrt{2}+1},-\pi\right\},$$
$$\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1},\pi,\sqrt[3]{2}-1,\sqrt{2}\right\}.$$

37. Dire se le seguenti affermazioni sono vere, false o senza senso:

$\max\{-1,0,2\}=\{2\}$, il minimo è minore del minorante,

il maggiorante è maggiore del massimo

il maggiorante è maggiore o uguale del massimo,

il minimo è maggiore o uguale a ogni minorante,

0 è minorante di $\left\{1,4,\frac{5}{4}\right\}$,

1 è maggiorante di $\{n\in\mathbb{Z} : 3n-4<0\}$,

2 è maggiorante di $\left\{\frac{n+5}{2n+8} : n\in\mathbb{N}\right\}$,

n^2+1 è maggiorante di $\{n^2 : n\in\mathbb{Z}\}$,

un maggiorante è sempre maggiore di un minorante,

$\{-1,-2,0\}$ è minorante di 0,

$\max A\cup B=\max\{\max A,\max B\}$,

$\max A\cap B=\min\{\max A,\max B\}$.

38. Dimostrare che se $\varnothing\neq A\subseteq B\subseteq\mathbb{R}$ allora $-\infty\leq\inf B\leq\inf A\leq\sup A\leq\sup B\leq+\infty$.

39. Dimostrare che $\sup A\cup B=\max\{\sup A,\sup B\}$. è vero che $\sup A\cap B=\min\{\sup A, \sup B\}$?

40. Dati $A, B \subset \mathbb{R}$ non vuoti e limitati superiormente, poniamo $C := \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$. Dimostrare che $\sup C = \sup A + \sup B$.

41. (Avanzato) Trovare almeno un maggiorante e almeno un minorante dell'insieme $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid 4x^3 + x + \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0\}$.

42. Dimostrare che se $\bar{x}$ è un maggiorante dell'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 0\}$ e se $f(x) \leq g(x)$ per ogni x, allora $\bar{x}$ è maggiorante anche di $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) < 0\}$.

43. Tradurre nelle notazioni tipo $\max\{\ldots\}$ o $\inf_{x\in\ldots}\ldots$ le espressioni seguenti e trovarne il valore:

il massimo dell'insieme degli x tali che $x^2 - 3 \leq 0$;
l'estremo inferiore degli $x^2 - 3$ al variare di $x \in \mathbb{R}$;
il minimo dei numeri naturali il cui quadrato è minore del fattoriale;
l'estremo superiore degli $x \in \mathbb{R}$ per i quali esiste un $y \in \mathbb{R}$ tale che $x^2 + y^2 < 1$..

44. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\max\{x, 2\} < 2x\,, \quad \max\{x, 2x\} > 1 - x\,, \quad \min\{x-1, 1-x\} \geq 0\,,$$
$$\min\{x, -2x\} < \max\{1+2x, -1\}\,, \quad \min\big\{x, 3|x-1|\big\} < \frac{x}{2}\,,$$
$$\big(|x| + |x-1| - 1\big)(x^2 - 2x) \geq 0\,.$$

45. Vero o falso? (Per ogni valore reale delle variabili che renda sensata l'espressione).

$$|-x+1| = x+1\,, \quad |-x+1| = |x+1|\,, \quad |-x+1| = |x-1|,$$
$$2\max\{x, y\} = \max\{2x, y\}\,, \quad 3\max\{x, y\} = \max\{3x, 3y\}\,,$$
$$\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \quad \min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2},$$
$$\min\{x+y, x-y\} = x - y\,, \quad \max\{x/y, y/x\} = (x+y)/(x-y)\,,$$
$$\min\{x, y, z\} = -\max\big\{x, \max\{y, z\}\big\}\,, \quad \max\{x, -y\} = -\min\{-x, y\},$$
$$\min\{-x, -y\} = -\max\{x, y\}, \quad \max\big\{x + z^2, y + z^2\big\} = z^2 + \max\{x, y\}\,,$$
$$\max\left\{\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}\right\} = \frac{1}{\min\{x^2, y^2\}}, \quad x < \min\{x, y\}, \quad x \geq \max\{x-1, x+1\},$$
$$\max\{x, 2y\} = \max\{2x, y\}, \quad \min\{x, 2y\} = 2\min\{x, y\},$$
$$\max\{x, y\} + \max\{z, t\} = \max\{x+z, y+t\}\,.,$$
$$\max\{1/x, 1/y\} = 1/\min\{x, y\}\,, \quad \max\{x, 1/x\} \geq 1\,.$$

46. Disegnare il grafico delle funzioni seguenti:

$$f(x) := \max\{x-1, 2-x\}, \quad f(x) := \min\{2x, 3x+1\},$$
$$f(x) := \max\{1-x, 3+x, 2\}, \quad f(x) := \min\{x^2-1, 2-2x^2\},$$
$$f(x) := x + \max\big\{x, \min\{2x, 3x\}\big\}, \quad f(x) := |x^2 - 3x + 1|,$$
$$f(x) := \max\{2x^2-1, 5-x\}, \quad f(x) := \min\{2x^2-1, 5-x\}$$

47. Risolvere le disequazioni razionali seguenti:

$$\frac{1}{3+4x} < -1\,, \qquad \frac{6+3x}{6x+1} - \frac{3}{x+5} > 0\,, \qquad \frac{x}{3x+4} \geq \frac{5+6x}{3x+4}\,,$$
$$\frac{x-1}{2-x} + \frac{6}{x} \leq 0\,, \qquad \frac{x^2+2x-3}{x^2+1} < 0\,, \qquad \frac{2-3x}{1+x} \leq \frac{1+x}{5-x}\,.$$

48. Risolvere le disequazioni con valori assoluti seguenti:

$$|5+3x| < 1\,, \qquad |2-x| \geq 4\,, \qquad |1+4x| - x < 0\,, \qquad |x-3| \geq x+1\,,$$
$$-\frac{1}{2}|-2x-6| < 0\,, \qquad \frac{|5+3x|}{3x+6} < 0\,, \qquad \frac{|6x+1|}{4x+1} > 0\,,$$
$$|-1-3x| - 4\cdot|x| \leq 2x\,, \qquad 5|x| > -1-2x\,, \qquad \frac{|5x+3|}{2x+5} > \frac{5x+2}{|1+2x|}\,.$$

Esercizi del 10 novembre 2024

49. Da $a^2 < b^2$ segue che $a < b$? Segue che $|a| < |b|$?

50. Per significare che una funzione $f(x)$ non è né pari né dispari alcuni scrivono $f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$. Che ne dite?

51. Vero o falso:

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ si ha che } n^2 - 5n + 6 \geq 0\,,$$
$$\forall n \in \mathbb{Z} \text{ si ha che } \frac{1-3n}{4n+1} < 1\,,$$
$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } \frac{3n^2-2}{2n^2+1} \geq 1\,.$$

52. Studiare il segno delle espressioni seguenti, cioè dire per quali x sono positive, negative, nulle, non esistenti:

$$(1-x)(2x^2+x-3)\,, \qquad \frac{1}{3} + \frac{3}{8x+16} - \frac{11}{24(3x-2)}\,, \qquad \frac{4x^2+7x-2}{(5-x)^3}\,,$$
$$1-|x-3|\,, \qquad 1+|x+3|-3|x|\,, \qquad \frac{|3x+1|}{x+4} + \frac{4x+4}{|6+x|}\,, \qquad x^4+x^2-1\,.$$

Ripasso su esponenziali e logaritmi
Per le disuguaglianze, usare il fatto che quando $a > 1$ valgono le equivalenze $x < y \iff a^x < a^y \iff \log_a x < \log_a y$.
A volte viene comoda la notazione alternativa per gli esponenziali: $\exp_a x = a^x$, che si coordina bene con la notazione usuale per i logaritmi.

53. Vero o falso? O senza senso?

$$\big((n^m)^m\big)^m = n^{3m}, \quad m^{n^3} = (m^3)^n, \quad (a^n)^m = (a^m)^n, \quad (n^n)^n = n^{(n^n)}, \quad 2^{n^3} = 2^{3n},$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad 2^{n^3} = (2^3)^n, \quad \frac{\exp(n^2 \log 3)}{\exp(n^3 \log 2)} = \exp\Big(\frac{n^2 \log 3}{n^3 \log 2}\Big)$$

$$\underbrace{2^n \cdot 2^n \cdots 2^n}_{n \text{ fattori}} = 2^{n^2}, \qquad e^{\log^2 x} = x^2,$$

$$2^{\log_2 3} = 3, \quad 3^{\log_2 3} = 2, \quad \log_2 4 = 2, \quad \log_3(-3)^2 = -3, \quad 3^{\sqrt{2}} < \sqrt{27}, \quad |2^x| = 2^{|x|}$$

$$\sqrt{2^x} = 2^{x/2}, \quad \sqrt{e^{x^2}} = e^x, \quad a^{x^2} - a^{-x^2} = a^{x^2}\Big(1 - \frac{1}{a^{x^4}}\Big), \quad (\log x)\log\frac{1}{x} = \log^2\frac{x}{x},$$

$$\log 2x^3 = 3\log 2x, \quad \log^2 x = 2\log x, \quad \sqrt{2^x} = \big(\sqrt{2}\big)^x, \quad \log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3},$$

$$5^{\log_2 3} < 5^{\log_2 5}, \quad 6^{\log_2 a} = a3^{\log_2 a}, \quad 3^{1/x} = \frac{1}{3^x}, \quad 2^{-x} = \frac{2}{x}, \quad 2^n 3^m = 6^{n+m},$$

$$\log_2 \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}\log_2 6, \quad \log_a\big(\sqrt{2}+\sqrt{3}\big) = \frac{1}{2}\log_a 2 + \log_a\big(1 + \sqrt{3/2}\big),$$

$$\log_a(x^2) = (\log_a x)^2, \quad \log_a b^a = b^{\log_a b}, \quad \log_a(\log_b x) = \log_{ab} x,$$

$$\log_{ab} x = \frac{\log_a x}{1 + \log_a b}, \quad \sqrt{\log x} = (\log x)^{1/2} = \frac{1}{2}\log x, \quad \log_{-1}(-1)^n = n,$$

$$\log_0 0 = 1, \quad \log_1 1^2 = 2, \quad \log_{-a} x = \frac{1}{\log_a x}, \quad \log_{\sqrt{a}}(x) = 2\log_a x,$$

$$\log_{(a^x)}(x) = \frac{\log_a x}{x}, \quad \log_a(x^2) = 2\log_a x, \quad \log_a(\log_a x) = (\log_a x)^2,$$

$$\frac{\log x}{\log(1+x)} = \log x - \log(1+x), \quad (1+x)^{1/x^2} = \big((1+x)^{1/x}\big)^2, \quad (-a)^x = -a^x,$$

$$\log(a+b)\log(a-b) = \log(a^2 - b^2), \quad (\log(e+x))^{1/x} = \frac{1}{x}\log(e+x),$$

$$(\log x)^n = n\log x, \quad \log_a(x^2) = 2\log_a|x|, \quad \log_a x = y \iff x = \exp_a y,$$

$$\log_a x < y \iff x < \exp_a y, \quad \exp_{(a^x)} y = \exp_{(a^y)} x = \exp_a(xy),$$

$$\exp_a(\exp_b x) = \exp_{ab} x, \quad (\exp_a x)(\exp_b x) = \exp_{ab} x, \quad 4^x x^2 = (4x)^{x+2},$$

$$\exp_a(\exp_b x) = \exp_b(\exp_a x), \quad a^{b^c} = a^{c^b}, \quad \sqrt{n^n} = n^{\sqrt{n}}, \quad \sqrt{n^n} = (\sqrt{n})^n,$$

$$\sqrt{\log^2 2 + \log 4 + 1} = 1 + \log 2.$$

54. Mostrare che $\log_a x$ ha lo stesso segno di $x-1$, quando $x > 0$, $a > 1$. Analogamente $a^x - 1$ ha lo stesso segno di x, $\sqrt{x} - 2$ ha lo stesso segno di...

55. Risolvere le disequazioni seguenti:

$$2^x \geq 4^{1-2x}, \quad \sqrt{3^{x+1}} < 9^{x-1}, \quad \log_2 x \leq 3, \quad \sqrt{\log_2 x} < 4,$$

$$\log_2 \sqrt{x} > \sqrt{2}, \quad \log_3(1-x) < \log_3(1+x)\,.$$

56. Studiare il segno delle espressioni seguenti:

$$2^{x+1}(x^2 - 2x), \quad 3^x - 9^x, \quad (x-2)\log_3(x+1), \quad \frac{\log_2 x - \log_2 x^2}{x-3}.$$

57. Trovare l'insieme di definizione delle formule seguenti (quando per i logaritmi non è indicata la base, fate conto che qui non abbia importanza):

$$2^{1/x},\quad \log|x|,\quad \log\bigl(x+\sqrt{x-1}\bigr),\quad \log x-\log(1-x),\quad \log\frac{x}{1-x},$$
$$\frac{1}{2-3^x},\quad \log(2-3^x),\quad \frac{1}{\log(2-3^x)},$$
$$\log\bigl((\log_2 x)^2-1\bigr),\quad \log\bigl(1-2x+\sqrt{1+x}\bigr),\quad \sqrt{x+2-\sqrt{x+1}},$$
$$\log\bigl(\min\{x-1,2-x\}\bigr),\quad \frac{1}{1-\sqrt[3]{x^2-1}},\quad \frac{1}{\min\{-3,-n-1\}}.$$

58. Dire se questo conto è giusto: $2^{n^2}=(2^n)^2=2^{n\cdot 2}=2^{2\cdot n}=(2^2)^n=4^n$.

59. (Avanzato) Dimostrare che $\log_2 3$ è irrazionale.

Esercizi del 14 novembre 2024

60. Vero, falso o senza senso?

$$\operatorname{sen}^3 x+\cos^3 x=1,\quad \operatorname{sen}^2 x\ge 0,\quad \operatorname{sen}(x^2)\ge 0,$$
$$\cos(x<y),\quad \cos\alpha=\frac{1}{x}\iff \alpha=\frac{1}{\cos x},\quad \tan x+\tan y=\tan(x+y),$$
$$\cos x\tan x=\operatorname{sen} x,\quad \operatorname{sen}^{-n} x=\frac{1}{\operatorname{sen}^n x},\arctan^{-1} x=\tan x,$$
$$\operatorname{arcsen} x=\operatorname{arcsen} y\iff \operatorname{sen} x=\operatorname{sen} y,\quad \operatorname{arcsen} x=\operatorname{arcsen} y\Rightarrow \operatorname{sen} x=\operatorname{sen} y,$$
$$\operatorname{arcsen} x=\operatorname{arcsen} y\iff x=y,$$
$$\operatorname{arc}(\operatorname{sen} x)=y\iff \operatorname{sen} x=(\operatorname{arc})^{-1}y,\qquad \operatorname{arcsen} x=\cos y\iff \operatorname{sen} x=\arccos y$$
$$\operatorname{arcsen} x=\arccos y\iff \operatorname{sen} x=\cos y,$$
$$\arctan x=\frac{\operatorname{arcsen} x}{\arccos x},\quad \arctan\frac{x}{y}=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos y},$$
$$\operatorname{arcsen}^2 x+\arccos^2 x=1,\quad \arctan^{-1} x=\frac{1}{\tan x},$$
$$|\operatorname{sen} x|=\operatorname{sen}|x|,\quad |\cos x|=\cos|x|,\quad \cos x=\cos|x|,\quad \bigl|\operatorname{sen}|x|\bigr|=|\operatorname{sen} x|.$$

61. Cosa ne pensate di questo calcolo:

$$\operatorname{arcsen}(0)=\operatorname{arc}\bigl(\operatorname{sen}(0)\bigr)=\operatorname{arc}(0)=\operatorname{arc}\bigl(\cos(\pi/2)\bigr)=\arccos(\pi/2)=\cos^{-1}(\pi/2)=$$
$$=\frac{1}{\cos(\pi/2)}=\frac{1}{0}=\infty.$$

Esercizi sui numeri complessi. La parte reale e immaginaria di $z\in\mathbb{C}$ si scrivono con $\Re z,\Im z$.

62. Disegnare sul piano complesso i numeri $3,-2,-2i,1-i,1+i\sqrt{3},1-\sqrt{2}+i$.

63. Eseguire i calcoli seguenti, individuando il risultato sul piano complesso:

$$(1-i)+(\sqrt{2}+2i),\quad (1-2i)+(\sqrt{2}-i),\quad (1+2i)\cdot(1-2i),\quad (1-2i)^3$$

$$i+\overline{3i},\quad i+\frac{1+2i}{1-2i},\qquad \overline{i-4},\qquad \overline{i-\sqrt{2}i},\quad |3-i|,\quad \frac{|i-1|}{1-i},\quad \left|(1-i/2)^3\right|,$$
$$i^{13},\quad i^{41},\quad (-i)^{-5}, i^{197},\quad i^{1893}+i^{1895},\quad \overline{i^{-1}}$$
$$\Re\Big(1+\frac{1}{i}\Big),\quad \Im(2-i/2),\quad \Re\big(1/(i-3)\big),\quad \overline{5-i+i^3},\quad \overline{\Big(\frac{1+i}{i^2-3i}\Big)},\quad |5-i+i^4|,$$
$$\arg(i^2),\quad \arg\Big(\cos\frac{\pi}{7}-i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{7}\Big),\quad \arg\Big(\frac{i}{i^2\sqrt{3}-i}\Big),$$
$$\arg\Big(\big(1-\sqrt{2}\big)\big(\cos(\pi/11)+i\,\mathrm{sen}(\pi/11)\big)\Big).$$

64. Il numero $-1+2i$ è soluzione dell'equazione $z^3+z^2+3z-5=0$? E che dire di $-1-2i$?

65. Scrivere in forma cartesiana il numero complesso di modulo 2 e argomento $5\pi/6$. Similmente col modulo $\sqrt{2}$ e argomento $75°$.

66. Posto $z=\rho(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ con $\rho>0,\theta\in\mathbb{R}$, scrivere in forma polare $\overline{z}$, $1/z$, $-z$, iz.

67. Poniamo $z=1+i$. Dire con quali dei seguenti numeri coincide z^3:

$$\text{il doppio di } i-1,\quad 2\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\Big),\quad 2(\cos 90°+i\,\mathrm{sen}\,90°).$$

68. Mostrare che iz si ottiene ruotando z di $90°$ in senso antiorario. Analogamente, come si fa a ruotare di $\pi/4$ radianti in senso orario?

69. Posti $z=\rho(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ e $w=r(\cos t+i\,\mathrm{sen}\,t)$, con $\rho,r>0,\theta,t\in\mathbb{R}$, dire con quali dei numeri seguenti coincide l'argomento di $z^2/(2w)$, a meno di angoli giri:

$$2\theta-t,\quad \theta^2/(2t),\quad \theta-t.$$

70. Vero o falso? Qui le variabili z,w sono complesse, n è intera.

$$\Im z=0 \iff z=|z|=\overline{z},\quad \Im z=0\iff z=\overline{z},\quad \Im z=0\iff z^2=|z^2|,$$
$$\Re z\le|z|,\quad \Re z=|z|\iff \Im z=0,\quad -|z|\le\Im z\le|z|,$$
$$|z|\le|\Re z|+|\Im z|,\quad \Re z\Im z>0\iff \Im(z^2)>0,\quad x\in\mathbb{R}\Rightarrow \Re(xz)=x\Re z$$
$$\Im(z+w)=\Im z+\Im w,\quad \Im\Big(z+\frac{1}{z}\Big)=0\iff \big(|z|=1\vee\Im z=0\big),$$
$$\overline{1/z}=\frac{1}{\overline{z}},\quad \Re(\Im z)=z,\quad \Im(\Re z)=|z|,\quad \Re z=\cos\arg z,\quad \Im z=|z|\sin\arg z,$$
$$\overline{z^n}=(\overline{z})^n,\quad |z|=1\iff \overline{z}^n=z^{-n}$$

Esercizi del 18 novembre 2024

71. Poniamo $z=1/2+i\sqrt{3}/2$. Calcolare $z^{39}-z^{36}$.

72. Trovare le soluzioni complesse delle equazioni seguenti, con interpretazione geometrica:

$$z^4 = -1, \quad z^3 = 1 - i, \quad z^3 = -1 + i,$$
$$z^7 = 1, \quad z^5 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

73. Mostrare che se n è dispari allora $\sqrt[n]{-z} = -\sqrt[n]{z}$, a patto di interpretare le radici n-esime complesse non come numeri singoli ma come insiemi di numeri. Se n è pari ma non divisibile per 4, allora $\sqrt[n]{-z} = i\sqrt[n]{z}$.

74. Poniamo $z = 2/\sqrt{2} - 2i/\sqrt{2}$. Trovare la forma polare di z, z^{10}, z^{-2}.

75. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni in variabile complessa:

$$\begin{cases} z\overline{w} = i \\ |z|^2 w + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z + w = 1 - i \\ |w|^2 + \overline{z} = 1 - i \end{cases} \quad \begin{cases} z^2 - \overline{z}^2 = 4i \\ (1+i)z = (1-i)\overline{z}. \end{cases}$$

76. Per polinomi a coefficienti reali, sappiamo che il coniugato di uno zero è anch'esso uno zero. Inoltre $(z - z_0)(z - \overline{z_0})$ si può scrivere come un polinomio di secondo grado in z a coefficienti reali. Dimostrare di conseguenza che ogni polinomio a coefficienti reali si scompone sempre in un prodotto di fattori di primo e di secondo grado a coefficienti reali.

77. L'equazione $z^3 + z = 0$ ha ovviamente le soluzioni $0, \pm i$. La formula di Cardano per l'equazione $z^3 + pz + q = 0$ è (senza dimostrazione)

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Ritrovare le soluzioni note di $z^3 + z = 0$ attraverso la formula di Cardano.

78. Partiamo dall'uguaglianza vera $e^{2\pi i} = 1 = e^0 = e^{4\pi i}$, eleviamo alla i e ricaviamo $(e^{2\pi i})^i = (e^0)^i = (e^{4\pi i})^i$. Cosa succede applicando la nota regola delle potenze $(a^x)^y = a^{xy}$? Possiamo fidarci della regola $(e^x)^y = e^{xy}$ quando gli esponenti sono complessi?

Esercizi del 26 novembre 2024

79. Dire quali delle seguenti espressioni sono predicati, nel senso che diventano vere o false a seconda del valore numerico che diamo alla variabile n:

$$(n+1)^2 \geq n + 5, \quad \max\{n, n-2, n^2 - 4n\}, \quad |n^2 - 4n + 1|,$$
$$(n + 4 > n^2) \Rightarrow n < 3, \quad (n-1)/3 \in \mathbb{Z}, \quad \min\{1 - n, 2n - 4\} \geq 3, \quad n! - n^2.$$

80. Titolo di giornale: "ın tre settimane i contagi si sono triplicati". Quindi in due settimane si sono raddoppiati? In una settimana si sono...

81. Quanti sono i numeri interi da $n+2$ a $2n+1$?

82. Come proseguireste questa sequenza?

$$\begin{aligned}
&1+2\\
&2+3+4\\
&3+4+5+6\\
&4+5+6+7+8\\
&5+6+7+8+9+10
\end{aligned}$$

Come esprimereste il termine generico n-esimo usando la notazione con i puntini "…", oppure con la notazione di sommatoria?

83. Come proseguireste questa sequenza?

$$\begin{aligned}
&1\\
&1^2+2^2\\
&1^3+2^3+3^3\\
&1^4+2^4+3^4+4^4\\
&1^5+2^5+3^5+4^5+5^5
\end{aligned}$$

Come esprimereste il termine generico n-esimo usando la notazione con i puntini "…", oppure con la notazione di sommatoria?

84. Interpretare (quando sensate) le seguenti espressioni contenenti i puntini di sospensione, dire quanti addendi o fattori ci sono, calcolare quanto valgono per $n = 1, 2, 3, 4$, tradurli nella notazione della sommatoria (o produttoria):

$$1+2+3+\cdots+n, \quad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1},$$
$$1+2+3+\cdots+\frac{n}{2}, \quad 1^2+2^2+3^2+\cdots+2^n, \quad 2^1+2^2+2^3+\cdots+n^n,$$
$$n+(n-1)+(n-2)+\cdots, \quad 1^n+2^n+3^n+\cdots+k^n,$$
$$1+2+3+4+\cdots+n^2, \quad 1+2+3+4+\cdots+(n-1)^{n-1}+n^n,$$
$$1\cdot 2\cdot 3\cdots n^2 > n, \quad 1+2+3+4+\cdots+4+3+2+1,$$
$$1+1+1+\cdots+3, \quad 2n+3n+4n+\cdots+n^2,$$
$$1+2+3+\cdots+n+n^2, \quad 1+2+3+\cdots+(n+n^2),$$
$$(1+2+3+\cdots+n)+n^2, \quad \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}} = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n,$$
$$\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots \cancel{n}!}{\cancel{n}!} = 2n(2n-1)(2n-2)\cdots$$

85. Vero o falso?

$$\frac{2n+1}{3}\cdot\frac{2n}{3}\cdot\frac{2n-1}{3}\cdots\frac{n}{3}\cdot\frac{n-1}{3} = \frac{(2n+1)!}{(n-2)!\cdot 3^{n+3}},$$

$$(3n)^2 = \overbrace{3n + 3n + 3n + \cdots + 3n}^{2n \text{ addendi}},$$

$$3^{n^2} = \overbrace{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdots 9}^{n \text{ fattori}}, \qquad 2^{2^n} = \overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}^{4n \text{ fattori}}, \qquad x^{n^3} = \overbrace{x^n \cdot x^n \cdot x^n \cdots x^n}^{3n \text{ fattori}},$$

$$n^{n^2} = (\underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{n \text{ fattori}})^2$$

86. Poniamo $f(x) := x^{-n} + x^{-n+1} + \cdots + x^{n-1} + x^n$. Quanto vale $f(1)$?

87. Per ciascuna delle seguenti definizioni calcolare esplicitamente a_0, a_1, a_2, a_3, quando si riesce a dare un senso:

$$a_n := (2n+1) + (2n+2) + (2n+3) + \cdots + (4n-3),$$

$$a_n := \underbrace{n + n + n + \cdots + n}_{n+1 \text{ addendi}},$$

$$a_n := \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}}}}_{n \text{ radici}},$$

88. Riscrivere le seguenti espressioni (quando sensate) usando i puntini "…" invece della sommatoria, e calcolare quanto valgono per $n = 1, 2, 3, 4$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{2}, \quad \sum_{k=1/2}^{1/8} 2, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n}, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} k^2, \quad \sum_{k=1}^{n^2} k, \quad \sum_{k=n}^{k} (n-k)^2,$$

$$\sum_{k=-n}^{n} (n-k), \quad \sum_{k=\operatorname{sen} n}^{\cos n} \operatorname{arcsen} k, \quad \sum_{k=1}^{4} n^{-k}, \quad \sum_{k=2}^{n} (-k)^n.$$

89. n^n è un monomio di grado n?

90. (Avanzato) Scrivere un programma con cui studiare "sperimentalmente" la stabilizzazione delle cifre decimali della successione $a_n := (n+1)^2/(2n^2+1)$.

91. (Avanzato) Scrivere un programma con cui studiare "sperimentalmente" la stabilizzazione (o meno) delle cifre decimali della successione $r_n := a_{n+1}/a_n$, dove a_n è definito ricorsivamente da $a_1 := 1$, $a_2 := 2$, $a_{n+2} := 3a_{n+1} - a_n$.

92. (Teorico) Verificare che la definizione di limite $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \operatorname{dom} f :\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di δ:

$$\lim_{x \to 2} (x-1) = 1 \quad \text{con } \delta = \varepsilon,$$

$$\lim_{x \to -1} (2x+1) = -1 \quad \text{con } \delta = \varepsilon/2,$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 2x}{x-1} = 2 \quad \text{con } \delta = \varepsilon/2,$$

$$\lim_{x \to 0} 2^x = 1 \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \log_2(1+\varepsilon) & \text{se } \varepsilon \geq 1, \\ \min\{\log_2(1+\varepsilon), -\log_2(1-\varepsilon)\} & \text{se } 0 < \varepsilon < 1. \end{cases}$$

Esercizi del 3 dicembre 2024

93. Tradurre le espressioni seguenti nella notazione $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$:

$$n^2 \to +\infty \text{ per } n \to +\infty,$$
il limite di $(\operatorname{sen} x)/x$ per x che tende a 0 è 1,
$g(x)$ tende a ℓ quando x si avvicina a $-\infty$
per n che tende a $+\infty$, $n^2 - 2n \to +\infty$.

94. (Teorico) Verificare che la definizione di limite $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall x \in \operatorname{dom} f :\ x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di N:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{con } N = 1/\varepsilon,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2x} = \frac{1}{2} \quad \text{con } N = 1/(2\varepsilon),$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{con } N = 1/\sqrt{2\varepsilon},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x} = 0 \quad \text{con } N = -\log_2 \varepsilon.$$

95. (Teorico) Verificare che la definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, cioè $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \operatorname{dom} f :\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di δ:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^2} = +\infty \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M \le 0, \\ \sqrt{2/M} & \text{se } M > 0 \end{cases}$$
$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M \le 0, \\ 1/\sqrt{M} & \text{se } M > 0 \end{cases}$$
$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{|x+1|} = +\infty \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M \le 0, \\ 1/M & \text{se } M > 0 \end{cases}$$

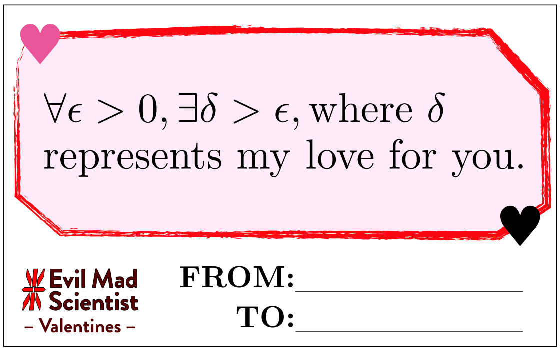
96. (Teorico) Verificare che la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, cioè $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall x \in \operatorname{dom} f :\ x > N \Rightarrow f(x) > M$, resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di N:

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \quad \text{con } N = M$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \quad \text{con } N = \begin{cases} \text{non importa quanto,} & \text{se } M < 0, \\ \sqrt{M} & \text{se } M \ge 0 \end{cases}$$
$$\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty \quad \text{con } N = \begin{cases} \text{non importa quanto,} & \text{se } M \le 0, \\ \log_2 M & \text{se } M > 0 \end{cases}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x+1} = +\infty \quad \text{con } N = \begin{cases} -1/2 & \text{se } M \le 0, \\ M + \sqrt{M + M^2} & \text{se } M > 0 \end{cases}$$

97. (Teorico) Trovare δ o N appropriati per la definizione di limite nei seguenti casi:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty,\qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty,$$
$$\lim_{x\to 2}|x+1|=3,\qquad \lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x}=0,\qquad \lim_{x\to -1}\max\{x,1-x\}=2.$$

98. Analizzare la seguente cartolina di San Valentino:



Esercizi del 10 dicembre 2024

99. Vero, falso, ambiguo, malformato, senza senso?

$$-\sqrt{2}^{\,+}<-\sqrt{2},\qquad 1^-<0,\qquad 3\cdot(-2)^-=-(3\cdot 2^-),\qquad (1^-)^2=1^+,$$
$$-(2^+)=(-2)^+,\qquad 1^+-(2^+)=(-1)^-,$$
$$(0^-)^2=0^+,\qquad ((-2)^-)^2=4^-,$$
$$((1-\sqrt{2})^+)^2-2(1-\sqrt{2})^+-1=0^+,\qquad ((-1)^+)^-=-1^+=(-1)^+,\qquad (a^-)^-=a^+,$$
$$1^--1^+=1^-+(-1)^-=0,\qquad a^+-b^-=(a-b)^+.$$
$$\text{per } x\to -2^- \text{ si ha che } x^2+2x=4^+-4^+=0^+,$$
$$\text{per } x\to 0^+ \text{ si ha che } x^2-x=0^+-0^+=0^+,$$
$$\text{per } x\to 0^+ \text{ si ha che } x^2-x^3=0^+-0^+=0^+,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\Big((-1)^n\Big)^2=\Big(\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\Big)^2,\qquad \lim_{n\to+\infty}\cos\big((-1)^n\big)=\cos\Big(\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\Big),$$
$$\lim_{x\Rightarrow+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\Rightarrow 0,\qquad \lim_{x\to 2x}\operatorname{sen} x=\operatorname{sen} 2x.$$

100. Supponiamo di sapere che $f(x)\to 0$ per $x\to x_0$, e che non è vero che $f(x)\to 0^+$ per $x\to x_0$. Possiamo concludere che $f(x)\to 0^-$ per $x\to x_0$?

101. Supponiamo di sapere che non esiste né $\lim_{x\to x_0} f(x)$ né $\lim_{x\to x_0} g(x)$. Che dire di $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ e di $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$?

102. Sapendo che le funzioni costanti sono continue, e che la funzione $x \mapsto x$ è continua (cioè tende a x_0 per $x \to x_0$), tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$, e usando le regole su somma, prodotto e quoziente dei limiti, calcolare i limiti seguenti

$$\lim_{x\to 0} 2x, \quad \lim_{x\to 1}(x-1), \quad \lim_{x\to -2}(x^2-1), \quad \lim_{x\to +\infty} -x, \quad \lim_{x\to -1} \frac{x}{x-1}$$

$$\lim_{x\to -\infty} x^3, \quad \lim_{x\to -\infty}(2x-4), \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x+1}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x^2+x},$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^2\Big(1-\frac{1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to +\infty}(x^2-x), \quad \lim_{x\to -\infty} x^3\Big(1+\frac{1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to -\infty}(x^3+x^2),$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2})}{x(\frac{1}{x}-1)}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-x+2}{1-x},$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x(2+\frac{1}{x})}{(\frac{2}{x}+3)x^2}, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{2x+1}{2x+3x^2}, \quad \lim_{x\to +\infty}\Big(x-\frac{x^2-1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to -\infty}\Big(\frac{x^2-x}{x+2}+\frac{x^3+x^2+1}{1-x^2}\Big),$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x(1+x)}{2x(1-2x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2}{2x-4x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x+3)}{x(1-x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3+3x^2}{x-x^2},$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{-x}{1+x}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(1-x)(1+x)}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{1-x^2}, \quad \lim_{x\to -1} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)},$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x}{x^3+1}, \quad \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-2)}, \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x},$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2}, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1}, \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1},$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}, \quad \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{(x-2)^2}, \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2}, \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}.$$

103. Sapendo che la radice quadrata è continua e che $\sqrt{x}$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to 4} \sqrt{x^3-3x}, \quad \lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+2x}, \quad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x+\sqrt{x}}{x-1},$$

$$\lim_{x\to +\infty}\big(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\big), \quad \lim_{x\to +\infty}\big(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}\big), \quad \lim_{x\to +\infty}\big(\sqrt{2x-2}-\sqrt{x+1}\big),$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x(2+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}\sqrt{2-\frac{1}{x}}}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x\big(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\big)}{x\big(1-\frac{1}{x}\big)}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x-1},$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}\Big(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\Big)}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}},$$

$$\lim_{x\to +\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-2x}\big), \quad \lim_{x\to +\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}\big),$$

$$\lim_{x\to -\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-3x}\big), \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

104. Il seguente conto è corretto?

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-\sqrt[3]{8x^6+x^5-1}}{\sqrt{x^4+2x^3}-x^2} = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-\sqrt[3]{x^6(8+x^{-1}-x^{-6})}}{(x^4+2x^3)-x^4}\bigl(\sqrt{x^4+2x^3}+x^2\bigr) = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-x^2\sqrt[3]{8+x^{-1}-x^{-6}}}{2x^3}\bigl(\sqrt{x^4(1+2x^{-1})}+x^2\bigr) = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-x^2\sqrt[3]{8+0-0}}{2x^3}\bigl(\sqrt{x^4(1+0)}+x^2\bigr) = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-2x^2}{2x^3}2x^2 = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^4-3x^3+1-4x^4}{x\bigl(\sqrt{4x^4-3x^3+1}+2x^2\bigr)} = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^3+1}{x\bigl(\sqrt{x^4(4-3x^{-1}+x^{-4})}+2x^2\bigr)} = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3(-3+x^{-3})}{x\bigl(x^2\sqrt{4-3x^{-1}+x^{-4}}+x^2\bigr)} = \\
&\quad= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(-3+0)}{x^2\sqrt{4-0+0}+2x^2} = \frac{-3}{2+2} = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

Esercizi del 16 dicembre 2024

105. Ricordando che seno e coseno sono sempre compresi fra -1 e 1, e usando il teorema del confronto, calcolare i limiti seguenti:

$$
\lim_{x\to+\infty}(x^2-\cos x),\quad \lim_{x\to-\infty}(x+\operatorname{sen}x-\cos x),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\operatorname{sen}x}{x},
$$
$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x-1)}{x^2},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\cos(x-1)}{\sqrt{x^4+1}},\quad \lim_{x\to0}\Bigl(\frac{1}{x^2}+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\Bigr),
$$
$$
\lim_{x\to+\infty}\Bigl(\frac{x^2+x}{x-2}+\cos(x^3-2^x)\Bigr),\quad \lim_{x\to-\infty}(x+1)\bigl(2+\operatorname{sen}\sqrt{x^2-1}\bigr).
$$

106. Ricordando la continuità e i limiti agli estremi delle funzioni esponenziali e logaritmiche, e i limiti di a^x/x^n e $(\ln_a x)/x$ per $x\to+\infty$, oltre alle regole già viste prima, calcolare i seguenti limiti:

$$
\lim_{x\to+\infty}(3^x-x),\quad \lim_{x\to-\infty}2^{x-1},\quad \lim_{x\to+\infty}(5^x-x4^x),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x\log_2 x}{3^x},
$$
$$
\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{sen}2^x}{3^x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3^x+1}{x^3-2x+2^x},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3^x-1}{x^2+x-3^x},
$$

$$\lim_{x\to 0^+} 3^{1/x}, \quad \lim_{x\to 0^-} 2^{2/x}, \quad \lim_{x\to+\infty} 2^x 3^{-x+1}, \quad \lim_{x\to 0} 2^{(x-1)/x^2},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_2(x^2-1), \quad \lim_{x\to+\infty} \log_3(3^x-2^x), \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log_2 x}{x},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_2 \frac{1+x}{x-1}, \quad \lim_{x\to+\infty} \big(\log_2(x+1)-\log_2 x\big), \quad \lim_{x\to 0^+} 2^{-\log_2 x},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2 \sqrt{x}}{\log_2 x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2 \sqrt{x}}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_2 x)^2}{x},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2(x^2)-\log_2 x}{\log_2 x}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log_2 x}{1/x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_3(3^x-2^x).$$

107. Ricordando che seno e coseno sono continui, che $(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ e $(1-\cos x)/x^2 \to 1/2$ per $x \to 0$, (più la regola del cambio di variabile, prodotti notevoli, scomposizioni in fattori...), calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{\operatorname{sen} x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x-x^2)}{x}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x-x^2}{\operatorname{sen}(x-1)},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}, \quad \lim_{x\to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x-1}, \quad \lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} \frac{x-1}{x^2},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{x-1} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(\cos 2x)-1}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^3}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^3},$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{x(x-2)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos^3 x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x+\cos x-2}{x^3-2x}.$$

108. (Semplificazioni nei limiti: regole e pseudoregole) è vero che se $f(x) \to \ell$ allora vale anche l'uguaglianza $\lim(f(x)+g(x)) = \lim(\ell+g(x))$, nel senso che qualora uno dei due membri esista, esiste anche l'altro e sono uguali? Se $f(x) \to \ell$ allora $\lim f(x)g(x) = \lim \ell g(x)$? Se $f(x) \to \ell$ allora $\lim(f(x)g(x)+h(x)) = \lim(\ell g(x)+h(x))$? Se $f(x) \to \ell$ allora $\lim(f(x)+g(x))h(x) = \lim(\ell+g(x))h(x)$? Se $f(x) \to \ell$ allora $\lim(f(x)+g(x))/h(x) = \lim(\ell+g(x))/h(x)$? Se $f(x) \to \ell$ allora $\lim \exp(f(x)+g(x)) = \lim \exp(\ell+g(x))$?

109. Consideriamo il $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{2n}$. Facendo il cambio di variabile $2n = m$ otteniamo $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{2n} = \lim_{m\to+\infty}(-1)^m$. Sappiamo che il $\lim_{m\to+\infty}(-1)^m$ non esiste, perché funzione oscillante. Quindi anche il limite iniziale $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{2n}$ non esiste. Sicuro?

110. Vogliamo calcolare il

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{e^{1/n}-1}-n\Big).$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty-\infty$. Ispirandoci al limite notevole $(e^x-1)/x \to 1$ per $x \to 0$, procediamo così:

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{e^{1/n}-1}-n\Big) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^{1/n}-1}{1/n}\cdot\frac{1}{n}}-n\right) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{1\cdot\frac{1}{n}}-n\Big) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}(n-n) = 0.$$

Giusto?

Nel seguito i logaritmi in cui non viene indicata la base si devono assumere in base e, ossia $\log x = \log_e x = \ln x$.

111. Ricordando che esponenziale e logaritmo sono continui, che $(\ln(1+x))/x \to 1$, $(e^x-1)/x \to 1$ per $x \to 0$, (più la regola del cambio di variabile, prodotti notevoli, scomposizioni in fattori, limiti notevoli precedenti...), calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x^2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x^2)}{x^2+2x^3},\quad \lim_{x\to 1}\frac{x-x^2}{\log x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{1-e^x},\quad \lim_{x\to -1}\frac{\log|x|}{x^2-1},\quad \lim_{x\to+\infty} x\log\frac{x+1}{x},\quad \lim_{x\to+\infty} x(1-e^{1/x}),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 2x)-1}{x\log(x+1)},\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x^2}-1}{x^3},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^3},\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1-\sqrt{x})}{x(x-2)},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{(1-e^x)(1-e^{2x})},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x^2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\log(e+x)}{x^3-2x}.$$

112. Esercizi di ricapitolazione:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2^x+x}-\sqrt{2^x-x}\right),\quad \lim_{x\to 1} 2^{1/(x-1)},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2^{1/x}}{2^{1/x}},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-\log_2 x+2^{x-1}\right),\quad \lim_{x\to-\infty} 3^x(1-\cos 3^{-x}),\quad \lim_{x\to+\infty} 2^{x+\operatorname{sen} x},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2+\operatorname{sen}^2 x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\operatorname{sen} x)}{1-\cos x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\operatorname{sen} x}{x^2-2x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x},\quad \lim_{x\to+\infty}(x^4-2^x+\cos x),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right),\quad \lim_{x\to 0}\frac{2x-\operatorname{sen} x\cos x}{1-\cos x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_3(3^x-2^x+x)}{\log_2 x},$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1-\cos\sqrt{x}}{\operatorname{sen} x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1-\operatorname{sen} x)(1-\cos x)}{\operatorname{sen} x}.$$

Dare per noti la continuità di esponenziale e logaritmo, nonché i limiti di $(1+1/x)^x$ per $x\to\pm\infty$; di $(1+x)^{1/x}$, $(\ln(1+x))/x$, $(e^x-1)/x$ per $x\to 0$.

113. Calcolare i seguenti limiti, usando per esempio la formula $a^b = e^{b\ln a}$:

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{1/x},\quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n-1},\quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n+1}{2n^2+1}\right)^n,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+3}{n^2+1}\right)^{n/2},\quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2+3}{n^2+1}\right)^{n/2},\quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{n/2},$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\ln(e+x)\right)^{1/x},\quad \lim_{x\to 0}\ln\left((e+x)^{1/x}\right),\quad \lim_{x\to 0}\left(1+x+x^2\right)^{1/x},$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{1/x},\quad \lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{1/x^2},\quad \lim_{x\to 0}\left(\cos x-\operatorname{sen} x\right)^{1/x},$$

$$\lim_{x\to 0}\left(e^x+e^{2x}-1\right)^{1/\operatorname{sen} x},\quad \lim_{x\to 0}\left(2^x+3^x-1\right)^{1/\ln(1+x)},\quad \lim_{x\to 0}\left(e^x+\operatorname{sen} x\right)^{1/x}.$$

114. (Avanzato: semplificazioni nei limiti con esponenziali, regole e pseudoregole) è vero che se $f(x)\to\ell$ allora $\lim f(x)^{g(x)} = \lim \ell^{g(x)}$? Se $f(x)\to\ell$ allora $\lim f(x)^{g(x)}h(x) = \lim \ell^{g(x)}h(x)$? Se $f(x)\to\ell$ allora $\lim f(x)^{g(x)}/h(x) = \lim \ell^{g(x)}/h(x)$? Se $f(x)\to\ell$ allora $\lim f(x)^{g(x)} = \lim \ell^{g(x)}/h(x)$? Se $f(x)\to\ell$ allora $\lim f(x)^{g(x)}/h(x) = \lim \ell^{g(x)}/h(x)$? Tutti vanno intesi in questo senso: quando esiste il limite al secondo membro allora esiste anche il limite al primo membro e sono uguali. Possono aiutare ipotesi supplementari su ℓ come che $0<\ell<+\infty \wedge \ell\neq 1$?

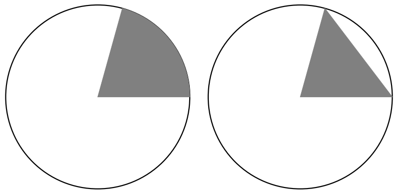
115. (Avanzato) Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} x\bigl(x-1-\sqrt{x^2-2x}\bigr), \qquad \lim_{x\to+\infty}\bigl(x-\sqrt{x^2-2x}\bigr)^x.$$

116. (Avanzato) Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} x\bigl(-1+\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\bigr), \qquad \lim_{x\to+\infty}\bigl(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\bigr)^x.$$

117. Dimostrare la disuguaglianza $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ confrontando le aree del settore circolare e del triangolo in figura:



118. Dimostrare la disuguaglianza $\arctan x < x < \operatorname{arcsen} x$, valida per...

119. Definiamo la funzione $f(x)$ così:

$$f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Calcolando $f(x)$ per $x = 1-\sqrt{2}$ viene

$$f(1-\sqrt{2}) = \lim_{1-\sqrt{2}\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+(1-\sqrt{2})^2}}.$$

O no?

120. Ci proponiamo di calcolare il

$$\lim_{x\to1} \operatorname{sgn}(x^2-2x+1),$$

dove sgn è la famosa funzione segno ($\operatorname{sgn}(x) = 1$ se $x > 0$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$, $\operatorname{sgn}(x) = -1$ se $x < 0$). Ragioniamo così: se facciamo il cambio di variabile $y = x^2-2x+1$ abbiamo $y \to 0$, e quindi

$$\lim_{x\to1} \operatorname{sgn}(x^2-2x+1) = \lim_{y\to0} \operatorname{sgn}(y).$$

Ora dovrebbe essere noto che $\lim_{y\to0} \operatorname{sgn}(y)$ non esiste (i limiti da sinistra e da destra sono diversi). Concludiamo che anche il limite di partenza $\lim_{x\to1} \operatorname{sgn}(x^2-2x+1)$ non esiste. O sì? C'è un baco nel ragionamento? Dove?

121. Vero, falso, o senza senso?

$$\lim_{x\to 2x}\frac{x}{x+1}=\frac{2x}{2x+1},\qquad \lim_{x\to x+1}(x+3)^2=(x+4)^2,$$
$$\lim_{x+1\to x^2}\frac{x+1}{1+(x+1)^2}=\frac{x^2}{1+x^4},\qquad \lim_{x\to f(x)}f(-x)=-f(x),$$
$$\lim_{f(x)\to -x}g(x)=g(-x),\qquad \lim_{f(x)\to 0}x=f^{-1}(0),$$
$$\lim_{x\to y}y=x,\qquad \lim_{x\to y}x=y,\qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\lim_{n\to+\infty}a_n}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-\sqrt[3]{8x^3+x^2-1}}{2x}=x-1.$$

122. Nel limite
$$\lim_{x\to+\infty}\big(x(x^2+1)-x^3\big)$$
il termine 1 è trascurabile rispetto al termine accanto x^2, quindi si può togliere:
$$\lim_{x\to+\infty}\big(x(x^2+1)-x^3\big)=\lim_{x\to+\infty}\big(x(x^2)-x^3\big).$$
Giusto?

123. Nel limite
$$\lim_{x\to+\infty}\big(x\sqrt{x^2+1}-x^2\big)$$
il termine 1 è trascurabile rispetto a x^2, quindi si può togliere:
$$\lim_{x\to+\infty}\big(x\sqrt{x^2+1}-x^2\big)=\lim_{x\to+\infty}\big(x\sqrt{x^2}-x^2\big).$$
Giusto?

124. Nel limite
$$\lim_{x\to+\infty}\big(x\sqrt{x^2+1}-x^2\big)$$
sotto radice possiamo aggiungere un termine $2x$, che è trascurabile rispetto a x^2, e quindi
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\big(x\sqrt{x^2+1}-x^2\big)&=\lim_{x\to+\infty}\big(x\sqrt{x^2+2x+1}-x^2\big)=\\&=\lim_{x\to+\infty}\big(x\sqrt{(x+1)^2}-x^2\big)=\lim_{x\to+\infty}\big(x(x+1)-x^2\big)=\\&=\lim_{x\to+\infty}(x^2+x-x^2)=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty.\end{aligned}$$
Giusto?

125. Calcolare il
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\tan(\operatorname{arcsen}x)\tan(\arccos x)}{\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{1}{\tan(\operatorname{arcsen}x)}}.$$

126. Dire che la successione reale a_n è strettamente crescente equivale a quali delle seguenti formule?

$$
\begin{gathered}
a_n < a_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \\
\forall n, m \in \mathbb{N} \quad n < m \Rightarrow a_n < a_m, \\
\forall n, m \in \mathbb{N} \quad n \leq m \Rightarrow a_n < a_m, \\
\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < a_{n+1}, \\
\nexists n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq a_{n+1} \\
\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq a_{n-1} \\
\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq a_{n-1} \\
\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n-1} < a_{n+1} \\
\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n-1} < a_n, \\
\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1.
\end{gathered}
$$

127. Sapendo che $a_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ e che $b_n > a_n$ per tutti gli n pari, si può concludere qualcosa sul limite di b_n?

128. (Avanzato) Dando per noto che la successione $a_n := (1 + 1/n)^n$ è crescente e tende ad e, dimostrare che anche $c_n := (1 + \frac{1}{2n})^n$ è crescente e trovarne il limite (osservare che $c_n = \sqrt{a_{2n}}$). Similmente per $d_n := (1 + \frac{1}{3n})^{2n}$.

129. (Avanzato) Adattando la dimostrazione fatta a lezione della crescenza di $(1 + \frac{1}{n})^n$, dimostrare che $a_n := (1 + \frac{c}{n})^n$ è crescente rispetto a n per gli $n > \max\{1, 1 - c\}$. Il risultato è valido anche se $c < 0$?

130. (Avanzato, ma non difficile) Mostrare che la successione $a_n := \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n+1}$ non è né crescente né decrescente sugli $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

131. (Avanzato) Dimostrare per induzione che $1^2 + 2^4 + 3^6 + \cdots + n^{2n} < 17n^{2n}/16$. Si possono sfruttare le proprietà note della successione $(1 + \frac{1}{n})^n$.

132. (Avanzato) Usando la disuguaglianza

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2,$$

valida per $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq 0$, al posto della disuguaglianza di Bernoulli, dimostrare che la successione

$$b_n := \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+1}$$

è decrescente se $0 < a \leq 2$.

133. (Avanzato) Usando la disuguaglianza

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3,$$

valida per $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$, al posto della disuguaglianza di Bernoulli, dimostrare che la successione

$$b_n := \left(1 + \frac{c}{n}\right)^{n+1}$$

è crescente se $c > 2$ sugli n sufficientemente grandi. (Ci si può aiutare con una macchina).

134. (Avanzato). Ricalcando la dimostrazione che la successione $a_n := (1+1/n)^n$ è crescente, dimostrare che anche $c_n := (1+2/n)^n$ è crescente. Dimostrare poi che c_n tende a e^2. (Per il calcolo del limite osservare che $c_{2n} = a_n^2$).

135. Il teorema del confronto, detto anche dei carabinieri (in inglese "Squeeze Theorem"), si può riformulare dicendo che se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ per ogni x, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x) \leq \lim_{x\to x_0} h(x)?$$