Dipartimento di Scienze Matematica, Informatiche e Fisiche
Corsi di Laurea in Informatica e in TWM

Esercizi di Analisi Matematica

Esercizi del 3 ottobre 2016

1. Nella rappresentazione decimale di un numero irrazionale non c'è nessun blocco di 5 cifre che si ripeta infinite volte. O sì? E per un numero razionale?

2. Chiamiamo x il numero decimale infinito ottenuto giustapponendo le rappresentazioni in base dieci dei numeri naturali in questo modo: $x = 0{,}12345678910111213141516\ldots$ Dimostrare che x non è periodico.

3. Chiamiamo x il numero decimale infinito ottenuto facendo sequenze crescenti di zeri e di uni in questo modo: $x = 0{,}10110011100011110000\ldots$ Dimostrare che x non è periodico.

4. Interpretare i puntini nelle seguenti espressioni:

$$\{1,3,5,7,9,\ldots,19\}, \qquad \{1,3,5,7,9,\ldots\}, \qquad \{\ldots,-3,-2,-1,0\},$$
$$\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{7}\right\}, \qquad \left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots\right\},$$
$$\{1^2,2^2,3^2,4^2,\ldots,n^2\}, \qquad \{2^1,2^2,2^3,2^4,\ldots\}, \qquad \{1^1,2^2,3^3,4^4,\ldots,n^n\},$$
$$\{1^1,2^2,3^3,4^4,\ldots,n^n,\ldots\}, \qquad \{n^2,(n+1)^2,(n+2)^2,\ldots,(2n)^2\}.$$

5. Quali fra le seguenti frasi possono essere enunciati di teoremi, di definizioni matematiche, o nessuno dei due?

Dato un triangolo, tracciare la bisettrice di uno degli angoli.
Il rettangolo è un poligono con quattro lati
Trovare un x per il quale $x^2 - 3x < 0$.
Il quadrato è un quadrilatero con quattro angoli retti
Il quadrato è un rettangolo con quattro lati uguali

6. Dimostrare che l'insieme dei numeri positivi dispari è numerabile.

7. Dimostrare che l'insieme delle potenze di 2 è numerabile.

8. Dimostrare che l'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile.

Esercizi del 17 ottobre 2016

9. Vero, falso, senza senso?

$$-\frac{1+\sqrt{2}}{2}=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \qquad \frac{\log(1+x)}{x}=\log\frac{(1+x)}{x},$$

$$\frac{3+x}{2-\sqrt{x}}\cdot\frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}=\frac{3+x}{4-x}\cdot 2+\sqrt{x},$$

$$\sqrt{2x+1}\sqrt{2x+1}=\sqrt{\sqrt{2x+1}},$$

$$\frac{\log(x)}{x}=\log\frac{(x)}{x}, \qquad \operatorname{sen}(1-x)(1+x)=\operatorname{sen}(1-x^2),$$

$$\frac{\cos(a-b)(a+b)}{a+b}=\cos(a-b), \qquad \cos 1=0,$$

$$\log\left(\frac{1+x}{x}\right) \qquad \frac{-1+\sqrt{2}}{2}=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{1+\sqrt{2}}{2}=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \qquad -\frac{1+\sqrt{2}}{2}=\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\frac{a}{b+1}}{a+b+3}\cdot\frac{b}{b+1}=\frac{ab}{a+b+3}.$$

I connettivi logici che useremo sono $\neg$ la negazione (`not`), $\vee$ la disgiunzione (`or`), $\wedge$ la congiunzione (`and`), $\Rightarrow$ l'implicazione (`if`... `then`...), $\Leftarrow$ l'implicazione inversa, $\iff$ la doppia implicazione o equivalenza (`iff`). Si rammenta la tabella di verità:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftarrow q$	$p \iff q$
vero	vero	falso	vero	vero	vero	vero	vero
vero	falso	falso	falso	vero	falso	vero	falso
falso	vero	vero	falso	vero	vero	falso	falso
falso	falso	vero	falso	falso	vero	vero	vero

10. Di ciascuna delle seguenti espressioni dire innanzitutto se hanno senso, poi se hanno o no un valore di verità (vero o falso), e, se sì, quale:

$$1+1=2, \quad 4-1=3, \quad \frac{4}{3}+\frac{1}{4}=\frac{5}{7}, \quad 3-7, \quad 5-4=4-5,$$

$$3-(2-1)=(3-2)-1, \quad \frac{51}{\frac{13}{7}}=\frac{51}{7}\cdot 13, \quad \frac{17}{\frac{9}{7}}=\frac{\frac{17}{9}}{7}, \quad \frac{\frac{11}{3}}{4},$$

$$\frac{1}{\frac{2}{3}+\frac{2}{5}}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}, \quad \frac{1/2}{3/5}=2\cdot\frac{3}{5}, \quad \frac{3/2}{5/7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}, \quad \frac{3/2}{5/7}=\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{5}, \quad 3-2\geq 1,$$

$$7\geq 4+3, \quad (-1)^5<(-1)^4, \quad -1<3-2<2, \quad 1+2+3+4, \quad \frac{7}{2>1}, \quad 1>\pm\sqrt{3}$$

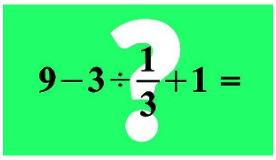
$$1+1=2\vee 2+2=3, \quad 1-1=2\wedge 2+2=3, \quad 3\geq\pi\vee 3<\pi, \quad 3\geq\pi\wedge 3<\pi,$$

$$1\in\mathbb{Q}, \quad 1\subset\mathbb{Q}, \quad \frac{2}{3}\in\{\mathbb{R}\}, \quad \{-1\}\in\{\mathbb{Z}\}, \quad \{1,-1/2\}\subset\mathbb{Q}.$$

11. Di ciascuna delle seguenti espressioni discutere innanzitutto se hanno senso, poi se hanno o no un valore di verità (vero o falso) per valori reali generici delle variabili, e, se sì, quale:

$$a+b=b+a, \qquad a-b=b-a, \qquad a-b=-b+a,$$
$$(a-2x)^2, \qquad \frac{1}{x-y}=\frac{-1}{y-x}, \qquad (a+b+c)(a-b-c)=a^2-b^2-c^2$$
$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}, \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d+e}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{d+e}, \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d+e}}=\frac{a}{b}\cdot c(d+e),$$
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d+e}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d+e}{c}, \qquad \frac{1}{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}}=\frac{b}{a}-\frac{d}{c}, \qquad \frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}=\frac{b}{a}+\frac{d}{c},$$
$$x^4-2x+1=x\Big(x^{4-1}-2+\frac{1}{x}\Big), \qquad x-2b=\frac{x+2b}{x^2-4b^2}.$$

12. Un quiz apparso in rete:



13. Supponiamo di sapere che vagono le implicazioni seguenti

$$\begin{array}{ccccccc}
p_1 & \Rightarrow & p_2 & \Longleftrightarrow & p_3 & \Leftarrow & p_4 \\
\Uparrow & & \Downarrow & & \Uparrow & & \Downarrow \\
p_5 & \Leftarrow & p_6 & & p_7 & & p_8
\end{array}$$

Se p_1 è vero, quali altri sono necessariamente veri? Se p_7 è vero, quali altri sono veri? Se p_4 è vero, quali altri lo sono? E per p_8? E se p_2 è *falso*, quali altri sono falsi?

14. Di ciascuna delle seguenti espressioni dire innanzitutto se hanno senso, poi se hanno o no un valore di verità (vero o falso), e, se sì, quale (la variabile x si intende reale):

$$7\vee 8-1, \quad \neg(-1), \quad \neg(1>3), \quad 4<2\vee \text{vero}, \quad \text{vero}\wedge 3>4, \quad \text{vero}+1,$$
$$\text{falso}\Rightarrow 1-1, \quad 1+2+3\Rightarrow 1+2+3+4, \quad \text{vero}\Leftarrow\text{falso}, \quad \text{falso}\Rightarrow 1+2=4.,$$
$$2<3 \iff 4=2+2, \quad 2\le 2 \iff 2=2, \quad \text{falso}\iff\text{falso},$$
$$-3\in\{-3,-2\}, \quad \{1,-1\}\Rightarrow 0, \quad x+1=x-1 \iff x\in\varnothing,$$
$$x^2<0 \iff x\in\{\varnothing\}, \quad (x-1)^2\ge 0 \iff \mathbb{R},$$
$$\big(0<x\le 1\vee 1\le x\le 3\big) \iff 0<x\le 1\le x\le 3.$$

15. Di ciascuna delle seguenti espressioni discutere innanzitutto se hanno senso, poi se hanno o no un valore di verità (vero o falso) per valori reali generici delle variabili, e, se sì, quale:

$$3x+1<y\Rightarrow 3x+3<y+2, \quad 3x+1<y\Leftarrow 3x+3<y+2,$$
$$3x\le 2 \iff x\le 2/3, \quad -3x\le 2\Leftarrow -x\le 2/3, \quad \big(x<2\vee x<-1\big)\iff x+1<0,$$
$$x>3 \iff 3x>9, \quad \big(x>-2\vee x<1\big)\iff \text{vero}, \quad \big(x<1\wedge x\ge 2\big)\iff\text{falso}$$
$$x>0 \iff x^2>0, \quad x>-1\Rightarrow x^2>(-1)^2, \quad x>1\Leftarrow x^2>1,$$
$$x>2\vee x<(-1)^2, \quad x^2\ge -x, \quad x\le\pm\sqrt{2}, \quad x=\pm 5, \quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}}<x\le\mp\sqrt{8}.$$

16. Vero, falso, malformato, senza senso?

$$a = b \Rightarrow -b = -a, \quad x^2 + 2x - 3 = 2 \iff x^2 - 3 = 2 - 2x$$
$$x = 2 \vee x = 1 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(x-1) = 0,$$
$$\begin{cases} a+b=c \\ a-b=c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = c, \qquad \begin{cases} a+b=c \\ a-b=c \end{cases} \quad \Leftarrow \quad a = c,$$
$$\begin{cases} a+b=c \\ a-b=c \end{cases} \quad \iff \quad a = c$$

17. Ai tempi delle trasvolate oceaniche, attorno al 1930, fu coniato un motto di cui ho trovato in rete tre versioni. Una è "Chi vola vale, chi non vale non vola, chi vale e non vola è un vile". Un'altra è "Chi vola vale, chi non vola non vale, chi vale e non vola è un vile". La terza è "Chi vale vola. Chi vola vale. Chi vale e non vola è un vile!". Farne l'analisi logica.

18. Discutere la validità della seguente catena di implicazioni:

$$a = b \quad \Rightarrow \quad a^2 = ab \quad \Rightarrow \quad a^2 - b^2 = ab - b^2 \quad \Rightarrow \quad (a+b)(a-b) = b(a-b) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (a+b) = b \quad \Rightarrow \quad a + a = a \quad \Rightarrow \quad 2a = a \quad \Rightarrow \quad 2 = 1.$$

19. Nelle espressioni seguenti, si possono cancellare delle coppie di parentesi in modo che rimanga inalterato il valore?

$$-(a+b), \quad 2(a-x), \quad \frac{(ab)+1}{a(b+1)}, \quad \sqrt{(1+\sqrt{2})},$$
$$\frac{x-2}{x^2+3}(x^2-3), \quad (\log x)y, \quad (\cos x^2)2x, \quad (\tan x) - (\tan y), \quad \operatorname{sen} 2(x+\pi),$$
$$2^{(x-y)}, \quad 3^{(x^2)}, \quad (a+2)^{a-2}.$$

20. Al posto dei punti interrogativi inserire il più appropriato fra $=, \Rightarrow, \Leftarrow, \iff$, o niente:

$$\begin{aligned}
x = x^2 - 1 \quad &? \quad x + 1 = x^2, \\
x^2 - 1 \quad &? \quad (x-1)(x+1), \\
2x - 1 = \sqrt{2} \quad &? \quad (2x-1)^2 = 2, \\
x > \sqrt{2} \quad &? \quad x + 1 > \sqrt{2}, \\
2x - 1 < \sqrt{2} \quad &? \quad (2x-1)^2 < 2, \\
x < 3 \wedge a < 1 \quad &? \quad x + a < 4, \\
\begin{cases} x < 1 \\ 1 > y \end{cases} \quad &? \quad x > y, \\
x > 2 \vee x < 4 \quad &? \quad x > 4, \\
2 < x > 4 \quad &? \quad 2 < x < 4, \\
2 < x > 4 \quad &? \quad x > 4, \\
2 > x < 4 \quad &? \quad x < 2, \\
2 > x < 4 \quad &? \quad x < 4, \\
(x^3 - 2x + 5)(3x^2 - 1) = 0 \quad &? \quad (x^3 - 2x + 5) = 0 \vee (3x^2 - 1) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
n^2 < 0 & ? & n^2 - 1 < 0 \\
xy \le ab & ? & x \le a \wedge y \le b, \\
xy \le ab & ? & x \le a \vee y \le b, \\
0 \le a = b & ? & a^2 = b^2, \\
0 \le a < b & ? & a^2 < b^2, \\
0 \le a \ge b & ? & a^2 \ge b^2, \\
n \in \mathbb{Z} & ? & n < \dfrac{1}{3} \vee n \ge 1, \\
n \in \mathbb{Z} & ? & n^2 \in \mathbb{Z}.
\end{array}$$

21. Al posto dei punti interrogativi inserire il più appropriato fra $\Rightarrow, \Leftarrow, \iff$, o niente:

$$\begin{array}{rcl}
x \ne y & ? & y \ne x, \\
x \ne y \ne z & ? & x \ne z, \\
x \ne y \ \wedge \ z \ne w & ? & x + z \ne y + w \\
x \ne y \ \wedge \ z = w & ? & x + z \ne y + w \\
x \ne 0 & ? & x > 0 \\
x \ne 0 & ? & x < 0 \\
x \ne 0 & ? & x > 0 \ \vee \ x < 0 \\
x \ne 0 \ \vee \ x \ne 1 & ? & \text{vero} \\
x \ne 0 \ \wedge \ x \ne 1 & ? & \text{falso} \\
x \ne 0 \ \wedge \ x \ne 1 & ? & 0 < x < 1 \\
x \ne 0 \ \wedge \ x \ne 1 & ? & x < 0 \ \vee \ 0 < x < 1 \ \vee \ x > 1
\end{array}$$

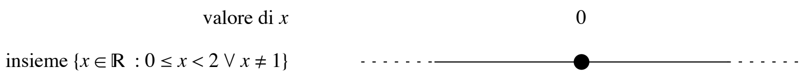
Di seguito diamo degli esempi di come rappresentare graficamente semplici insiemi di numeri reali. Il grafico ha in alto i valori cardine della variabile. In basso i pallini pieni significano punti che appartengono all'insieme, i pallini vuoti sono per punti che non appartengono all'insieme, le linee continue indicano che tutti i loro punti (esclusi forse gli estremi) appartengono all'insieme. Le linee continue che proseguono come tratteggiate si intende che si estendono fino all'infinito.

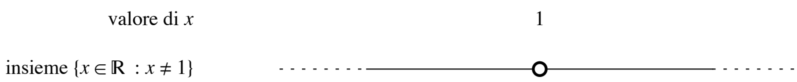
Un modo per indicare un insieme è la forma compatta che non contiene variabili, come per esempio $[0, 1[$:

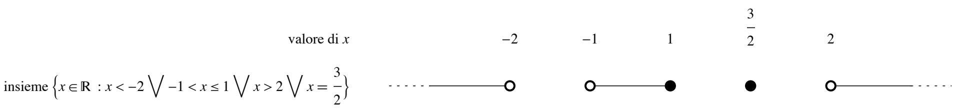
Un'altra notazione è l'insieme degli x reali che verificano certe condizioni, come per esempio $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 1\}$:

Un altro modo ancora è l'insieme delle soluzioni di una disequazione, per esempio $0 \le x < 1$:

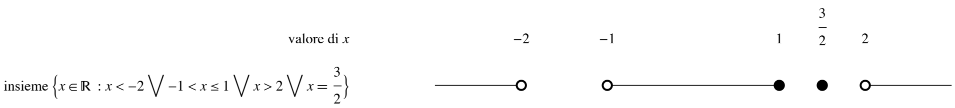
Altri esempi:

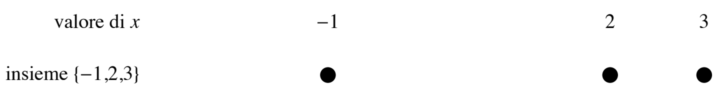






Nel grafico precedente non sono state rispettate le proporzioni delle distanze fra i valori di x. Se serve si possono anche rispettare:





Quando l'insieme è formato da infiniti punti discreti e si rispettano le proporzioni i punti si possono accavallare:

22. Dare una rappresentazione grafica dei seguenti insiemi di numeri reali:

$$\{1, -4\}, \quad \{-1, 1\} \cup \{0\}, \quad \{x \mid x < 0\}, \quad \{x \mid x < 0 \vee x = 2\},$$
$$\{x \mid x < -2 \wedge x^2 > 9\}, \quad \{x^2 \mid x < 1\}, \quad \{x - 1 \mid x < 0\},$$
$$\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \{1, 2, 3, 4\}\right\}.$$

23. Vero, falso, malformato?

$$\forall x \in \{0,1,2,3\} \quad x^2 > 1; \qquad \exists x \in \{0,1,2,3\} \text{ tale che } x^2 > 1;$$
$$\exists! x \in \{0,1,2,3\} \text{ tale che } x^2 > 1; \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + 2n - 1;$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \Rightarrow x > 2; \qquad \exists x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x > 1 \Rightarrow x > 2;$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \Rightarrow x \geq 0; \qquad (\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 0).$$

24. Delle seguenti espressioni dire quali hanno senso compiuto, e in tal caso se sono vere o false o altro:

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x < 0,$$
$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x^2 < 0,$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 \geq 0,$$
$$\forall x < 1,$$
$$\{\forall x < 1\},$$
$$\{\forall x \in \mathbb{R} \mid x > 0\},$$
$$\{x^2 - 1 \mid \forall x \in \mathbb{R}\},$$
$$\{\exists x \mid x^2\},$$
$$\{\nexists x \in \mathbb{R}\},$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid [0,1] \cup [3,5]\}.$$

25. Vogliamo formalizzare l'affermazione "tutti gli uomini hanno gli stessi diritti". Sia U l'insieme di tutti gli uomini. Quale delle formulazioni seguenti è corretta?

$$\forall U \quad U \text{ ha gli stessi diritti},$$
$$\forall x \in U \quad x \text{ ha gli stessi diritti},$$
$$\forall x \in U \quad x \text{ ha gli stessi diritti di } U,$$
$$\forall x, y \in U \quad x \text{ ha gli stessi diritti di } y.$$

26. Vogliamo formalizzare l'affermazione "gli esseri umani sono tutti diversi". Sia U l'insieme di tutti gli esseri umani. Qualcuna delle formulazioni seguenti è corretta?

$$\forall x \in U \quad x \text{ è diverso},$$
$$\forall x \in U \quad x \text{ è diverso da } U,$$
$$\forall x, y \in U \quad x \neq y.$$

27. Dare una rappresentazione grafica degli insiemi di numeri reali x che verificano le condizioni seguenti:

$$x < 1 \vee x > 3, \quad x < 1 \wedge x > 3, \quad \neg(x < 0), \quad x < 2 \wedge x = -1,$$
$$x < 1 \Rightarrow 2x < 2, \quad x < 1 \iff x < 0, \quad x > 2 \Rightarrow x^2 > 4, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.$$

28. Sia A l'insieme che comprende i numeri reali > 2 e quelli < -1, e nessun altro. Dire quali dei seguenti insiemi coincidono con A:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \wedge x < -1\}, \qquad \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \vee x < -1\},$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid (x-2)(x+1) > 0\}, \qquad \{(x-2)(x+1) \mid x \in \mathbb{R}, (x-2)(x+1) > 0\},$$
$$]-\infty, -1[\cup]2, +\infty], \qquad]-\infty, -1[\cap]2, +\infty]$$

29. Usando le regole di base delle disuguaglianze, dimostrare che se $a, b, c > 0$ allora $a/(b+c) < a/b < (a+c)/b$. Cioè se si parte da una frazione positiva, questa aumenta se si aumenta il numeratore, ma cala se si aumenta il denominatore.

30. Dimostrare che $x/(1+x^2) \le x$ quando $x \ge 0$.

31. La sottrazione è commutativa? È associativa? La divisione è commutativa? È associativa? L'elevamento a potenza è commutativo? È associativo? Come vanno interpretate espressioni come $1-2-3$, $1/2/3$, 2^{3^4}, a/bc?

Esercizi del 17 ottobre 2016

32. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\max\{x,2\} < 2x\,, \quad \max\{x,2x\} > 1-x\,, \quad \min\{x-1,1-x\} \ge 0\,,$$
$$\min\{x,-2x\} < \max\{1+2x,-1\}\,, \quad \min\big\{x, 3|x-1|\big\} < \frac{x}{2}\,.$$

33. Vero o falso? (Per ogni valore reale delle variabili che renda sensata l'espressione).

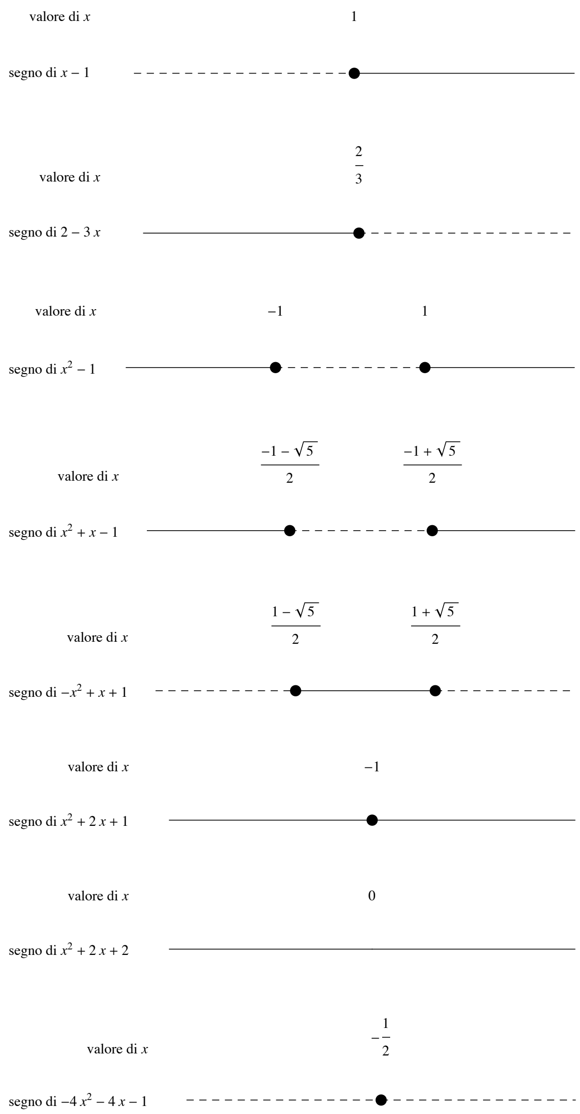
$$2\max\{x,y\} = \max\{2x,y\}\,, \quad 3\max\{x,y\} = \max\{3x,3y\}\,,$$
$$\max\{x,y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \quad \min\{x,y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2},$$
$$\min\{x+y,x-y\} = x-y\,, \quad \max\{x/y,y/x\} = (x+y)/(x-y)\,,$$
$$\min\{x,y,z\} = -\max\big\{x,\max\{y,z\}\big\}\,, \quad \max\{x,-y\} = -\min\{-x,y\},$$
$$\min\{-x,-y\} = -\max\{x,y\}, \quad \max\big\{x+z^2,y+z^2\big\} = z^2+\max\{x,y\}\,,$$
$$\max\left\{\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2}\right\} = \frac{1}{\min\{x^2,y^2\}}, \quad x < \min x,y, \quad x \ge \max\{x-1,x+1\}.$$

34. Disegnare il grafico delle funzioni seguenti:

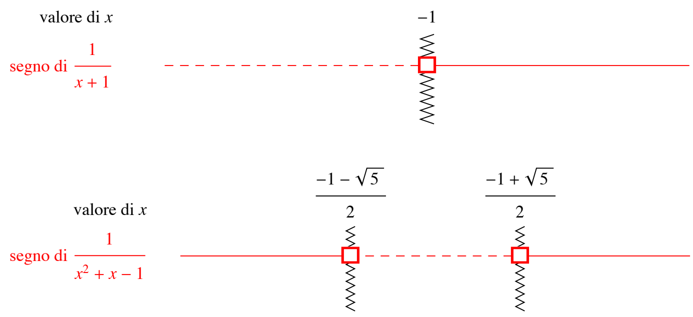
$$f(x) := \max\{x-1,2-x\}, \quad f(x) := \min\{2x,3x+1\},$$
$$f(x) := \max\{1-x,3+x,2\}, \quad f(x) := \min\{x^2-1,2-2x^2\},$$
$$f(x) := x+\max\big\{x,\min\{2x,3x\}\big\}, \quad f(x) := |x^2-3x+1|,$$
$$f(x) := \max\{2x^2-1,5-x\}, \quad f(x) := \min\{2x^2-1,5-x\}$$

Quando si chiede di studiare graficamente il segno di un'espressione, bisogna indicare in forma grafica per quali valori della variabile l'espressione è > 0, quando è $= 0$, quando è < 0, ed eventualmente quando non ha senso. La convenzione grafica in questo corso è che i tratti continui indicano zone in cui l'espressione è > 0, tratti tratteggiati zone in cui è < 0, pallini sono punti in cui è $= 0$, e quadratini vuoti e linee a zigzag punti in cui l'espressione non esiste. Sono ammissibili convenzioni diverse, in particolare quella con segni $+$ e $-$ invece di tratti continui o tratteggiati, ma comunque bisogna che ci sia un modo chiaro di indicare quando l'espressione vale 0 o non esiste, cosa che molti studenti non hanno imparato a fare bene alle superiori.
I casi base dello studio del segno sono quando l'espressione è un polinomio di primo o secondo grado. Prima di tutto raccomando di trovare dove il polinomio si annulla, segnando il punto sulla retta, e poi di assegnare linea continua o tratteggiata in cui

viene divisa la retta, aiutandosi con un disegnino della funzione polinomio. Quando il grado è 1, cioè quando l'espressione è del tipo $mx + q$, il tratteggio è a sinistra se $m < 0$ e a destra se $m > 0$. Quando il grado è 2, cioè $ax^2 + bx + c$, bisogna vedere se la parabola incontra o no l'asse x, e in quanti punti.



Quando l'espressione è il reciproco di un polinomio di primo o secondo grado, gli zeri del polinomio sono punti di non esistenza dell'espressione. Questi punti si segnalano vistosamente nel grafico con un quadratino vuoto e una linea a zigzag verticale. Per il resto il reciproco ha lo stesso segno del polinomio.

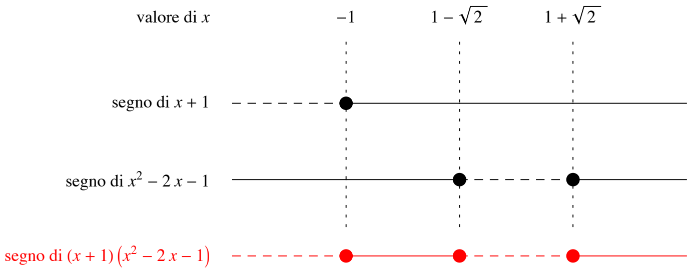


35. Tracciare lo schema grafico del segno delle espressioni seguenti:

$$x+2,\quad 3x-1,\quad 3-x,\quad 2x^2-3x,\quad (3x-1)^2,\quad x^2-x-2,$$
$$-2x^2+1,\quad 1+2x-x^2,\quad 1/(x-2),\quad \frac{1}{x^2+2x-1},\quad \frac{1}{2x^2-x-1}.$$

Esercizi del 27 ottobre 2016

Quando si chiede di studiare il segno di un'espressione che è il prodotto di fattori di primo o secondo grado (o loro reciproci), si applica la regola dei segni. Lo schema grafico riporta il segno dei singoli fattori, e poi il segno risultante.



36. Fare lo schema grafico del segno delle espressioni seguenti:

$$(x^2-2x-1)(2x^2+1),\quad (x+3)(1-3x+x^2),\quad (-2x^2+1)(x^2+x+1),$$
$$\frac{1-2x}{1+2x-x^2},\quad \frac{-2x^2+1}{x^2+x-2},\quad x+2\cdot\frac{x-1}{x+1}.$$

37. Risolvere le disequazioni razionali seguenti:

$$\frac{1}{3+4x}<-1\,,\qquad \frac{6+3x}{6x+1}-\frac{3}{x+5}>0\,,\qquad \frac{x}{3x+4}\geq\frac{5+6x}{3x+4}\,,$$
$$\frac{x-1}{2-x}+\frac{6}{x}\leq 0\,,\qquad \frac{x^2+2x-3}{x^2+1}<0\,,\qquad \frac{2-3x}{1+x}\leq\frac{1+x}{5-x}\,.$$

38. Risolvere le disequazioni con valori assoluti seguenti:

$$|5+3x|<1\,,\qquad |2-x|\geq 4\,,\qquad |1+4x|-x<0\,,\qquad |x-3|\geq x+1\,,$$
$$-\frac{1}{2}|-2x-6|<0\,,\qquad \frac{|5+3x|}{3x+6}<0\,,\qquad \frac{|6x+1|}{4x+1}>0\,,$$
$$|-1-3x|-4\cdot|x|\leq 2x\,,\qquad 5|x|>-1-2x\,,\qquad \frac{|5x+3|}{2x+5}>\frac{5x+2}{|1+2x|}\,.$$

39. Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases}1+x>0\\ 2-3x<0\end{cases}\qquad \begin{cases}6x^2+x-1<0\\ x^2<4\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{5+6x}{2x+1}\leq\dfrac{3x+2}{6x+6}\\[2mm] \dfrac{x}{x+1}<1\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x\geq|4x+4|-6\\ x^2-x>0\end{cases}\qquad \begin{cases}(4x-3)|5x+6|<0\\[1mm] \dfrac{1}{x+2}>0\end{cases}\qquad \begin{cases}5(x-4)<0\\ |3x+3|\geq 6+5x\\ |x^2+x-1|<1\end{cases}$$

Esercizi del 7 novembre 2016

40. Da $a^2<b^2$ segue che $a<b$? Segue che $|a|<|b|$?

41. Vero o falso:

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ si ha che } n^2 - 5n + 6 \geq 0\,,$$
$$\forall n \in \mathbb{Z} \text{ si ha che } \frac{1-3n}{4n+1} < 1\,,$$
$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } \frac{3n^2-2}{2n^2+1} \geq 1\,.$$

42. Riscrivere le formule seguenti usando connettivi logici ($\vee, \wedge \ldots$) e disuguaglianze $<, \geq \ldots$, ma senza usare simboli di insiemi o intervalli, presupponendo sempre che la variabile x sia ambientata in $\mathbb{R}$ (esempio: $x \in [0,1]$ diventa $0 \leq x \leq 1$):

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \qquad x \in \,]2, +\infty[, \qquad x \in \,]2, +\infty[\, \setminus \{5\},$$
$$x \in \,]-\infty, -1[\, \cup \,]-1, 1[, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

43. Per ognuna dei predicati seguenti, scrivere l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ che lo rendono vero, usando le notazioni degli intervalli, e senza usare la variabile x (esempio: $x > 1$ diventa $]1, +\infty[$):

$$x < 3, \qquad x < 0 \vee x \geq 2, \qquad x \neq 2, \qquad x \neq 1 \vee x \neq -1, \qquad x \neq 1 \wedge x \neq -1,$$
$$(\forall y > 0 \text{ si ha che } x < y), \qquad (\forall y > 0 \text{ si ha che } x \leq y), \qquad (\exists y \in \mathbb{Z} \text{ tale che } x \geq y).$$

44. Studiare il segno delle espressioni seguenti, cioè dire per quali x sono positive, negative, nulle:

$$(1-x)(2x^2+x-3)\,, \qquad \frac{1}{3} + \frac{3}{8x+16} - \frac{11}{24(3x-2)}\,, \qquad \frac{4x^2+7x-2}{(5-x)^3}\,,$$
$$1 - |x-3|\,, \qquad 1 + |x+3| - 3|x|\,, \qquad \frac{|3x+1|}{x+4} + \frac{4x+4}{|6+x|}\,, \qquad x^4 + x^2 - 1\,.$$

I tipi di equazioni irrazionali che abbiamo trattato:

$$\sqrt{A} \geq B \iff \begin{cases} A \geq B^2 \\ B \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0, \end{cases} \qquad \sqrt{A} \leq B \iff \begin{cases} A \leq B^2 \\ B \geq 0 \\ A \geq 0, \end{cases}$$

$$\sqrt{A} > B \iff \begin{cases} A > B^2 \\ B \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0, \end{cases} \qquad \sqrt{A} < B \iff \begin{cases} A < B^2 \\ B \geq 0 \\ A \geq 0 \end{cases}$$

45. Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:

$$2x+1 < \sqrt{x+2}, \quad x+4 \leq \sqrt{x+1}, \quad x+4 \leq \sqrt{2x+7}, \quad 1-2x > \sqrt{x+1},$$
$$x+3 < \sqrt{2x^2+20}, \quad 4-x > \sqrt{x^2-1}, \quad (2-x)\big(\sqrt{x^2-1}-1\big) < 0,$$
$$\sqrt{\frac{x^3-2}{x-1}} < x, \qquad \begin{cases} x+1 \geq \sqrt{x^2-8} \\ 2x < 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-1 \geq \sqrt{3x^2-1} \\ \dfrac{2x+1}{x-1} \geq 0 \end{cases}$$

46. Studiare il segno delle funzioni irrazionali seguenti, usando la regola dei segni:

$$\sqrt{x-1}, \qquad (x+2)\sqrt{1-x}, \qquad \frac{x+2}{(x-1)\sqrt{x^2-x}},$$
$$\sqrt[3]{x+2}, \qquad \frac{\sqrt{|x-2|}}{x-1}, \qquad \left|\sqrt{x^2+2x}\right|(x+1)$$

47. Risolvere le disequazioni irrazionali seguenti, usando la regola dei segni:

$$\sqrt{x-1}>0, \qquad (x+2)\sqrt{1-x}\le 0, \qquad \frac{x+2}{(x-1)\sqrt{x^2-x}}<0,$$
$$\sqrt[3]{x+2}\ge 0, \qquad \frac{\sqrt{|x-2|}}{x-1}\le 0, \qquad \left|\sqrt{x^2+2x}\right|(x+1)$$

48. (Avanzato) Mostrare che la disuguaglianza $\sqrt{A}+\sqrt{B}\ge C$ è equivalente alla seguente espressione in cui non compaiono radici quadrate:

$$\begin{cases} A\ge 0 \\ B\ge 0 \\ C<0 \end{cases} \quad\vee\quad \begin{cases} A\ge 0 \\ B\ge 0 \\ C\ge 0 \\ C^2-A-B<0 \end{cases} \quad\vee\quad \begin{cases} A\ge 0 \\ B\ge 0 \\ C\ge 0 \\ C^2-A-B\ge 0 \\ 4AB\ge (C^2-A-B)^2. \end{cases}$$

Si può omettere una delle disuguaglianze del sistema? Come va modificato il sistema se la disuguaglianza di partenza è $\sqrt{A}+\sqrt{B}>C$?

49. (Avanzato) Mostrare che la disuguaglianza $\sqrt{A}+\sqrt{B}\le C$ è equivalente al seguente sistema in cui non compaiono radici quadrate:

$$\begin{cases} A\ge 0 \\ B\ge 0 \\ C\ge 0 \\ C^2-A-B\ge 0 \\ 4AB\le (C^2-A-B)^2 \end{cases}$$

Si può omettere una delle disuguaglianze del sistema? Come va modificato il sistema se la disuguaglianza è $\sqrt{A}+\sqrt{B}<C$?

50. (Avanzato) In analogia con gli esercizi precedenti, eliminare le radici quadrate dalle disuguaglianze $A\sqrt{B}\le C$, $A\sqrt{B}\ge C$.

51. (Avanzato) Dimostrare che le seguenti uguaglianze sono vere per ogni $x\in\mathbb{R}$, disegnando anche un grafico dei due membri:

$$\max\{x,-x\}=|x|, \quad \max\{x,0\}=\frac{x+|x|}{2}, \quad \min\{x,1\}=\frac{x+1-|x-1|}{2},$$
$$\max\{x-1,2-x\}=\left|x-\frac{3}{2}\right|+\frac{1}{2}, \quad \min\bigl\{\max\{x,0\},1\bigr\}=\frac{2+x+|x|-\bigl|x-2+|x|\bigr|}{4}.$$
$$\max\Bigl\{x-1,-x-1,\min\{1-x,1+x\}\Bigr\}=\bigl||x|-1\bigr|.$$

52. (Avanzato) Stabilire se le disuguaglianze seguenti sono vere o false per via simbolica (elevando al quadrato o al cubo ambo i membri e rimaneggiando, quando lecito, senza calcoli approssimati in virgola mobile):

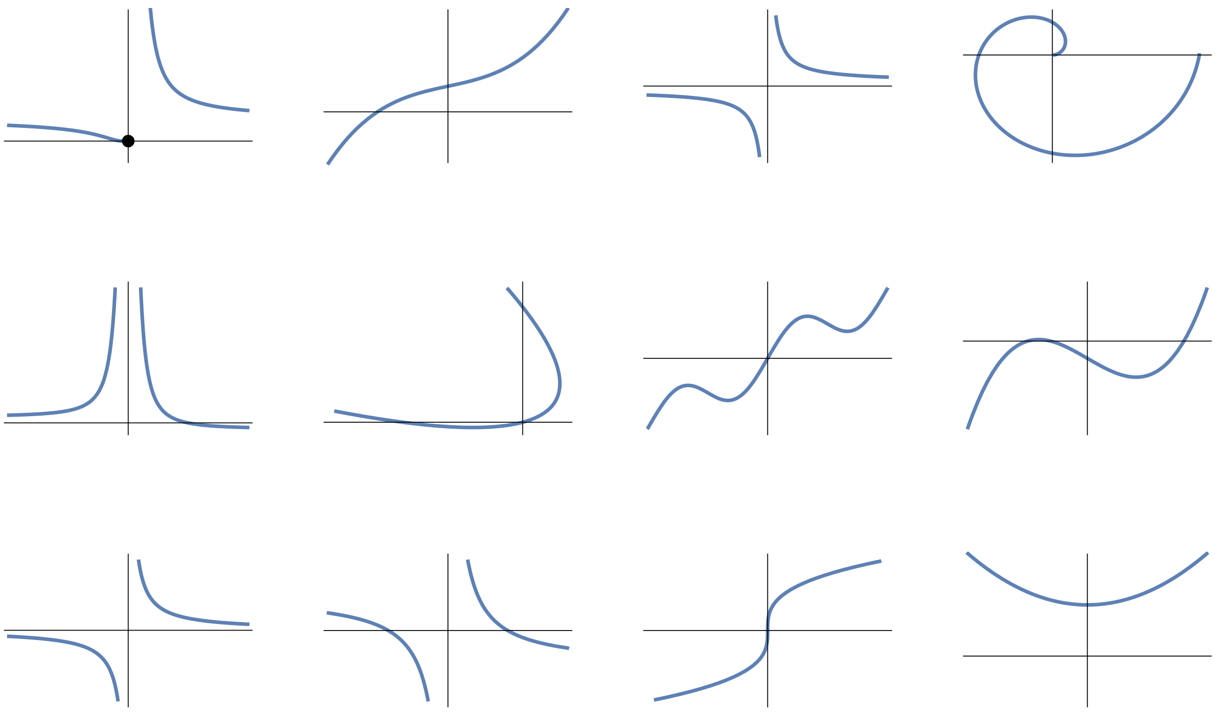
$$\sqrt{5} < 1 + \sqrt{2}, \quad \sqrt{2} + \sqrt{4} < 2\sqrt{3}, \quad \sqrt[3]{3} > \sqrt{2},$$
$$\sqrt{1 + \sqrt{2}} < \sqrt[3]{2}, \quad 1 - \sqrt{3} < \sqrt{5} - \sqrt{2}.$$

53. Discutere la validità della formula

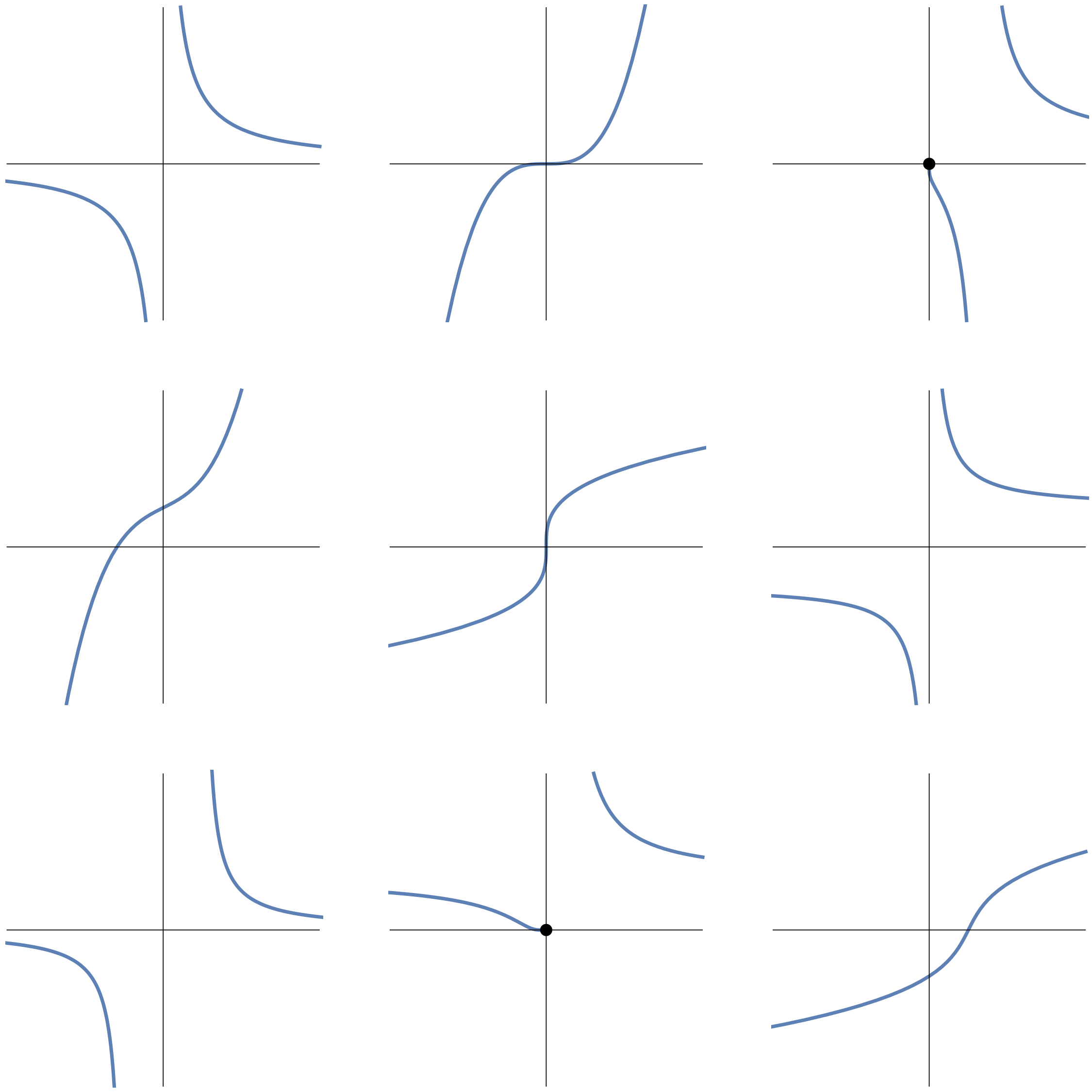
$$\frac{\sqrt{x+1}}{x-1} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Esercizi del 14 novembre 2016

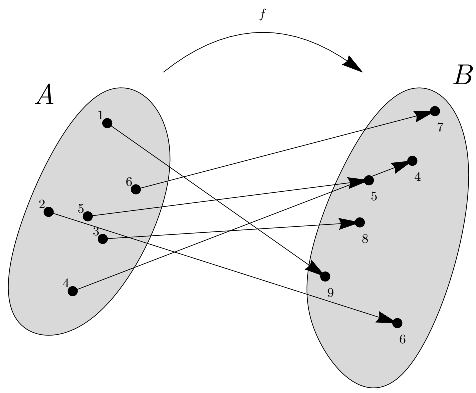
54. Per ognuno dei seguenti grafici decidere se si tratta di una funzione, e, qualora lo sia, se è iniettiva o no:



55. Per ognuno dei seguenti grafici di funzioni trovarne un altro, se c'è, che sia il grafico della funzione inversa:



56. Disegnare il grafico cartesiano della seguente funzione, e quello della funzione inversa:



57. Trovare la formula della funzione inversa delle seguenti funzioni:

$$f(x) = 3x - 1, \qquad f(x) = \frac{2x+1}{x-3}, \qquad f(x) = 5 - 2^{x+1}.$$

58. Supponendo che f, g siano invertibili, trovare la formula della funzione inversa della funzione h definita come $h(x) := g(1/f(x^3))$.

Ripasso su esponenziali e logaritmi
Per le disuguaglianze, usare il fatto che quando $a > 1$ valgono le equivalenze $x < y \iff a^x < a^y \iff \log_a x < \log_a y$.
A volte viene comoda la notazione alternativa per gli esponenziali: $\exp_a x = a^x$, che si coordina bene con la notazione usuale per i logaritmi.

59. Vero o falso? O senza senso?

$$2^{\log_2 3} = 3, \quad 3^{\log_2 3} = 2, \quad \log_2 4 = 2, \quad \log_3(-3)^2 = -3, \quad 3^{\sqrt{2}} < \sqrt{27}, \quad \sqrt{2^x} = 2^{x/2},$$
$$\sqrt{2^x} = \left(\sqrt{2}\right)^x, \quad \log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}, \quad 5^{\log_2 3} < 5^{\log_2 5}, \quad 6^{\log_2 a} = a3^{\log_2 a}, \quad 3^{1/x} = \frac{1}{3^x},$$
$$\log_2 \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}\log_2 6, \quad \log_a\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\log_a 2 + \log_a\left(1+\sqrt{3/2}\right),$$
$$\log_a(x^2) = (\log_a x)^2, \quad \log_a b^a = b^{\log_a b}, \quad \log_a(\log_b x) = \log_{ab} x, \quad \log_{ab} x = \frac{\log_a x}{1+\log_a b},$$
$$\sqrt{\log x} = (\log x)^{1/2} = \frac{1}{2}\log x, \quad \log_{-1}(-1)^n = n, \quad \log_0 0 = 1, \quad \log_1 1^2 = 2,$$
$$\log_{-a} x = \frac{1}{\log_a x}, \quad \log_{\sqrt{a}}(x) = 2\log_a x, \quad \log_{(a^x)}(x) = \frac{\log_a x}{x},$$
$$\log_a(\log_a x) = (\log_a x)^2, \quad \frac{\log x}{\log(1+x)} = \log x - \log(1+x), \quad (1+x)^{1/x^2} = \left((1+x)^{1/x}\right)^2,$$
$$\log(a+b)\log(a-b) = \log(a^2-b^2), \quad (\log(e+x))^{1/x} = \frac{1}{x}\log(e+x),$$
$$\log_a x = y \iff x = \exp_a y, \quad \log_a x < y \iff x < \exp_a y,$$
$$\exp_{(a^x)} y = \exp_{(a^y)} x = \exp_a(xy), \quad \exp_a(\exp_b x) = \exp_{ab} x,$$
$$(\exp_a x)(\exp_b x) = \exp_{ab} x, \quad \exp_a(\exp_b x) = \exp_b(\exp_a x), \quad a^{b^c} = a^{c^b}.$$

60. Mostrare che $\log_a x$ ha lo stesso segno di $x-1$, quando $x > 0$, $a > 1$. Analogamente $a^x - 1$ ha lo stesso segno di x, $\sqrt{x} - 2$ ha lo stesso segno di...

61. Risolvere le disequazioni seguenti:

$$2^x \geq 4^{1-2x}, \quad \sqrt{3^{x+1}} < 9^{x-1}, \quad \log_2 x \leq 3, \quad \sqrt{\log_2 x} < 4,$$
$$\log_2 \sqrt{x} > \sqrt{2}, \quad \log_3(1-x) < \log_3(1+x)\,.$$

62. Studiare il segno delle espressioni seguenti:

$$2^{x+1}(x^2-2x), \quad 3^x - 9^x, \quad (x-2)\log_3(x+1), \quad \frac{\log_2 x - \log_2 x^2}{x-3}.$$

63. Trovare l'insieme di definizione delle formule seguenti (quando per i logaritmi non è indicata la base, fate conto che qui non abbia importanza):

$$2^{1/x}, \quad \log|x|, \quad \log\left(x+\sqrt{x-1}\right), \quad \log x - \log(1-x), \quad \log\frac{x}{1-x},$$
$$\frac{1}{2-3^x}, \quad \log(2-3^x), \quad \frac{1}{\log(2-3^x)},$$
$$\log\left((\log_2 x)^2 - 1\right), \quad \log\left(1-2x+\sqrt{1+x}\right), \quad \sqrt{x+2-\sqrt{x+1}},$$

$$\log\bigl(\min\{x-1,2-x\}\bigr), \qquad \frac{1}{1-\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

64. Quali delle seguenti funzioni sono esponenziali di x o di n? Quali sono potenze di x o di n? Quali sono polinomi in x o in n?

$$x^4, \quad \frac{1}{2^x}, \quad \frac{x^2}{1+x^3}, \quad n!, \quad 2^{n!}, \quad n^n,$$
$$3^n/5^n, \quad 2^{3\log_2 x}, \quad x^n, \quad (n+x)^n, \quad 2^n+3^n, \quad 1^n+2^n+\cdots+n^n,$$
$$x^2+3x^3, \quad 2x^3+x2^x, \quad (n-1)(n-2), \quad \frac{1}{4^x}.$$

65. Dire se questo conto è giusto: $2^{n^2}=(2^n)^2=2^{n\cdot 2}=2^{2\cdot n}=(2^2)^n=4^n$.

66. (Avanzato) Dimostrare che $\log_2 3$ è irrazionale.

Esercizi del 23 novembre 2016

67. Vero, falso o senza senso?

$$\operatorname{sen}^3 x+\cos^3 x=1, \quad \operatorname{sen}^2 x\ge 0, \quad \operatorname{sen}(x^2)\ge 0,$$
$$\cos(x<y), \quad \cos\alpha=\frac{1}{x} \iff \alpha=\frac{1}{\cos x}, \quad \tan x+\tan y=\tan(x+y),$$
$$\cos x\tan x=\operatorname{sen} x, \quad \operatorname{sen}^{-n} x=\frac{1}{\operatorname{sen}^n x}, \arctan^{-1} x=\tan x,$$
$$\operatorname{arcsen} x=\operatorname{arcsen} y \iff \operatorname{sen} x=\operatorname{sen} y, \quad \operatorname{arcsen} x=\operatorname{arcsen} y\Rightarrow \operatorname{sen} x=\operatorname{sen} y,$$
$$\operatorname{arcsen} x=\operatorname{arcsen} y \iff x=y,$$
$$\operatorname{arc}(\operatorname{sen} x)=y \iff \operatorname{sen} x=\overset{-1}{\operatorname{arc}}\, y, \qquad \operatorname{arcsen} x=\cos y \iff \operatorname{sen} x=\arccos y$$
$$\operatorname{arcsen} x=\arccos y \iff \operatorname{sen} x=\cos y,$$
$$\arctan x=\frac{\operatorname{arcsen} x}{\arccos x}, \quad \arctan\frac{x}{y}=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos y},$$
$$\operatorname{arcsen}^2 x+\arccos^2 x=1, \quad \arctan^{-1} x=\frac{1}{\tan x}..$$

68. Dire quali delle seguenti espressioni sono predicati, nel senso che diventano vere o false a seconda del valore numerico che diamo alla variabile n:

$$(n+1)^2\ge n+5, \quad \max\{n,n-2,n^2-4n\}, \quad |n^2-4n+1|,$$
$$(n+4>n^2)\Rightarrow n<3, \quad (n-1)/3\in\mathbb{Z}, \quad \min\{1-n,2n-4\}\ge 3, \quad n!-n^2.$$

69. Come proseguireste questa sequenza?

$$1+2$$
$$2+3+4$$
$$3+4+5+6$$
$$4+5+6+7+8$$
$$5+6+7+8+9+10$$

Come esprimereste il termine generico n-esimo usando la notazione con i puntini "...", oppure con la notazione di sommatoria?

70. Come proseguireste questa sequenza?

$$\begin{aligned}&1\\&1^2+2^2\\&1^3+2^3+3^3\\&1^4+2^4+3^4+4^4\\&1^5+2^5+3^5+4^5+5^5\end{aligned}$$

Come esprimereste il termine generico n-esimo usando la notazione con i puntini "...", oppure con la notazione di sommatoria?

71. Interpretare (quando sensate) le seguenti espressioni contenenti i puntini di sospensione, dire quanti addendi o fattori ci sono, calcolare quanto valgono per $n = 1, 2, 3, 4$, tradurli nella notazione della sommatoria (o produttoria):

$$1+2+3+\cdots+n, \quad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1},$$
$$1+2+3+\cdots+\frac{n}{2}, \quad 1^2+2^2+3^2+\cdots+2^n, \quad 2^1+2^2+2^3+\cdots+n^n,$$
$$n+(n-1)+(n-2)+\cdots, \quad 1^n+2^n+3^n+\cdots+k^n,$$
$$1+2+3+4+\cdots+n^2, \quad 1+2+3+4+\cdots+(n-1)^{n-1}+n^n,$$
$$1\cdot 2\cdot 3\cdots n^2 > n, \quad 1+2+3+4+\cdots+4+3+2+1,$$
$$1+1+1+\cdots+3, \quad 2n+3n+4n+\cdots+n^2,$$
$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}} = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n.$$

72. Vero o falso?

$$\frac{2n+1}{3}\cdot\frac{2n}{3}\cdot\frac{2n-1}{3}\cdots\frac{n}{3}\cdot\frac{n-1}{3} = \frac{(2n+1)!}{(n-2)!\cdot 3^{n+3}},$$
$$(3n)^2 = \overbrace{3n+3n+3n+\cdots+3n}^{2n \text{ addendi}},$$
$$3^{n^2} = \overbrace{9\cdot 9\cdot 9\cdots 9}^{n \text{ fattori}}, \qquad 2^{2^n} = \overbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}^{4n \text{ fattori}}, \qquad x^{n^3} = \overbrace{x^n\cdot x^n\cdot x^n\cdots x^n}^{3n \text{ fattori}}.$$

73. Poniamo $f(x) = x^{-n} + x^{-n+1} + \cdots + x^{n-1} + x^n$. Quanto vale $f(1)$?

74. Per ciascuna delle seguenti definizioni calcolare esplicitamente a_0, a_1, a_2, a_3, quando si riesce a dare un senso:

$$a_n := (2n+1)+(2n+2)+(2n+3)+\cdots+(4n-3),$$
$$a_n := \underbrace{n+n+n+\cdots+n}_{n+1 \text{ addendi}},$$
$$a_n := \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}_{n \text{ radici}},$$

75. Riscrivere le seguenti espressioni (quando sensate) usando i puntini "..." invece della sommatoria, e calcolare quanto valgono per $n = 1, 2, 3, 4$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{2}, \quad \sum_{k=1/2}^{1/8} 2, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n}, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} k^2, \quad \sum_{k=1}^{n^2} k, \quad \sum_{k=n}^{k} (n-k)^2,$$

$$\sum_{k=-n}^{n} (n-k), \quad \sum_{k=\operatorname{sen} n}^{\cos n} \operatorname{arcsen} k, \quad \sum_{k=1}^{4} n^{-k}, \quad \sum_{k=2}^{n} (-k)^n.$$

Cautela: ci possono essere esercizi sull'induzione che sornionamente chiedono di dimostrare cose false.

76. Dimostrare che per $n \geq 1$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

77. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n2^n = 2 + (n-1)2^{n+1}.$$

78. Dimostrare che la disuguaglianza $n! \geq 3^{n-2}$ è induttiva (cioè implica la disuguaglianza che si ottiene sostituendo n con $n+1$) almeno per $n \geq 2$. Per quali n è vera?

79. Dimostrare che $4 \cdot 5^n \geq 5 \cdot 4^n$ per $n \geq 1$. Verificato poi che $2^n + 4 \cdot 5^n > 4 \cdot 5^n \geq 5 \cdot 4^n > 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n$, dimostrare che

$$2^n + 5^n \geq 3^n + 4^n \qquad \forall n \geq 1.$$

(Per il passo induttivo sommare membro a membro con $2^n + 4 \cdot 5^n \geq 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n$).

80. Dimostrare che $(2n)! > 4^{n-1} n!(n-1)!$ per $n \geq 1$.

81. Dimostrare che $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n^n \leq n^{n+1}$ per $n \geq 1$.

82. Dimostrare che $5^n \geq 2^n n^2$ per $n \geq 1$.
(Moltiplicare membro a membro per $5 \geq 2(n+1)^2/n^2$, che è vera per...).

83. Dimostrare per induzione su $n \geq 1$ che

$$27(27-1)(27-2)(27-3)\cdots(27-n+1)(27-n) = \frac{27!}{(27-n-1)!}.$$

84. (Esercizio avanzato) Trovare delle condizioni sui coefficienti a, b, c (che possono dipendere da x ma non da n) in modo che la formula $P(n)$ seguente

$$1 \cdot x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n = a + (bn + c)x^{n+1}$$

sia induttiva rispetto a n (cioè $P(n) \Rightarrow P(n+1)$) per $n \geq 1$. Trovare per quali coefficienti $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$. (Scrivere la formula di $P(n+1)$, rimpiazzarne una parte usando $P(n)$, semplificare e imporre che il risultato valga per ogni n, x...)

85. (Esercizio avanzato) Trovare delle condizioni sui coefficienti a, b, c, d (indipendenti da n) in modo tale che la formula $P(n)$ seguente

$$1^2 \cdot 2^1 + 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + \cdots + n^2 2^n = a + (bn^2 + cn + d)2^{n+1}$$

sia ereditaria rispetto a n (cioè $P(n) \Rightarrow P(n+1)$) per $n \geq 1$. Trovare per quali coefficienti $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$. (Scrivere la formula di $P(n+1)$, rimpiazzarne una parte usando $P(n)$, semplificare e imporre che il risultato valga per ogni n...)

86. Dimostriamo per induzione che $n!$ è un polinomio di grado n nella variabile n. Per $n = 0$ abbiamo $0! = 1$, che è una costante, e quindi un polinomio in n di grado 0. Supponendo che la tesi sia vera per n, abbiamo che $(n+1)!$ è di grado $n+1$, in quanto è il prodotto di $(n+1)$, che ha grado 1, con $n!$ che per ipotesi ha grado n. Si può anche dimostrare senza induzione: cominciando a moltiplicare i fattori $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ da sinistra a destra si ottengono successivamente n, $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$, che hanno gradi 1, 2, 3 e così via; quando saremo arrivati all'ultimo fattore avremo il grado n. Tutto chiaro? Il ragionamento fila? Nessuna perplessità?

87. Vogliamo dimostrare per induzione che $(1-\pi)^n \geq 1 - n\pi$ per ogni $n \geq 1$. Sia $\mathcal{P}(n)$ il predicato $(1-\pi)^n \geq 1 - n\pi$. Per $n = 1$ viene $(1-\pi)^1 \geq 1 - \pi$, che è vero. Per il passo induttivo supponiamo che sia vero $\mathcal{P}(n)$ per un $n \geq 1$, e scriviamo $\mathcal{P}(n+1)$:

$$(1-\pi)^{n+1} \geq 1 - (n+1)\pi,$$

che si può riscrivere come

$$(1-\pi)^n \cdot (1-\pi) \geq 1 - (n+1)\pi.$$

Sostituiamo $(1-\pi)^n$ con $1 - n\pi$ usando la $\mathcal{P}(n)$ supposta vera, ottenendo

$$(1-n\pi)(1-\pi) \geq 1 - (n+1)\pi,$$

che diventa

$$1 - \pi - n\pi + n\pi^2 \geq 1 - (n+1)\pi,$$

che si semplifica in

$$n\pi^2 \geq 0,$$

che è vero. Quindi $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni n. O no?

88. Dimostrare per induzione su $n \geq 2$ che $(1-2)(1-3)(1-4)\cdots(1-n) \geq 1-(n+2)(n-1)/2$.

Esercizi del 28 novembre 2016

89. Dimostrare per induzione su $n \geq 1$ che ogniqualvolta abbiamo n numeri positivi la cui somma è n, la somma dei loro quadrati è $\geq n$. Inoltre la somma dei quadrati è esattamente n soltanto quando tutti gli n numeri sono uguali a 1.

90. Dimostrare per induzione su $n \geq 1$ che ogniqualvolta abbiamo n numeri positivi la cui somma è n, la somma dei loro cubi è $\geq n$. Inoltre la somma dei cubi è esattamente n soltanto quando tutti gli n numeri sono uguali a 1.

91. Dimostrare per induzione su $n \geq 1$ che ogniqualvolta abbiamo n numeri positivi la cui somma è n, la somma dei loro reciproci è $\geq n$. Inoltre la somma dei reciproci è esattamente n soltanto quando tutti gli n numeri sono uguali a 1.

92. Dando per nota la disuguaglianza fra media aritmetica e media geometrica, dimostrare che dati $x, y > 0$ si ha $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y \geq x^{2/3}y^{1/3}$. Più in generale, se p, q sono razionali > 0 e $p + q = 1$ allora $px + qy \geq x^p y^q$.

93. Dimostrare che il predicato $\mathcal{P}(n) := (n+10 > 2^n)$ ha la proprietà che $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n-1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per quali n è vero?

94. Definiamo per ricorrenza $a_0 := 5$, $a_{n+1} := 2\sqrt{a_n}$. Dimostrare per induzione che $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \geq 1$.

95. Definiamo per ricorrenza $a_0 := 1$, $a_{n+1} = 1 - a_n/2$. Dimostrare per induzione che $a_{n+2} - a_{n+1}$ ha sempre segno opposto a $a_{n+1} - a_n$.

Esercizi del 7 dicembre 2016

96. Sia data la successione ricorsiva $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}$. Trovare un numero $c > 0$ tale che $a_n \leq c^n$ per ogni $n \geq 0$. (Imporre che scatti l'induzione).

97. Rappresentare graficamente gli insiemi seguenti:

$$\{0, \sqrt{2}, \pi\}, \qquad \big\{x^2 : x \in \{-1, 2\}\big\}, \qquad \big\{x \in \mathbb{R} : x^2 \in \{-1, 2\}\big\},$$
$$\{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\}, \qquad \{(-1)^n : n \in \mathbb{Z}\}, \qquad \{n \in \mathbb{Z} : (-1)^n \in \mathbb{N}\},$$
$$\{1^2, 2^2, 3^2, \dots, 7^2\}, \qquad \{1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots, 7^2\}, \qquad \{1^2, 2^2, 3^2, \dots\},$$
$$\{1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2\}, \qquad \{1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots\}.$$

98. Posto $f(x) := x^2 - 2x - 1$ rappresentare graficamente i seguenti insiemi:

$$f\big(\{0\}\big), \quad f\big(\{0, 1\}\big), \quad f\big([0, 1]\big), \quad f\big(]0, 2]\big), \quad f\big(]0, 3[\setminus \{2\}\big),$$
$$f\big(]0, 3[\big) \setminus \{2\}, \quad f^{-1}\big(\{0\}\big), \quad f^{-1}\big([0, 1]\big).$$

99. Vero, falso o senza senso? Rappresentare graficamente i vari insiemi.

$$\frac{2}{3} \text{ è un elemento di } \Big\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\Big\},$$
$$\frac{2}{3} \in \Big\{n \in \mathbb{N} : \frac{n}{n+1} \in \mathbb{N}\Big\},$$
$$[0, 1] \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x - 4 < 0\},$$
$$[0, 1] \subseteq \{x^2 + 2x - 4 : x \in \mathbb{R}, x < 0\},$$
$$[0, 1] \Rightarrow [-1, 2]$$
$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \subseteq \Big\{\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \;\Big|\; n \in \mathbb{Z}\Big\},$$
$$x - 1 < \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 1)(x + 1) > 0\}.$$

100. Trovare massimo e minimo dei seguenti insiemi finiti di numeri reali:

$$\left\{\frac{2}{17}, -\frac{14}{19}, \frac{1}{13}, \frac{16}{9}, -\frac{13}{8}, -\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{4}, \sqrt{2}-1, \frac{1}{\sqrt{2}+1}, -\pi\right\},$$
$$\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}, \pi, \sqrt[3]{2}-1, \sqrt{2}\right\}.$$

101. Dire se le seguenti affermazioni sono vere, false o senza senso:

$\max\{-1,0,2\} = \{2\}$, il minimo è minore del minorante,

il maggiorante è maggiore del massimo

il maggiorante è maggiore o uguale del massimo,

il minimo è maggiore o uguale a ogni minorante,

0 è minorante di $\left\{1, 4, \frac{5}{4}\right\}$,

1 è maggiorante di $\{n \in \mathbb{Z} : 3n - 4 < 0\}$,

2 è maggiorante di $\left\{\frac{n+5}{2n+8} : n \in \mathbb{N}\right\}$,

n^2+1 è maggiorante di $\{n^2 : n \in \mathbb{Z}\}$,

un maggiorante è sempre maggiore di un minorante,

$\{-1,-2,0\}$ è minorante di 0,

$\max A \cup B = \max\{\max A, \max B\}$,

$\max A \cap B = \min\{\max A, \max B\}$.

102. Trovare almeno un maggiorante e almeno un minorante dell'insieme $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid 4x^3 + x + \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0\}$.

103. Dimostrare che se $\bar{x}$ è un maggiorante dell'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 0\}$ e se $f(x) \le g(x)$ per ogni x, allora $\bar{x}$ è maggiorante anche di $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) < 0\}$.

104. Tradurre nelle notazioni tipo $\max\{\ldots\}$ o $\inf_{x\in\ldots}\ldots$ le espressioni seguenti e trovarne il valore:

il massimo dell'insieme degli x tali che $x^2 - 3 \le 0$;

l'estremo inferiore degli $x^2 - 3$ al variare di $x \in \mathbb{R}$;

il minimo dei numeri naturali il cui quadrato è minore del fattoriale;

l'estremo superiore degli $x \in \mathbb{R}$ per i quali esiste un $y \in \mathbb{R}$ tale che $x^2 + y^2 < 1$..

105. Trovare massimo, minimo (quando ci sono) ed estremo inferiore e superiore degli insiemi di numeri reali seguenti:

$$\mathbb{Q}, \quad \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z} \wedge n \ge 0\}, \quad \{1/n^2 \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \ge 1\}, \quad [-5, +\infty],$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \wedge x^2 < 2\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x(x-1)(x+1) \ge 0\}, \quad \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x-2}{x-1} \le 0\right\},$$
$$\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x-1}{x^2-x} \le -1\right\}, \quad \left\{\frac{n}{n-1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \wedge n \ge 2\right\}.$$

Esercizi del 22 dicembre 2016

106. (Avanzato) Scrivere un programma con cui studiare "sperimentalmente" la stabilizzazione delle cifre decimali della successione $a_n := (n+1)^2/(2n^2+1)$.

107. (Avanzato) Scrivere un programma con cui studiare "sperimentalmente" la stabilizzazione (o meno) delle cifre decimali della successione $r_n := a_{n+1}/a_n$, dove a_n è definito da $a_1 := 1$, $a_2 := 2$, $a_{n+2} := 3a_{n+1} - a_n$.

108. Tradurre le espressioni seguenti nella notazione $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$:

$$n^2 \to +\infty \text{ per } n \to +\infty,$$
$$\text{il limite di } (\operatorname{sen} x)/x \text{ per } x \text{ che tende a } 0 \text{ è } 1,$$
$$g(x) \text{ tende a } \ell \text{ quando } x \text{ si avvicina a } -\infty$$
$$\text{per } n \text{ che tende a } +\infty,\ n^2 - 2n \to +\infty.$$

109. Verificare che la definizione di limite $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall x \in \operatorname{dom} f :\ x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di N:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{con } N = 1/\varepsilon,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2x} = \frac{1}{2} \quad \text{con } N = 1/(2\varepsilon),$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{con } N = 1/\sqrt{2\varepsilon},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x} = 0 \quad \text{con } N = -\log_2 \varepsilon.$$

110. Verificare che la definizione di limite $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \operatorname{dom} f :\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di δ:

$$\lim_{x\to 2}(x-1) = 1 \quad \text{con } \delta = \varepsilon,$$
$$\lim_{x\to -1}(2x+1) = -1 \quad \text{con } \delta = \varepsilon/2,$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-2x}{x-1} = 2 \quad \text{con } \delta = \varepsilon/2,$$
$$\lim_{x\to 0} 2^x = 1 \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \log_2(1+\varepsilon) & \text{se } \varepsilon \ge 1, \\ \min\{\log_2(1+\varepsilon), -\log_2(1-\varepsilon)\} & \text{se } 0 < \varepsilon < 1. \end{cases}$$

111. Verificare che la definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, cioè $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \operatorname{dom} f :$ $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di δ:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^2} = +\infty \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M \le 0, \\ \sqrt{2/M} & \text{se } M > 0 \end{cases}$$
$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M \le 0, \\ 1/\sqrt{M} & \text{se } M > 0 \end{cases}$$
$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{|x+1|} = +\infty \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M \le 0, \\ 1/M & \text{se } M > 0 \end{cases}$$

112. Verificare che la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, cioè $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall x \in \operatorname{dom} f :\ x > N \Rightarrow f(x) > M$, resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di N:

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \quad \text{con } N = M$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \quad \text{con } N = \begin{cases} \text{non importa quanto,} & \text{se } M < 0, \\ \sqrt{M} & \text{se } M \geq 0 \end{cases}$$

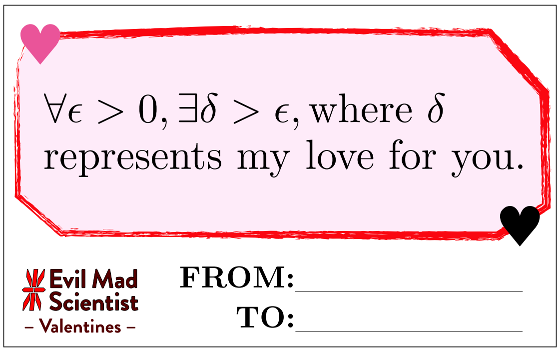
$$\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty \quad \text{con } N = \begin{cases} \text{non importa quanto,} & \text{se } M \leq 0, \\ \log_2 M & \text{se } M > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x+1} = +\infty \quad \text{con } N = \begin{cases} -1/2 & \text{se } M \leq 0, \\ M + \sqrt{M + M^2} & \text{se } M > 0 \end{cases}$$

113. Trovare δ o N appropriati per la definizione di limite nei seguenti casi:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty,$$
$$\lim_{x\to2} |x+1| = 3, \qquad \lim_{x\to0} \sqrt[3]{x} = 0, \qquad \lim_{x\to-1} \max\{x, 1-x\} = 2.$$

114. Analizzare la seguente cartolina di San Valentino:



Esercizi del 12 gennaio 2017

115. Vero, falso, ambiguo o senza senso?

$$-\sqrt{2}^{\,+} < -\sqrt{2}, \qquad 1^- < 0, \qquad -(2^+) = (-2)^+, \qquad 1^+ - (2^+) = (-1)^-,$$
$$(0^-)^2 = 0^+, \qquad ((-2)^-)^2 = 4^-,$$
$$((1-\sqrt{2})^+)^2 - 2(1-\sqrt{2})^+ - 1 = 0^+, \qquad ((-1)^+)^- = -1^+ = (-1)^+, \qquad (a^-)^- = a^+,$$
$$1^- - 1^+ = 1^- + (-1)^- = 0, \qquad a^+ - b^- = (a-b)^+.$$
$$\text{per } x \to -2^- \text{ si ha che } x^2 + 2x = 4^+ - 4^+ = 0^+,$$
$$\text{per } x \to 0^+ \text{ si ha che } x^2 - x = 0^+ - 0^+ = 0^+,$$
$$\text{per } x \to 0^+ \text{ si ha che } x^2 - x^3 = 0^+ - 0^+ = 0^+.$$

116. Supponiamo di sapere che $f(x) \to 0$ per $x \to x_0$, e che non è vero che $f(x) \to 0^+$ per $x \to x_0$. Possiamo concludere che $f(x) \to 0^-$ per $x \to x_0$?

117. Supponiamo di sapere che non esiste né $\lim_{x\to x_0} f(x)$ né $\lim_{x\to x_0} g(x)$. Che dire di $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ e di $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$?

118. Sapendo che le funzioni costanti sono continue, e che la funzione $x \mapsto x$ è continua (cioè tende a x_0 per $x \to x_0$), tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$, e usando le regole su somma, prodotto e quoziente dei limiti, calcolare i limiti seguenti

$$\lim_{x\to 0} 2x, \quad \lim_{x\to 1}(x-1), \quad \lim_{x\to -2}(x^2-1), \quad \lim_{x\to+\infty} -x, \quad \lim_{x\to -1}\frac{x}{x-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3, \quad \lim_{x\to-\infty}(2x-4), \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2+x},$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\Big(1-\frac{1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to+\infty}(x^2-x), \quad \lim_{x\to-\infty} x^3\Big(1+\frac{1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to-\infty}(x^3+x^2),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(1-\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2})}{x(\frac{1}{x}-1)}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+2}{1-x},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x(2+\frac{1}{x})}{(\frac{2}{x}+3)x^2}, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{2x+3x^2}, \quad \lim_{x\to+\infty}\Big(x-\frac{x^2-1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{x^2-x}{x+2}+\frac{x^3+x^2+1}{1-x^2}\Big),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)}{2x(1-2x)}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{2x-4x^2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2(x+3)}{x(1-x)}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x^2}{x-x^2},$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-x}{1+x}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(1-x)(1+x)}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{1-x^2}, \quad \lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)},$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x^3+1}, \quad \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-2)}, \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}, \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x},$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2}, \quad \lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x-1}, \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1},$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}, \quad \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{(x-2)^2}, \quad \lim_{x\to 2^+}\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2}, \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}.$$

Esercizi del 19 gennaio 2017

119. Sapendo che la radice quadrata è continua e che $\sqrt{x}$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x^3-3x}, \quad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}, \quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x+\sqrt{x}}{x-1},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\big), \quad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}\big), \quad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{2x-2}-\sqrt{x+1}\big),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(2+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}\sqrt{2-\frac{1}{x}}}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x\big(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\big)}{x\big(1-\frac{1}{x}\big)}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{x-1},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}\Big(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\Big)}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-2x}\big), \quad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}\big),$$

$$\lim_{x\to-\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-3x}\big), \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

120. Il seguente conto è corretto?

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-\sqrt[3]{8x^6+x^5-1}}{\sqrt{x^4+2x^3}-x^2} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-\sqrt[3]{x^6(8+x^{-1}-x^{-6}}}{(x^4+2x^3)-x^4}\big(\sqrt{x^4+2x^3}+x^2\big) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-x^2\sqrt[3]{8+x^{-1}-x^{-6}}}{2x^3}\big(\sqrt{x^4(1+2x^{-1})}+x^2\big) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-x^2\sqrt[3]{8+0-0}}{2x^3}\big(\sqrt{x^4(1+0)}+x^2\big) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-2x^2}{2x^3}2x^2 = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^4-3x^3+1-4x^4}{x\big(\sqrt{4x^4-3x^3+1}+2x^2\big)} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^3+1}{x\big(\sqrt{x^4(4-3x^{-1}+x^{-4})}+2x^2\big)} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3(-3+x^{-3})}{x\big(x^2\sqrt{4-3x^{-1}+x^{-4}}+x^2\big)} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(-3+0)}{x^2\sqrt{4-0+0}+2x^2} = \frac{-3}{2+2} = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

121. Ricordando che seno e coseno sono sempre compresi fra -1 e 1, e usando il teorema del confronto, calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-\cos x),\quad \lim_{x\to-\infty}(x+\operatorname{sen} x-\cos x),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\operatorname{sen} x}{x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x-1)}{x^2},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\cos(x-1)}{\sqrt{x^4+1}},\quad \lim_{x\to0}\Big(\frac{1}{x^2}+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\Big),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^2+x}{x-2}+\cos(x^3-2^x)\Big),\quad \lim_{x\to-\infty}(x+1)\big(2+\operatorname{sen}\sqrt{x^2-1}\big).$$

122. Ricordando la continuità e i limiti agli estremi delle funzioni esponenziali e logaritmiche, e i limiti di a^x/x^n e $(\ln_a x)/x$ per $x\to+\infty$, oltre alle regole già viste prima, calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}(3^x-x),\quad \lim_{x\to-\infty}2^{x-1},\quad \lim_{x\to+\infty}(5^x-x4^x),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x\log_2 x}{3^x},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{sen} 2^x}{3^x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3^x+1}{x^3-2x+2^x},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3^x-1}{x^2+x-3^x},$$

$$\lim_{x\to0^+}3^{1/x},\quad \lim_{x\to0^-}2^{2/x},\quad \lim_{x\to+\infty}2^x3^{-x+1},\quad \lim_{x\to0}2^{(x-1)/x^2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log_2(x^2-1),\quad \lim_{x\to+\infty}\log_3(3^x-2^x),\quad \lim_{x\to0^+}\frac{\log_2 x}{x},$$

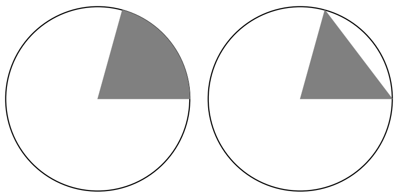
$$\lim_{x\to+\infty}\log_2\frac{1+x}{x-1},\quad \lim_{x\to+\infty}\big(\log_2(x+1)-\log_2 x\big),\quad \lim_{x\to0^+}2^{-\log_2 x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_2\sqrt{x}}{\log_2 x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_2\sqrt{x}}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{(\log_2 x)^2}{x},$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_2(x^2)-\log_2 x}{\log_2 x},\quad \lim_{x\to0^+}\frac{\log_2 x}{1/x},\quad \lim_{x\to+\infty}\log_3(3^x-2^x).$$

123. Ricordando che seno e coseno sono continui, che $(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ e $(1-\cos x)/x^2 \to 1/2$ per $x \to 0$, (più la regola del cambio di variabile, prodotti notevoli, scomposizioni in fattori...), calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x},\quad \lim_{x\to0}\frac{x^2-x}{\operatorname{sen} x},\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(2x-x^2)}{x},\quad \lim_{x\to1}\frac{x-x^2}{\operatorname{sen}(x-1)},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x},\quad \lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x-1},\quad \lim_{x\to+\infty}x\operatorname{sen}\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}x\operatorname{sen}\frac{x-1}{x^2},$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{x-1}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2},\quad \lim_{x\to0}\frac{(\cos 2x)-1}{x^2},\quad \lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^3},\quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^3},$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x(x-2)},\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x},\quad \lim_{x\to0}\frac{x\operatorname{sen} x}{1-\cos^3 x},\quad \lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x+\cos x-2}{x^3-2x}.$$

124. Dimostrare la disuguaglianza $|\operatorname{sen} x| \le |x|$ confrontando le aree del settore circolare e del triangolo in figura:



125. È vero che se $f(x) \to \ell$ allora vale anche l'uguaglianza $\lim(f(x)+g(x)) = \lim(\ell+g(x))$, nel senso che qualora uno dei due membri esista, esiste anche l'altro e sono uguali? Se $f(x) \to \ell$ allora $\lim f(x)g(x) = \lim \ell g(x)$? Se $f(x) \to \ell$ allora $\lim(f(x)g(x)+h(x)) = \lim(\ell g(x)+h(x))$? Se $f(x) \to \ell$ allora $\lim(f(x)+g(x))h(x) = \lim(\ell+g(x))h(x)$? Se $f(x) \to \ell$ allora $\lim(f(x)+g(x))/h(x) = \lim(\ell+g(x))/h(x)$? Se $f(x) \to \ell$ allora $\lim\exp(f(x)+g(x)) = \lim\exp(\ell+g(x))$?

126. Consideriamo il $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{2n}$. Facendo il cambio di variabile $2n = m$ otteniamo $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{2n} = \lim_{m\to+\infty}(-1)^m$. Sappiamo che il $\lim_{m\to+\infty}(-1)^m$ non esiste, perché funzione oscillante. Quindi anche il limite iniziale $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{2n}$ non esiste. Sicuro?

Nel seguito i logatitmi in cui non viene indicata la base si devono assumere in base e, ossia $\log x = \log_e x = \ln x$.

127. Ricordando che esponenziale e logaritmo sono continui, che $(\ln(1+x))/x \to 1$, $(e^x-1)/x \to 1$ per $x \to 0$, (più la regola del cambio di variabile, prodotti notevoli, scomposizioni in fattori, limiti notevoli precedenti...), calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{x},\quad \lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x^2},\quad \lim_{x\to0}\frac{\log(1-x^2)}{x^2+2x^3},\quad \lim_{x\to1}\frac{x-x^2}{\log x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{1-e^x},\quad \lim_{x\to -1}\frac{\log|x|}{x^2-1},\quad \lim_{x\to +\infty} x\log\frac{x+1}{x},\quad \lim_{x\to+\infty} x(1-e^{1/x}),$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 2x)-1}{x\log(x+1)},\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x^2}-1}{x^3},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^3},\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1-\sqrt{x})}{x(x-2)},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{(1-e^x)(1-e^{2x})},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x^2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\log(e+x)}{x^3-2x}.$$

128. Esercizi di ricapitolazione:

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{2^x+x}-\sqrt{2^x-x}\big),\quad \lim_{x\to 1} 2^{1/(x-1)},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2^{1/x}}{2^{1/x}},$$
$$\lim_{x\to+\infty}\big(x^2-\log_2 x+2^{x-1}\big),\quad \lim_{x\to-\infty} 3^x(1-\cos 3^{-x}),\quad \lim_{x\to+\infty} 2^{x+\operatorname{sen} x},$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2+\operatorname{sen}^2 x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\operatorname{sen} x)}{1-\cos x},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\operatorname{sen} x}{x^2-2x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x},\quad \lim_{x\to+\infty}(x^4-2^x+\cos x),$$
$$\lim_{x\to+\infty}\Big(2x-x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}\Big),\quad \lim_{x\to 0}\frac{2x-\operatorname{sen} x\cos x}{1-\cos x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_3(3^x-2^x+x)}{\log_2 x},$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1-\cos\sqrt{x}}{\operatorname{sen} x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1-\operatorname{sen} x)(1-\cos x)}{\operatorname{sen} x}.$$

Dare per noti la continuità di esponenziale e logaritmo, nonché i limiti di $(1+1/x)^x$ per $x\to\pm\infty$; di $(1+x)^{1/x}$, $(\ln(1+x))/x$, $(e^x-1)/x$ per $x\to 0$.

129. Calcolare i seguenti limiti, usando per esempio la formula $a^b = e^{b\ln a}$:

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{1/x},\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{n+2}\Big)^{n-1},\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{n+1}{2n^2+1}\Big)^{n},$$
$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{2n+3}{n^2+1}\Big)^{n/2},\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{2n^2+3}{n^2+1}\Big)^{n/2},\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n^2+3}{n^2+1}\Big)^{n/2},$$
$$\lim_{x\to 0}\big(\ln(e+x)\big)^{1/x},\quad \lim_{x\to 0}\ln\big((e+x)^{1/x}\big),\quad \lim_{x\to 0}\big(1+x+x^2\big)^{1/x},$$
$$\lim_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{1/x},\quad \lim_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{1/x^2},\quad \lim_{x\to 0}\big(\cos x-\operatorname{sen} x\big)^{1/x},$$
$$\lim_{x\to 0}\big(e^x+e^{2x}-1\big)^{1/\operatorname{sen} x},\quad \lim_{x\to 0}\big(2^x+3^x-1\big)^{1/\ln(1+x)},\quad \lim_{x\to 0}\big(e^x+\operatorname{sen} x\big)^{1/x}.$$

130. (Avanzato) È vero che se $f(x)\to\ell$ allora $\lim f(x)^{g(x)} = \lim \ell^{g(x)}$? Se $f(x)\to\ell$ allora $\lim f(x)^{g(x)}h(x) = \lim \ell^{g(x)}h(x)$?

131. (Avanzato) Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} x\big(x-1-\sqrt{x^2-2x}\big),\qquad \lim_{x\to+\infty}\big(x-\sqrt{x^2-2x}\big)^{x}.$$

132. (Avanzato) Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} x\big(-1+\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\big),\qquad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\big)^{x}.$$

133. Definiamo la funzione $f(x)$ così:

$$f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Calcolando $f(x)$ per $x = 1 - \sqrt{2}$ viene

$$f(1-\sqrt{2}) = \lim_{1-\sqrt{2} \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+(1-\sqrt{2})^2}}.$$

O no?

134. Ci proponiamo di calcolare il

$$\lim_{x \to 1} \operatorname{sgn}(x^2 - 2x + 1),$$

dove sgn è la famosa funzione segno ($\operatorname{sgn}(x) = 1$ se $x > 0$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$, $\operatorname{sgn}(x) = -1$ se $x < 0$). Ragioniamo così: se facciamo il cambio di variabile $y = x^2 - 2x + 1$ abbiamo $y \to 0$, e quindi

$$\lim_{x \to 1} \operatorname{sgn}(x^2 - 2x + 1) = \lim_{y \to 0} \operatorname{sgn}(y).$$

Ora dovrebbe essere noto che $\lim_{y \to 0} \operatorname{sgn}(y)$ non esiste (i limiti da sinistra e da destra sono diversi). Concludiamo che anche il limite di partenza $\lim_{x \to 1} \operatorname{sgn}(x^2 - 2x + 1)$ non esiste. O sì? C'è un baco nel ragionamento? Dove?

135. Vero, falso, o senza senso?

$$\lim_{x \to 2x} \frac{x}{x+1} = \frac{2x}{2x+1}, \qquad \lim_{x \to x+1} (x+3)^2 = (x+4)^2,$$

$$\lim_{x+1 \to x^2} \frac{x+1}{1+(x+1)^2} = \frac{x^2}{1+x^4}, \qquad \lim_{x \to f(x)} f(-x) = -f(x),$$

$$\lim_{f(x) \to -x} g(x) = g(-x), \qquad \lim_{f(x) \to 0} x = f^{-1}(0),$$

$$\lim_{x \to y} y = x, \qquad \lim_{x \to y} x = y,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x^4 - 3x^3 + 1} - \sqrt[3]{8x^3 + x^2 - 1}}{2x} = x - 1.$$

136. Dire che la successione reale a_n è strettamente crescente equivale a quali delle seguenti formule?

$$a_n < a_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad n < m \Rightarrow a_n < a_m,$$

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad n \leq m \Rightarrow a_n < a_m,$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < a_{n+1},$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq a_{n-1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq a_{n-1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n-1} < a_{n+1}. \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n-1} < a_n,$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1.$$

137. Sapendo che $a_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ e che $b_n > a_n$ per tutti gli n pari, si può concludere qualcosa sul limite di b_n?

138. (Avanzato) Dando per noto che la successione $a_n := (1+1/n)^n$ è crescente e tende ad e, dimostrare che anche $c_n := (1+\frac{1}{2n})^n$ è crescente e trovarne il limite (osservare che $c_n = \sqrt{a_{2n}}$). Similmente per $d_n := (1+\frac{1}{3n})^{2n}$.

139. (Avanzato). Ricalcando la dimostrazione che la successione $a_n := (1+1/n)^n$ è crescente, dimostrare che anche $c_n := (1+2/n)^n$ è crescente. Dimostrare poi che c_n tende a e^2. (Per il calcolo del limite osservare che $c_{2n} = a_n^2$).

Esercizi del 22 febbraio 2017

140. Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)!} = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)^n}{(2n)!} = 0\,.$$

141. Dimostrare che $\dfrac{n^n}{n!} \geq 2^{(n-1)/2}$. Che limiti si possono dedurre dalla disuguaglianza?

142. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+2)!}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{20^{5n}}{(2n+3)!}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{n^n}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{3^{(n^2)}}.$$

143. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n^2+2n+2}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!+\ln n}{n^n}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+e^n}{n!}.$$

144. Si può scrivere

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \overbrace{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}}^{n \text{ fattori, tutti } >1.}$$

Quindi il limite è $+\infty$. O no?

145. Vero o falso? (Per ogni valore ragionevole delle variabili che renda sensati primo e secondo membro)

$$(n+1)! = n!(n+1), \quad (n+2)! = n! + (n+1)!, \quad (n+m)! = \frac{n!+m!}{2},$$
$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = n^2+n, \quad (n^2)! = (n!)^2.$$

146. Nella formula seguente

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}\cdots\frac{3}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

i primi fattori tendono a 1, mentre gli ultimi tendono a 0 per $n\to+\infty$. Dove comincia esattamente la transizione da 1 a 0? Ci sono dei valori intermedi per il limite?

147. (Avanzato) Consideriamo la successione $a_n = (2n)!/n^n$. Mostrare che vale la relazione ricorsiva

$$a_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot a_n \,.$$

Studiare monotonia e limite della successione.

148. (Avanzato) Consideriamo la successione $a_n = \binom{2n}{n}/n^n$, dove $\binom{n}{k} = n!/(k!(n-k)!)$ è il coefficiente binomiale. Mostrare che vale la relazione ricorsiva

$$a_{n+1} = \frac{4n+2}{(n+1)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot a_n \,.$$

Studiare monotonia e limite della successione.

149. Consideriamo le funzioni x, x^2-2x, $(x-1)(x+1)$, $(\operatorname{sen} x)/x$, $2-2\cos x$, $\log x$, $\log(1/x)$, $1/(x-x^2)$, e^{x^2}, e^{-x+2}, x^x, x^{x+1}, $(x+1)^x$ (e altre inventate sul momento) per $x \to +\infty$. Dire quali di queste sono infinitesime o infinite e metterle in ordine di infinito o infinitesimo crescente. Scrivere tutte le possibili notazioni di Landau che valgono fra queste funzioni.

150. Consideriamo le funzioni x, x^2-2x, $\operatorname{sen} 2x$, $x/\operatorname{sen} x$, $2-2\cos x$, $\log x$, $1/(x-x^2)$, e^{1/x^2}, e^{-1/x^2} (e altre inventate sul momento) per $x \to 0$. Dire quali di queste sono infinitesime o infinite e metterle in ordine di infinito o infinitesimo crescente. Scrivere possibili notazioni di Landau che valgono fra queste funzioni.

Esercizi dell'8 marzo 2017

151. Data una funzione continua f di variabile reale e una successione x_n che converge a $\bar{x}$, tutti nel dominio di f, quali delle seguenti formule hanno senso e sono vere?

$$\lim_{n\to 0} f(x_n) = f(x_0), \qquad \lim_{n\to x_0} f(x_n) = f(x_0), \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to f(\bar{x})} x_n\right),$$
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x_n) = f(n), \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right),$$
$$\lim_{n\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{n}), \qquad \lim_{n\to x} f(n) = f(x), \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\bar{x}),$$
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

152. Quali di queste funzioni sono continue sul loro insieme di definizione? ($\lfloor x \rfloor$ è la parte intera di x per difetto, cioè il massimo intero $\leq x$)

$$x^3-2x, \quad \frac{x+1}{x-1}, \quad \log(-x^2-1), \quad \sqrt{2^x-3}, \quad \frac{|x|}{x}+x, \quad \arctan\frac{1}{x},$$
$$x+(2x+1), \quad \lfloor x\rfloor + x, \quad \operatorname{sgn}(1+x^2), \quad \operatorname{sgn}(1/x), \quad \log(1+\sqrt{x}).$$

153. Tutte le seguenti funzioni sono continue sul loro dominio, eccetto una. Trovarla senza fare calcoli:

$$\frac{\log(1+3^{\tan x})\cos^3(x^2-3x)}{\arctan\sqrt{x}}, \quad x^{1+\sqrt{x}}\exp\Big(1+\frac{\tan x}{\lfloor x\rfloor}\Big), \quad \frac{|x|}{x}+\sqrt[3]{x\log(x+e^x)},$$
$$\cos\Big(\log^{\log x}(\log x)\Big), \quad \frac{x+|x|}{2x^3-|x|}.$$

154. Supponiamo di avere un teorema che dice "sia $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua, allora bla bla bla". Dire se il teorema si applica alle funzioni seguenti:

$$f(x)=\frac{1}{x}, \qquad a=0,\ b=2,$$
$$f(x)=\frac{x}{x^2-x-2}, \qquad a=0,\ b=3,$$
$$f(x)=\sqrt{x}, \qquad a=0,\ b=1,$$
$$f(x)=e^{x+3}, \qquad a=-\infty,\ b=-4,$$
$$f(x)=|x^2-1|, \qquad a=-1,\ b=1,$$
$$f(x)=\frac{x}{|x|}, \qquad a=\sqrt{2},\ b=-1,$$
$$f(x)=\frac{x-1}{|x-1|}, \qquad a=0, b=2,$$
$$f(x)=\operatorname{sgn}(x-2), \qquad a=0,\ b=5.$$

155. Volendo esprimere che f è positiva su tutto $\mathbb{R}$ è corretto scrivere come segue?

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \Big(f(x) \text{ è positiva}\Big).$$

156. Volendo esprimere che f è limitata su tutto $\mathbb{R}$ è corretto scrivere come segue?

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x) \text{ è limitata.}$$

157. Volendo esprimere che f è illimitata superiormente su tutto $\mathbb{R}$ è corretto scrivere come segue?

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x) \text{ è illimitata superiormente.}$$

158. Per dire che la funzione $f(x)=x^2$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ si può scrivere nel modo seguente?

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x) \text{ è continua.}$$

159. Consideriamo la funzione $f(x)=1/(3x-1)$, $a=0$, $b=1$. Si può applicare a questa funzione la procedura iterativa di bisezione, come descritta nella dimostrazione del teorema dell'esistenza degli zeri? I punti a_n, b_n hanno limite? Quale? È uno zero della funzione? Ripercorrendo la dimostrazione, quali passaggi continuano a valere e quali no?

160. Usando il teorema dell'esistenza degli zeri (o quello dei valori intermedi), dimostrare che le seguenti equazioni hanno almeno una soluzione reale:

$$2x^5 - x^2 + 2x - 1 = 0, \quad x + e^x = 0, \quad x + \operatorname{sen} x = 0, \quad x^2 = \cos x.$$

161. Usando il teorema dei valori intermedi, dimostrare che le funzioni seguenti, ciascuna sul proprio dominio, assumono tutti i valori reali:

$$2x^5 - x^2 + 2x - 1, \quad x + e^x, \quad x + \operatorname{sen} x.$$

162. Un alpinista parte alle 8 del mattino per salire a un rifugio. Il giorno dopo riparte dal rifugio alle 8 del mattino e fa lo stesso sentiero nella direzione opposta fino al punto di partenza. Mostrare che esiste (almeno) un punto della strada in cui l'alpinista è passato nei due giorni esattamente alla stessa ora. Il luogo è necessariamente unico?

163. Un gioco per esercitarsi con i numeri in una lingua straniera funziona così: l'insegnante chiede a uno studente, per esempio, quanti abitanti ha New York. Lo studente dice una cifra, e l'insegnante risponde "di più" oppure "di meno", poi ripete la domanda a un altro studente, e così via, finché si arriva alla cifra esatta (tutta la conversazione in lingua straniera, naturalmente). Confrontare questo gioco con la procedura della bisezione nei teoremi dell'esistenza degli zeri o di Weierstraß.

164. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che esistano finiti $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Dimostrare che f è limitata. Ha necessariamente punti di massimo o minimo globale? E se si aggiunge l'ipotesi che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$?

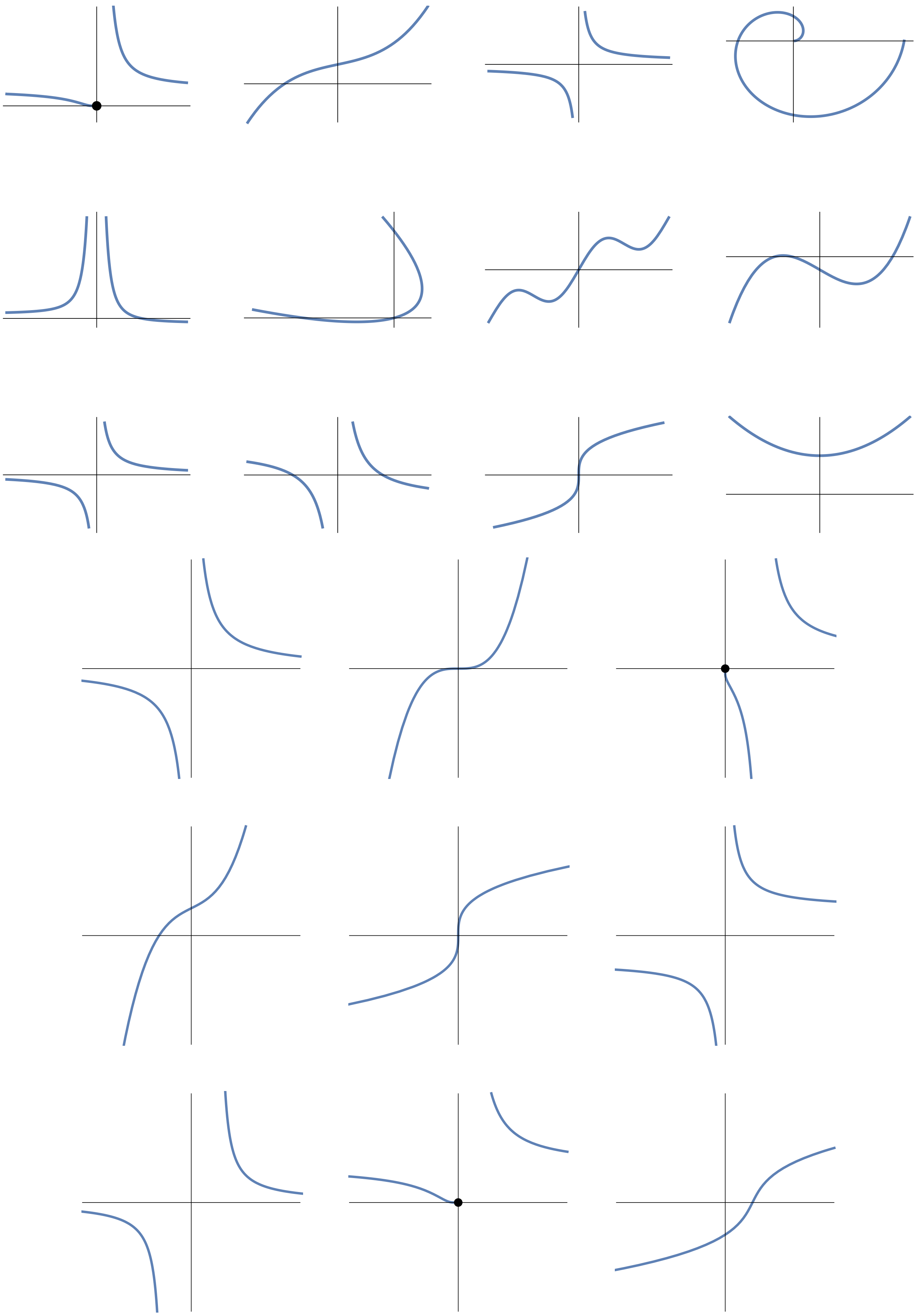
165. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e supponiamo che $f(x) \to 0$ sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$. Dimostrare che esiste almeno un punto di massimo globale per f.

166. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua per la quale i limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ esistono finiti e coincidono. Dimostrare che almeno uno fra il $\sup_{\mathbb{R}} f$ e l'$\inf_{\mathbb{R}} f$ è un valore assunto da f.

167. (Avanzato+) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esista e sia $\leq f(x_0)$ per ogni $x_0 \in [a,b]$. Dimostrare che l'insieme dei valori assunti da f ha massimo. (Ripercorrere la dimostrazione del teorema di Weierstrass, con modifica alla fine).

Esercizi del 28 marzo 2017

168. Per ognuno dei seguenti grafici decidere se si tratta di una funzione, e, qualora lo sia, se è monotona, e di che tipo:



169. (Avanzato). Dimostrare che la somma di due funzioni (strettamente o debolmente) crescenti è crescente. E la somma di due funzioni decrescenti? E la somma di una funzione crescente con una decrescente?

170. (Avanzato). Dimostrare che il prodotto di due funzioni positive crescenti è crescente. E il prodotto di due funzioni negative crescenti? Lo stesso per due funzioni positive decrescenti, o negative decrescenti. E il prodotto di due funzioni crescenti che cambiano segno?

171. (Avanzato). Verificare che per ogni $x, y \geq 0$ con $x \neq y$ si ha $\sqrt{x} - \sqrt{y} = (x-y)/(\sqrt{x} + \sqrt{y})$. Dedurre che la funzione $f(x) := \sqrt{x}$ è strettamente crescente su $[0, +\infty[$.

172. (Avanzato). Consideriamo la funzione $f(x) := x^3/(1+x^2)$. Verificare che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(x) - f(y) = \frac{x^2 + y^2 + (x+y)^2 + 2x^2y^2}{2(1+x^2)(1+y^2)}(x-y)\,.$$

Dedurre che la funzione f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. (Rivisitare questo esercizio dopo aver svolto la teoria delle derivate).

173. Vero o falso?

$$|\operatorname{sen} x| = \sqrt{1 - \cos^2 x}, \quad \operatorname{sen}(x+\pi) = \operatorname{sen} x, \quad \operatorname{sen}(2\pi - x) = -\operatorname{sen} x,$$
$$\forall x \in [-1,1]\colon \operatorname{sen} \operatorname{arcsen} x = x,$$
$$\forall x \in [0,1]\colon \arccos x = \operatorname{arcsen} \sqrt{1-x^2}\big),$$
$$\forall x \in [-1,1]\colon \arccos x = \operatorname{arcsen} \sqrt{1-x^2}, \quad \forall x \in [-\pi,\pi]\colon \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - |x|.$$

174. Trovare l'insieme di definizione delle formule seguenti (quando per i logaritmi non è indicata la base vuol dire che non ha importanza):

$$\operatorname{sen}(1/x), \quad \frac{1}{\operatorname{arcsen} x}, \quad \operatorname{arcsen}(\log_2 x), \quad \arctan(1+x), \quad \arccos\frac{1}{1+x^2},$$
$$\sqrt{x^2+x-6} - \operatorname{arcsen}(3x), \quad \log\big(2 + \operatorname{sen}(1/x)\big), \quad \operatorname{arcsen} 2^{-x}.$$

($\operatorname{arcsen} x$ e $\arccos x$ sono definiti quando $-1 \leq x \leq 1$; $\arctan x$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$).

175. Discutere l'insieme di definizione delle funzioni $f(x) := x\sqrt{x^2-1}$ e $g(x) := \sqrt{-1-x^2} \times \sqrt{-2-2x^2}$, $h(x) := |\sqrt{x}|$. Il problema è se ammettere che nel corso dei calcoli compaiano numeri complessi, anche se il risultato finale è reale.

176. (Avanzato) Dimostrare che l'equazione $x \operatorname{sen} x = \cos x$ ha infinite soluzioni distinte.

177. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $xf(x) \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$. Dimostrare che f ha almeno uno zero.

178. (Avanzato) Considerare la funzione $f(x) := 3x - 1$ su $[a,b] = [0,1]$ e siano $[a_n, b_n]$ gli intervallini prodotti dal metodo di bisezione del teorema dell'esistenza degli zeri. Calcolare esplicitamente a_n, b_n per n da 1 a 3. Mostrare (per induzione) che a_n e b_n sono tutte frazioni con denominatore una potenza di 2. Dedurre che la bisezione non termina in un numero finito di passi.

179. (Avanzato) Considerare la funzione $\cos x$ sull'intervallo $[0, 3\pi]$. Siano $[a_n, b_n]$ gli intervallini prodotti dal metodo di bisezione del teorema dell'esistenza degli zeri. A cosa tendono a_n e b_n per $n \to +\infty$?

180. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x+1) = -f(x)$ per ogni x. Dimostrare che f si annulla in infiniti punti. Conoscete un esempio concreto di una tale funzione f?

181. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) \to +\infty$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$. Dimostrare che esiste almeno un punto di minimo globale per f e che ogni valore maggiore del valore minimo viene assunto in almeno due punti distinti.

182. Può una funzione essere sia debomente crescente che debolmente decrescente? Può essere sia strettamente crescente che strettamente decrescente?

183. Dimostrare che la somma di funzioni crescenti è crescente, e che la somma di funzioni decrescenti è decrescente. Si può dire qualcosa della somma di due funzioni monotone? O della differenza?

184. Il prodotto di due funzioni (de)crescenti è (de)crescente? L'opposto di una funzione monotona è monotona?

185. La composizione di funzioni monotone è monotona?

186. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono monotone, anche $f(x)/g(x)$ è monotona? Che dire di $f(x)^{g(x)}$?

187. Il grafico della funzione $\sqrt{1-x^2}$ è un semicerchio. È una funzione monotona? Ha dei tratti monotoni? Ha dei tratti invertibili? Come sono le inverse di quei tratti invertibili?

188. La funzione $f(x) = x - 1/x$ è monotona per $x > 0$? (Differenza di funzioni monotone...) E' invertibile? Qual'è la formula dell'inversa?

189. E' vero o no che $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$ per ogni x? E' vero o no che $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x$ per ogni x?

190. (Avanzato) Verificare che vale l'uguaglianza

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(\frac{3}{4}b^2 + \left(a + \frac{b}{2}\right)^2\right).$$

Dedurne che $a^3 - b^3$ e $a - b$ hanno sempre lo stesso segno. Dimostrare quindi che la funzione $f(x) := x^3 + x$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$. Mostrare anche che $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, che f è invertibile, e che l'inversa è continua. (Usare il teorema dei valori intermedi e il teorema sull'invertibilità).

191. (Avanzato) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che per ogni $x_0 \in [a,b]$ esista $\delta > 0$ tale che la f è debolmente crescente su $[a,b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Dimostrare che f è debolmente crescente su tutto $[a,b]$.

192. (Avanzato) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua a sinistra in ogni punto, cioè tale che $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ per ogni $x_0 \in \,]a,b]$. La f è necessariamente limitata? (Cosa succede per $x_0 = a$?). E se si aggiunge l'ipotesi che f sia continua (a destra) in $x_0 = a$?

193. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua per la quale i limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ esistono finiti e coincidono. Dimostrare che almeno uno fra il $\sup_{\mathbb{R}} f$ e l'$\inf_{\mathbb{R}} f$ è un valore assunto da f.

194. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := x^2 - 2x$ nel punto generico x_0, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = -1$.

195. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := (x-1)/(x^2+1)$ nel punto $x_0 = 1$ usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Lo stesso per la derivata nel punto generico x_0. Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto $x_0 = 1$.

196. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt{x}$ nel punto generico $x_0 > 0$, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

197. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \log(3x-1)$ nel punto generico $x_0 > 1/3$, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

198. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt[3]{x}$ nel punto generico x_0, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? (Si ricordi che si parla di funzione "derivabile" quando la derivata esiste *finita*). Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2$. (Ricordare il prodotto notevole $(a-b)(a^2+ab+b^2) = \ldots$).

199. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}$ nel punto generico x_0 per il quale $\operatorname{sen} x_0 \neq 0$, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = \pi/3$.

200. (Avanzato) Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+x^2}$ nel punto generico x_0, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

201. Supponiamo che f sia derivabile in x_0 ma g non sia derivabile in x_0 (x_0 sia nel dominio di entrambe). La funzione $f+g$ è non derivabile in x_0?

202. Supponiamo che f e g non siano derivabili in x_0 (x_0 sia nel dominio di entrambe). La funzione $f+g$ è non derivabile in x_0?

203. Volendo esprimere che f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ è corretto scrivere come segue?

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \text{ è derivabile.}$$

204. Calcolare le derivate nel punto generico x delle funzioni seguenti:

$$3x+8, \quad 2+x-\operatorname{sen} x, \quad 5x^2+2x-9, \quad e^x+\cos x, \quad -5x^7+3x^5-6x+1,$$
$$x^2-\log 2, \quad (x-3)\cos\pi, \quad \arctan 2 - x, \quad \frac{\log x}{\log 3}, \quad \log(e-x)$$
$$x\cos x, \quad (\ln x)\operatorname{sen} x, \quad (2-x)\ln x, \quad e^x(\cos x+\operatorname{sen} x), \quad (x+\operatorname{sen} x)\ln x,$$
$$\frac{x+7}{2x-5}, \quad \frac{1}{x^2+3x}, \quad \frac{3x+1}{2x^2-4x-3}, \quad \frac{(x-1)\cos x}{e^x}, \quad e^x-x^e, \quad \frac{2x+\operatorname{sen} x}{5-\cos x}-\frac{5}{x+1},$$
$$\cos(2x-\pi), \quad \tan(1-x^2), \quad (x+e^x)^5, \quad (\operatorname{sen} 2x-\cos 3x)^2, \quad \operatorname{sen}^2\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^2,$$
$$\frac{e^{1-x}+\ln x}{(x+1)^2}, \quad \frac{\tan(1+x)}{x^2+(1-x)^2}, \quad \frac{1-(\ln x)^2}{(2-x)^2}, \quad \Big(\operatorname{sen} x+\frac{e^x+e^{-x}}{1+\operatorname{sen}^2 x}\Big)^2,$$
$$|x|, \quad |x-1|, \quad \operatorname{sen}|x|, \quad |\operatorname{sen} x|, \quad \log|x+1|, \quad |\log(x-1)|\,.$$

205. Posto $f(x)=3x^2-\operatorname{sen} x$, quanto vale $f'(3x^2-\operatorname{sen} x)$?

206. Posto $f(x)=\frac{x}{2x-1}$ dire se è vero o falso che

$$f'\Big(\frac{x}{2x-1}\Big)=\frac{1\cdot(2x-1)-x\cdot 2}{(1-2x)^2}.$$

207. Calcolare la derivata delle seguenti somme di funzioni, specificando anche per quali x siano definite le funzioni e per quali esiste la derivata:

$$\operatorname{sen} x+3^x-\arctan x, \qquad x^4+\operatorname{arcsen} x, \qquad \log x-\cos x+\sqrt{x}\,.$$

208. Calcolare la derivata dei seguenti prodotti di funzioni, specificando anche per quali x siano definite le funzioni e per quali esiste la derivata:

$$x^{3/2}\log x, \qquad \operatorname{sen} x\cos x, \qquad e^x\,\sqrt[3]{x},$$
$$3x^{-1}\operatorname{sen} x\,\log x, \qquad x^2\log x\,\arctan x, \qquad 5^x\operatorname{arcsen} x\,\cos x.$$

209. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni, specificando anche per quali x siano definite le funzioni e per quali esiste la derivata:

$$\frac{1}{x^3}, \qquad \frac{1}{\operatorname{arcsen} x}, \qquad \frac{1}{x^2+\cos x}\,.$$

210. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni razionali, specificando anche per quali x siano definite le funzioni e per quali esiste la derivata:

$$\frac{x+7}{12x-5}, \qquad \frac{x^2+3x-5}{x^2+x-1}, \qquad \frac{5x^2+3x-1}{2-x}.$$
$$\frac{1-2x^2+2x}{x^2-x+1}, \qquad \frac{2-4x^3+6x^6-4x^9+x^{12}}{1-4x^3+6x^6-4x^9+x^{12}}.$$

211. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni composte, specificando anche per quali x siano definite le funzioni e per quali esiste la derivata:

$$(3x+1)^2, \qquad \sqrt{x^2+1}, \qquad \log(2-3x^2), \qquad x \arctan\frac{1}{x}$$

$$(5\log x)^3, \qquad \frac{1}{\arctan(e^x+1)} \qquad 2^{3x+\operatorname{sen} x},$$

$$\operatorname{arcsen}(x^3-1), \qquad \operatorname{sen}(\log(3x+5)), \qquad \frac{e^{3x+1}}{\operatorname{sen}^2 x+4}.$$

212. Data la funzione $f(x) := \arctan(1/x)$, discutere la validità della formula $f'(x) = -1/(1+x^2)$.

213. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni (forma esponenziale), specificando su quale dominio siano definite:

$$x^{\arctan x}, \quad (3x+5)^{\operatorname{sen} x}, \quad \Big(\frac{x+1}{2x+3}\Big)^x, \quad \big(\log(\arctan x)\big)^{1/x}.$$

Esercizi del 4 aprile 2017

214. Consideriamo la funzione f definita dalla tabella seguente:

x	0	1	3/2	2	e	3	π	5	$\sqrt{30}$
$f(x)$	1	4	0	$-2/3$	0	10	4	$-2/3$	3

Discutere la correttezza formale e la verità le seguenti affermazioni (sottintesi sempre massimi e minimi *globali*). (1) Ilmassimo di f è 10. (2) il massimo di f è $\sqrt{30}$. (3) Il punto di massimo di f è 3. (4) Il punto di massimo di f è $\sqrt{30}$. (5) Il minimo di f è 0. (6) Il minimo di f è $-2/3$. (7) I minimi di f sono 2 e 5. (8) Il punto di minimo di f è 2. (9) Il punto di minimo di f è 5. (10) Il punto 2 è un punto di minimo di f. (11) Il punto 5 è un punto di minimo di f. (12) Il massimo di f è $(3, 10)$. (13) Il minimo di f è $(2, -2/3)$. (14) Il punto $(5, -2/3)$ è un punto di minimo di f. (15) I punti $(2, -2/3)$ e $(5, -2/3)$ sono punti di minimo di f. (16) $\max f = 10$. (17) $\max f = 3$. (18) $\max f = (3, 10)$.

215. Calcolare la derivata di $1/(1-|x|)$, $x-|x|$, $|1-x^2$, $x|x^3|$, dove esistono. Si può dividere il conto in casi, oppure usare la formula compatta $D|x| = x/|x|$, o sue varianti.

216. Determinare i massimi e i minimi della funzione $f(x) = x^3 - 2x^2 + |x|$ per $x \in [-1, 1]$ (usando i teoremi di Weierstraß e di Fermat, ma quando possibile senza usare crescenza/decrescenza).

Esercizi dell'11 aprile 2017

217. (Avanzato) Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$ e derivabile su $[a, b]$. Supponiamo che $f(a) \le f((a+b)/2) \ge f(b)$. Dimostrare che esiste almeno un $c \in [a, b]$ tale che $f'(c) = 0$.

218. (Avanzato) Sia I un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile che non sia debolmente monotona. Dimostrare che esiste allora almeno un $c \in I$ tale che $f'(c) = 0$.

219. (Avanzatissimo) Siano $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed $\bar{x}, m \in \mathbb{R}$ tali che

$$0 < \frac{2}{3}m < \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} < \frac{4}{3}m \qquad \forall x \neq \bar{x}.$$

Fissiamo $h > 0$ ed $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \leq \bar{x} \leq x + 2h$. Dimostrare che $f(x) < f(x+h) < f(x+2h)$.

220. (Avanzatissimo) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile su $[a,b]$ e tale che $(f((a+b)/2) - f(a))(f(b) - f((a+b)/2)) \leq 0$. Poniamo $c_0 = a$, $c_1 = (2a+b)/3$, $c_2 = (a+2b)/3$, $c_3 = b$. Mostrare che esiste almeno un $i \in \{0,1\}$ tale che $(f(c_{i+1}) - f(c_i))(f(c_{i+2}) - f(c_{i+1})) \leq 0$. Preso un tale i poniamo $[a_1, b_1] = [c_i, c_{i+2}]$. La situazione di f su $[a,b]$ si ripresenta uguale su $[a_1, b_1]$. Definire per ricorsione $[a_n, b_n]$. Dimostrare che a_n e b_n tendono a un limite $\bar{x} \in [a,b]$ e che $f'(\bar{x}) = 0$. Da questo risultato si può dedurre il teorema di Rolle? (Per dimostrare che $f'(\bar{x})$ non può essere > 0 usare l'esercizio precedente).

221. (Avanzatissimo, riformulazione dell'esercizio precedente) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile (anche agli estremi), e tale che $f(a) = f(b)$. Sia c il punto medio di $[a,b]$. Mostrare che la terna $(f(a), f(c), f(b))$ non è in ordine strettamente monotono (cioè non si ha né che $f(a) < f(c) < f(b)$ né che $f(a) > f(c) > f(b)$). Dividiamo $[a,c]$ e $[c,b]$ ciascuno in due parti uguali con due ulteriori punti di suddivisione $a < c_1 < c < c_2 < b$. Mostrare che almeno una delle tre terne $(f(a), f(c_1), f(c))$, $(f(c_1), f(c), f(c_2))$ e $(f(c), f(c_2), f(b))$ non è in ordine strettamente monotono. Se è la prima poniamo $[a_1, b_1] = [a, c]$, se è la seconda poniamo $[a_1, b_1] = [c_1, c_2]$, altrimenti $[a_1, b_1] = [c, b]$. Dividiamo l'intervallo $[a_1, b_1]$ in quattro parti uguali, e ripetiamo il procedimento, ottenendo un nuovo intervallo $[a_2, b_2]$. e così via. Dimostrare che le successioni a_n, b_n convergono a un punto $\bar{x} \in [a,b]$, e che $f'(\bar{x}) = 0$.

222. Delle funzioni seguenti dire se hanno derivata identicamente nulla, e se sono costanti, e dove (e magari dare un'interpretazione trigonometrica):

$$2\cos^2 \log|x| - \cos\log x^2, \qquad x - \arctan(\tan x), \qquad x - \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$$

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x, \qquad \operatorname{arcsen} x - \operatorname{arcsen}\sqrt{1 - x^2},$$

$$\arctan x - 2\arctan\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}, \qquad \arccos x - 2\arccos\sqrt{\frac{x+1}{2}},$$

$$\arcsin x + 2\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \tan(\arccos x).$$

223. Volendo esplicitare formalmente l'idea che la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente, discutere la correttezza delle seguenti formulazioni:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \text{ è strettamente crescente},$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f \text{ è strettamente crescente in } x,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \text{ è strettamente crescente in } x,$$

$$\forall f(x) \in \mathbb{R} \quad f(x) \text{ è strettamente crescente},$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x > y \Rightarrow f(x) > f(y),$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \leq y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

224. La funzione $f(x) = 1/x$ ha derivata $f'(x) = -1/x^2$, sempre negativa. E' corretto concludere che f è sempre decrescente?

225. (Avanzato). Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile, e supponiamo che $f'(a)$ ed $f'(b)$ siano di segno opposto. Dimostrare che esiste $c \in [a, b]$ tale che $f'(c) = 0$. (Applicare il teorema del massimo/minimo di Weierstrass).

226. (Avanzato). Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile, e supponiamo che $f'(a) > 0$ ed $f'(b) < 0$. Sia $c = (a + b)/2$ il punto medio. Se $f'(c) = 0$ siamo a posto. Se $f'(c) < 0$ scegliamo $[a, c]$. Se $f'(c) > 0$ scegliamo $[c, b]$. E così via per bisezione. Qualora il procedimento non termini in un numero finito di passi, sia x_0 il punto a cui converge. Si ha necessariamente $f'(x_0) = 0$?

227. (Avanzato). Sia I un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione non monotona. Dimostrare che in I esistono tre punti $x_1 < x_2 < x_3$ tali che $f(x_2)$ non è compreso fra $f(x_1)$ e $f(x_3)$ (cioè è maggiore o minore di entrambi). Dimostrare poi che se f è anche derivabile, allora la derivata si annulla in almeno un punto.

228. (Avanzato). Sia I un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su tutto I e tale che $f'(x) > 0$ in tutti i punti x esclusi un numero finito. Dimostrare che f è strettamente crescente su I.

229. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \arctan(2\tan x)$. La derivata è sempre positiva? Possiamo dedurne che $f(0) < f(3\pi/4)$?

230. Trovare, se c'è, una funzione derivabile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non costante tale che $f'(x) > 0$ per ogni x, con $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$.

231. Delle seguenti funzioni trovare il dominio di definizione, studiare il segno della derivata, e dedurne gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo locali e globali:

$$2x^2 - 3x + 4, \qquad x^3 - 2x^2 + x, \qquad \frac{x-1}{x+1}, \qquad \frac{2x-1}{x^2+4x}, \qquad \frac{2-x-x^2}{x+x^2},$$
$$x + \frac{x^2-1}{2x+4}, \qquad 2x^2 + \log(x-1), \qquad \log(x^2+x-1) - 3x,$$
$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}, \qquad \sqrt{x^2+x+1} - \frac{x}{2} + 1, \qquad \sqrt{x-2} - \log(2x+1),$$
$$\log(x+2) - \arctan(x+1), \qquad x - \operatorname{arcsen} x, \qquad \arctan x - \operatorname{arcsen} x,$$
$$2\sqrt{x+1} - \arccos x, \qquad \sqrt{\arctan x}, \qquad \log(\log x), \qquad e^{x^2-2x+3}.$$

232. Calcolare i seguenti limiti, usando eventualmente la regola de L'Hôpital se ritenuto lecito e opportuno:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x) - \log x}{\pi - 2\arctan x}, \qquad \lim_{x\to1^-} \frac{\pi - 2\operatorname{arcsen} x}{1-x}, \qquad \lim_{x\to1^-} \frac{\pi - 2\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x}},$$
$$\lim_{x\to0} \frac{e^{2x} - 2\operatorname{sen} x - 1}{x^2}, \qquad \lim_{x\to0} \frac{3x + \log(1+x^3) - 3\tan x}{1 - \cos x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{e^x+x-1-\operatorname{sen} 2x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x)}{\log(1+x^2)},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(9^x+x^2)}{1+\log(e^{2x}+x)},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e(1-x)^{1/x}-1}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-\tan x}{5-e^{2x}-4\cos x+2\operatorname{sen} x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\sqrt{1+x}+\operatorname{sen} x}{\operatorname{arcsen} x+2\sqrt{1-x}-2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{2e^x+9\sqrt[3]{1-x}+\operatorname{sen} x-11}{\log(1-x)-\log(1+x)+2\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+12\sqrt{x^2-x+1}+5\operatorname{sen}(x-x^2)-13}{(1+\operatorname{sen} x)x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\cos(\operatorname{sen} x)}{1-\cos(x^2)}.$$

233. Consideriamo i limiti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{e^{-2x}-e^{-x}},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\operatorname{sen} x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\operatorname{sen} x}.$$

Sono forme indeterminate? Applicando la regola de L'Hôpital ripetutamente più volte si arriva, prima o poi, a una forma non indeterminata? C'è un'altra via per calcolare il limite?

234. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x-x\cdot\overbrace{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}^{\to 1}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x-x\cdot 1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}=1.$$

Lo stesso limite in un altro modo, usando L'Hôpital più volte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x-\operatorname{sen} x}{x^3}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+1-\cos x}{3x^2}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{6x+\operatorname{sen} x}{6x}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6+\cos x}{6}=\frac{6+1}{6}=\frac{7}{6}.$$

I risultati sono diversi. Ci sono degli sbagli da qualche parte?

Esercizi del 19 aprile 2017

235. Con $y=f(x)$, dire quali di queste espressioni coincide con $f''(x)$:

$$f'(f'(x)),\qquad D(D(f(x)),\qquad f'(D(f(x)),\qquad f'(f'(x)),$$

$$(Df)(f')(x),\quad (f')'(x),\qquad D(f')(x),\qquad y'',\qquad f'(y'),\qquad y'(f'(x))$$

$$\frac{dy^2}{dx^2},\qquad \frac{d^2f(x)}{dx^2},\qquad \frac{df(x)^2}{d^2x},\qquad \frac{d^2f(x)}{d^2x},\qquad \frac{d}{dx}\,\frac{df(x)}{dx}.$$

236. Data $f(x)=1+\sqrt{x}$, la derivata seconda di f in x si scrive come

$$f''(1+\sqrt{x}),\quad f'\Big(\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big),\quad 1+\sqrt{f'(x)},\quad f''\big(f(x)\big),\quad f\big(f''(x)\big),\quad (f')'(x).$$

237. Delle seguenti funzioni studiare il segno della derivata seconda, e dedurne gli intervalli di convessità/concavità e i punti di flesso:

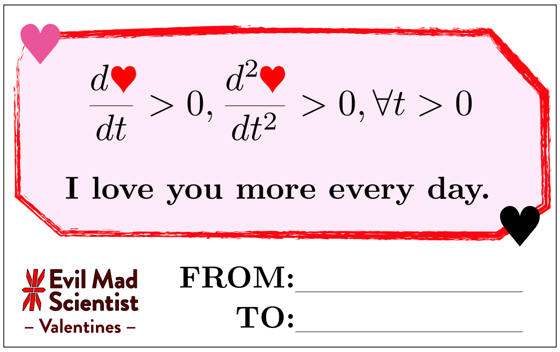
$$2x^2 - 3x + 4, \qquad x^3 - 2x^2 + x, \qquad \frac{x-1}{x+1}, \qquad \frac{2-x-x^2}{x+x^2},$$
$$x + \frac{x^2-1}{2x+4}, \qquad 2x^2 + \log(x-1), \qquad \log(x^2+x-1) - 3x,$$
$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}, \qquad \sqrt{x^2+x+1} - \frac{x}{2} + 1, \qquad \sqrt{x-2} - \log(2x+1),$$
$$x - \operatorname{arcsen} x, \qquad \arctan x - \operatorname{arcsen} x,$$
$$\log(\log x), \qquad e^{x^2-2x+3}.$$

238. Studiare le seguenti funzioni (dagli appelli estivi 2004 e 2005):

$$\frac{x-x^2}{x^2-4x+1}, \qquad \frac{x^2-1}{\sqrt{|5-2x^2|}}, \qquad \frac{3x^2+1}{x(x^2+3)}, \qquad (2+\sqrt{2})x + \ln\left|\frac{(x-1)^2}{1-x\sqrt{2}}\right|,$$
$$x + \log\left|\frac{x-3}{3x+3}\right|, \qquad \frac{(x-1)^3}{x^2-3x+1}, \qquad \frac{(x-1)(x+1)^2}{x^2+x+1}.$$

239. Dimostrare che il polinomio $3x^3 + 7x^2 - 7x - 35$ si annulla in un unico punto di $\mathbb{R}$, e che questo punto è compreso fra 1 e 2.

240. Analizzare la seguente cartolina di San Valentino:



Esercizi del 26 aprile 2017

241. Trovare i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni centrati nei punti x_0 e degli ordini n specificati:

$$e^x, \quad x_0 = 1, \quad n = 3; \qquad \operatorname{sen} x, \quad x_0 = \pi/6, \quad n = 2;$$
$$\frac{x}{1-x}, \quad x_0 = 0, \quad n = 3; \qquad \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad x_0 = 0, \quad n = 4;$$
$$(x-1)e^x, \quad x_0 = 0, \quad n = 4; \qquad \log(1-x), \quad x_0 = 0, \quad n = 3;$$
$$x^2 \cos x, \quad x_0 = 0, \quad n = 5; \qquad \cos(x-x^2), \quad x_0 = 0, \quad n = 3;$$
$$e^x \operatorname{sen} x, \quad x_0 = 0, \quad n = 3; \qquad \sqrt{1+x}, \quad x_0 = 0, \quad n = 3.$$

242. Calcolare i seguenti limiti usando i polinomi di Taylor col resto di Peano (con gli "o piccoli"):

$$\lim_{x\to 0} \frac{2-e^x-\cos x}{\operatorname{sen} x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1+2x-\cos x - 2\operatorname{sen} x}{2-x^2-2\cos x},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^x-x^2-2\cos x-2\operatorname{sen} x}{1-\cos x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-x^2-\cos x-\operatorname{sen} x}{x^3}.$$

243. Sia $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione pari, cioè tale che $f(x)=f(-x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. Sia $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che $g(x)=o(f(x))$ per $x\to 0$. Dimostrare (se è vero) che $g(x)=g(-x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

244. (Avanzato) Se $f_1(x)=o(g_1(x))$ e $f_2(x)=o(g_2(x))$ per $x\to x_0$, allora $f_1(x)f_2(x)=o(g_1(x)g_2(x))$?

245. (Avanzato) Se $f_1(x)=o(g_1(x))$ e $f_2(x)=o(g_2(x))$ per $x\to x_0$, allora $f_1(x)/f_2(x)=o(g_1(x)/g_2(x))$?

246. (Avanzato) Se $f_1(x)=o(g_1(x))$ e $f_2(x)=o(g_2(x))$ per $x\to x_0$, allora $f_1(x)+f_2(x)=o(g_1(x)+g_2(x))$? E se aggiungiamo l'ipotesi che $g_1(x)$ e $g_2(x)$ abbiano sempre lo stesso segno?

247. Data la funzione $f(x)=(1-x)\log(1-x)$, dimostrare che la derivata n-esima per $n\geq 2$ è

$$f^{(n)}(x)=\frac{(n-2)!}{(1-x)^{n-1}}.$$

Dedurne che il polinomio di MacLaurin di f di ordine n è

$$-x+\frac{x^2}{2\cdot 1}+\frac{x^3}{3\cdot 2}+\frac{x^4}{4\cdot 3}+\frac{x^5}{5\cdot 4}+\cdots+\frac{x^n}{n(n-1)}.$$

248. Data la funzione $f(x)=1/(1-x)^2$, dimostrare che la derivata n-esima per $n\geq 0$ è

$$f^{(n)}(x)=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}.$$

Dedurne che il polinomio di MacLaurin di f di ordine n è

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots+(n+1)x^n.$$

249. (Avanzato) Siano f,g due funzioni derivabili n volte, e siano F,G i loro polinomi di MacLaurin di ordine n. Sia poi H il polinomio ottenuto cancellando nel prodotto $F\cdot G$ tutti i monomi di grado $>n$. Dimostrare che H è il polinomio di MacLaurin del prodotto $f\cdot g$.

250. Scrivere la formula di Taylor col resto di Lagrange per la funzione $\operatorname{sen} x$ centrata in $x_0=0$ e di ordine $n=3$ e di ordine $n=4$. Dedurne che

$$\left|\operatorname{sen}\frac{1}{2}-\frac{23}{48}\right|\leq\frac{1}{5!\cdot 2^5}=\frac{1}{3840}.$$

251. (Avanzato). Dimostrare che il coseno di 1 radiante è un numero irrazionale. (Adattare la dimostrazione che il numero di Nepero e è irrazionale).

Esercizi del 16 maggio 2017

252. (Avanzato) Consideriamo l'integrale $\int((2x+1)^2+f(x))dx$. Calcoliamolo in due modi, senza e con l'espansione del quadrato:

$$\int\big((2x+1)^2+f(x)\big)dx = \frac{1}{6}(2x+1)^3+\int f(x)dx,$$
$$\int\big(4x^2+4x+1+f(x)\big)dx = \frac{4}{3}x^3+2x^2+x+\int f(x)dx.$$

Sottraendo membro a membro otteniamo

$$0=\frac{1}{6}(2x+1)^3-\Big(\frac{4}{3}x^3+2x^2+x\Big),$$

da cui, semplificando, $0=1/6$. O no?

253. Vero o falso?

$$\lim_{x\to+\infty}\int f(x)dx=\int\lim_{x\to+\infty}f(x)\,dx,\qquad \frac{d}{dx}\int f(x)dx=\int\frac{d}{dx}f(x)dx.$$

254. Trovare primitive delle seguenti funzioni, cioè funzioni le cui derivate siano le funzioni date:

$$f_1(x)=7x^3-5x^2+3x+2,\qquad f_2(x)=7-2x-5x^7,\qquad f_3(x)=2\operatorname{sen}x-13\cos x,$$
$$f_4(x)=\frac{3x^2-2x+5}{2x^2},\qquad f_5(x)=\frac{5}{1+x^2}-\frac{2}{\cos^2 x},\qquad f_6(x)=\frac{5x^3\sqrt[3]{x}}{7x\sqrt[4]{x}},$$
$$f_7(x)=\frac{4}{\sqrt[3]{x}}-3^x+x^2,\qquad f_8(x)=\frac{5\cos^2 x-3}{\cos^2 x},\qquad f_9(x)=5\cos x+x\sqrt{x}-5,$$
$$f_{10}(x)=2^x+4x^2-12\operatorname{sen}x,\qquad f_{11}(x)=\Big(3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)^2,\qquad f_{12}(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{7}{x}.$$

255. Trovare primitive delle seguenti funzioni:

$$f_{13}(x)=(2x-1)^2,\qquad f_{14}(x)=\cos(3x+4),\qquad f_{15}(x)=5e^{1-5x},$$
$$f_{16}(x)=3\operatorname{sen}x\cos^3 x,\qquad f_{17}(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+1},\qquad f_{18}(x)=\frac{1}{7x+9},$$
$$f_{19}(x)=\frac{2}{\cos^2(2x-1)},\qquad f_{20}(x)=\sqrt{3-4x},\qquad f_{21}(x)=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x},$$
$$f_{22}(x)=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}},\qquad f_{23}(x)=\frac{5}{1+9x^2},\qquad f_{24}(x)=\frac{2\arctan^3 x}{1+x^2}.$$

256. Trovare primitive delle seguenti funzioni utilizzando il metodo per parti:

$$f_{25}(x)=x^2e^x,\qquad f_{26}(x)=x\log(4x),\qquad f_{27}(x)=xe^{-2x},$$
$$f_{28}(x)=e^x\operatorname{sen}(2x),\qquad f_{29}(x)=\arctan x,\qquad f_{30}(x)=(3x^2-2x+1)\cos x,$$
$$f_{31}(x)=x\log^2 x,\qquad f_{32}(x)=(2x^2-x)\log x,\qquad f_{33}(x)=e^{-3x}\operatorname{sen}x.$$

257. Calcolare i seguenti integrali utilizzando la sostituzione suggerita:

$$\int \frac{1}{\sqrt{16x-4x^2-15}}\,dx, \qquad x=\frac{t}{2}+2,$$
$$\int \frac{1}{9x^2-12x+5}\,dx, \qquad x=\frac{t}{3}+\frac{2}{3},$$
$$\int x\sqrt[3]{1+x}\,dx, \qquad x=t^3-1.$$
$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx, \qquad x=\log t,$$
$$\int (\operatorname{arcsen} x)^2 dx, \qquad x=\operatorname{sen} t.$$

258. Calcolare una primitiva della funzione $1/(1+\cos^2 x)$ usando la sostituzione $x=\arctan t$. Calcolare poi l'integrale definito

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2 x}dx,$$

usando il teorema fondamentale del calcolo, discutendo la plausibilità del risultato, tenendo conto che la funzione integranda è positiva.

Esercizi del 20 maggio 2016

259. Trovare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni razionali:

$$f_1(x)=\frac{3}{5x-1}, \qquad f_2(x)=\frac{1}{7-2x}, \qquad f_3(x)=\frac{12x-1}{4x+3}, \qquad f_4(x)=\frac{3-x}{2x+1},$$
$$f_5(x)=\frac{x^2}{x+2}, \qquad f_6(x)=\frac{1}{x^2-6x+5}, \qquad f_7(x)=\frac{1}{4x^2-4x+1},$$
$$f_8(x)=\frac{1}{x^2+x+1}, \qquad f_9(x)=\frac{1}{2x^2-3x+1}, \qquad f_{10}(x)=\frac{1}{x^2+2x+5},$$
$$f_{11}(x)=\frac{2x-1}{x^2-3x+2}, \qquad f_{12}(x)=\frac{3x+1}{(x+2)^2}, \qquad f_{13}(x)=\frac{x+1}{x^2+x+1},$$
$$f_{11}(x)=\frac{x^2}{x^2-5x+4}, \qquad f_{12}(x)=\frac{2x^2-x+1}{x^2+2x+3}, \qquad f_{13}(x)=\frac{x^3}{x^2-1},$$
$$f_{14}(x)=\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)(x+2)}, \qquad f_{15}(x)=\frac{2x^2-x-1}{x^3(x^2+4)}.$$

260. Calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni mediante la sostituzione $t=e^x$

$$f_{17}(x)=\frac{3e^x}{e^{2x}-3e^x+2}, \qquad f_{18}(x)=\frac{2e^{2x}+e^x}{e^{2x}+1}.$$

261. (Avanzato) Ricordando le formule

$$\operatorname{sen} x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

utilizzare la sostituzione

$$x = 2 \arctan t, \quad \text{ovvero} \quad t = \tan \frac{x}{2}\,,$$

per calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni:

$$f_{14}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \qquad f_{15}(x) = \frac{1}{2 \operatorname{sen} x - 5 \cos x + 1},$$
$$f_{16}(x) = \frac{1}{\cos x + 2 \operatorname{sen} x + 1}\,.$$

262. (Avanzato) Ricordando le formule

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}\,,$$

utilizzare la sostituzione

$$x = \arctan t, \quad \text{ovvero} \quad t = \tan x\,,$$

per calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni:

$$f_{17}(x) = \frac{1}{2 + \operatorname{sen}^2 x}, \qquad f_{18}(x) = \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 x - 4 \cos^2 x - 1}\,.$$

263. Poniamo $f(x) = \int e^{3x^2} dx$. Allora

$$f(\sqrt{\log 2}) = \int e^{3 \log 2} d \log 2 = \int 2^3 d\frac{1}{2} = \int 8 d\frac{1}{2}.$$

O no?