Università degli Studi di Udine

Anno Accademico 2014/15

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corsi di Laurea in Informatica e in TWM

Esercizi di Analisi Matematica

Esercizi del 2 ottobre 2014

I connettivi logici che useremo sono $\neg$ la negazione (`not`), $\vee$ la disgiunzione (`or`), $\wedge$ la congiunzione (`and`), $\Rightarrow$ l'implicazione (`if`... `then`...), $\Leftarrow$ l'implicazione inversa, $\iff$ la doppia implicazione o equivalenza (`iff`). Si rammenta la tabella di verità:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftarrow q$	$p \iff q$
vero	vero	falso	vero	vero	vero	vero	vero
vero	falso	falso	falso	vero	falso	vero	falso
falso	vero	vero	falso	vero	vero	falso	falso
falso	falso	vero	falso	falso	vero	vero	vero

1. Supponiamo di sapere che vagono le implicazioni seguenti

$$\begin{array}{ccccccc} p_1 & \Rightarrow & p_2 & \iff & p_3 & \Leftarrow & p_4 \\ \Uparrow & & \Downarrow & & \Uparrow & & \Downarrow \\ p_5 & \Leftarrow & p_6 & & p_7 & & p_8 \end{array}$$

Se p_1 è vero, quali altri sono necessariamente veri? Se p_7 è vero, quali altri sono veri? Se p_4 è vero, quali altri lo sono? E per p_8? E se p_2 è *falso*, quali altri sono falsi?

2. Di ciascuna delle seguenti espressioni dire se hanno o no un valore di verità (vero o falso), e, se sì, quale:

$$1+1=2, \quad 4-1=3, \quad \frac{4}{3}+\frac{1}{4}=\frac{5}{7}, \quad 3-7, \quad 5-4=4-5,$$

$$3-(2-1)=(3-2)-1, \quad \frac{51}{\frac{13}{7}}=\frac{51}{7}\cdot 13, \quad \frac{17}{\frac{9}{7}}=\frac{\frac{17}{9}}{7}, \quad \frac{\;\frac{11}{3}\;}{4},$$

$$\frac{1}{\frac{2}{3}+\frac{2}{5}}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}, \quad \frac{1/2}{3/5}=2\cdot\frac{3}{5}, \quad \frac{3/2}{5/7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}, \quad \frac{3/2}{5/7}=\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{5}, \quad 3-2\geq 1,$$

$$7\geq 4+3, \quad (-1)^5<(-1)^4, \quad -1<3-2<2, \quad 1+2+3+4, \quad \frac{7}{2>1},$$

$$1+1=2\vee 2+2=3, \quad 1-1=2\wedge 2+2=3, \quad 3\geq\pi\vee 3<\pi, \quad 3\geq\pi\wedge 3<\pi,$$

$$7\vee 8-1, \quad \neg(-1), \quad \neg(1>3), \quad 4<2\vee \text{vero}, \quad \text{vero}\wedge 3>4, \quad \text{vero}+1,$$

$$\text{falso}\Rightarrow 1-1, \quad 1+2+3\Rightarrow 1+2+3+4, \quad \text{vero}\Leftarrow\text{falso}, \quad \text{falso}\Rightarrow 1+2=4.,$$

$$2<3 \iff 4=2+2, \quad 2\leq 2\iff 2=2, \quad \text{falso}\iff\text{falso},$$

$$1\in\mathbb{Q}, \quad 1\subset\mathbb{Q}, \quad \frac{2}{3}\in\{\mathbb{R}\}, \quad \{-1\}\in\{\mathbb{Z}\}, \quad \{1,-1/2\}\subset\mathbb{Q},$$

$$-3\in\{-3,-2\}, \quad \{1,-1\}\Rightarrow 0, \quad x+1=x-1\iff x\in\varnothing,$$

$$x^2<0\iff x\in\{\varnothing\}, \quad (x-1)^2\geq 0\iff\mathbb{R}.$$

3. Di ciascuna delle seguenti espressioni discutere se hanno o no un valore di verità (vero o falso) per valori reali generici delle variabili, e, se sì, quale:

$$a+b=b+a, \quad a-b=b-a, \quad a-b=-b+a, \quad (a-2x)^2, \quad \frac{1}{x-y}=\frac{-1}{y-x},$$

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d+e}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{d+e}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d+e}}=\frac{a}{b}\cdot c(d+e), \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d+e}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d+e}{c},$$

$$x^4-2x+1=x\Bigl(x-2+\frac{1}{x}\Bigr), \quad x-2b=\frac{x+2b}{x^2-4b^2},$$

$$3x+1<y \Rightarrow 3x+3<y+2, \quad 3x+1<y \Leftarrow 3x+3<y+2,$$

$$3x\le 2 \iff x\le 2/3, \quad -3x\le 2 \Leftarrow -x\le 2/3, \quad \bigl(x<2\vee x<-1\bigr) \iff x+1<0,$$

$$x>3 \iff 3x>9, \quad \bigl(x>-2\vee x<1\bigr) \iff \text{vero}, \quad \bigl(x<1\wedge x\ge 2\bigr) \iff \text{falso}$$

$$x>0 \iff x^2>0, \quad x>-1 \Rightarrow x^2>(-1)^2, \quad x>1 \Leftarrow x^2>1,$$

$$x>2\vee x<(-1)^2, \quad x^2\ge -x$$

4. Vero, falso, senza senso?

$$-\frac{1+\sqrt{2}}{2}=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\log(1+x)}{x}=\log\frac{(1+x)}{x}, \quad \frac{3+x}{2-\sqrt{x}}\cdot\frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}=\frac{3+x}{4-x}\cdot 2+\sqrt{x},$$

$$\frac{\log(x)}{x}=\log\frac{(x)}{x}, \quad \operatorname{sen}(1-x)(1+x)=\operatorname{sen}(1-x^2), \quad \frac{\cos(a-b)(a+b)}{a+b}=\cos(a-b),$$

$$\frac{\log\Bigl(1+x}{x\Bigr)} \qquad \frac{-1+\sqrt{2}}{2}=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{1+\sqrt{2}}{2}=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{1+\sqrt{2}}{2}=\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\dfrac{a}{b+1}}{a+b+3}\cdot\frac{b}{b+1}=\frac{ab}{a+b+3}.$$

5. Vero, falso, malformato, senza senso?

$$a=b\Rightarrow -b=-a, \quad x^2+2x-3=2 \iff x^2-3=2-2x$$

$$x=2\vee x=1 \quad\Rightarrow\quad (x-2)(x-1)=0,$$

$$\begin{cases}a+b=c\\ a-b=c\end{cases} \quad\Rightarrow\quad a=c, \qquad \begin{cases}a+b=c\\ a-b=c\end{cases} \quad\Leftarrow\quad a=c,$$

$$\begin{cases}a+b=c\\ a-b=c\end{cases} \quad\iff\quad a=c$$

6. Ai tempi delle trasvolate oceaniche, attorno al 1930, fu coniato un motto di cui ho trovato in rete tre versioni. Una è “Chi vola vale, chi non vale non vola, chi vale e non vola è un vile”. Un’altra è “Chi vola vale, chi non vola non vale, chi vale e non vola è un vile”. La terza è “Chi vale vola. Chi vola vale. Chi vale e non vola è un vile!”. Farne l’analisi logica.

Esercizi dell’8 ottobre 2014

7. Nelle espressioni seguenti, si possono cancellare delle coppie di parentesi in modo che rimanga inalterato il valore?

$$-(a+b), \quad 2(a-x), \quad \frac{(ab)+1}{a(b+1)}, \quad \sqrt{(1+\sqrt{2})},$$
$$\frac{x-2}{x^2+3}(x^2-3), \quad (\log x)y, \quad (\cos x^2)2x, \quad (\tan x)-(\tan y), \quad \operatorname{sen} 2(x+\pi),$$
$$2^{(x-y)}, \quad 3^{(x^2)}, \quad (a+2)^{a-2}.$$

8. Al posto dei punti interrogativi inserire il più appropriato fra $=, \Rightarrow, \Leftarrow, \iff$, o niente:

$$\begin{aligned}
x = x^2-1 \quad &? \quad x+1 = x^2,\\
x^2-1 \quad &? \quad (x-1)(x+1),\\
2x-1=\sqrt{2} \quad &? \quad (2x-1)^2=2,\\
x>\sqrt{2} \quad &? \quad x+1>\sqrt{2},\\
2x-1<\sqrt{2} \quad &? \quad (2x-1)^2<2,\\
x<3 \wedge a<1 \quad &? \quad x+a<4,\\
\begin{cases} x<1 \\ 1>y \end{cases} \quad &? \quad x>y,\\
x>2 \vee x<4 \quad &? \quad x>4,\\
2 < x > 4 \quad &? \quad 2 < x < 4,\\
2 < x > 4 \quad &? \quad x > 4,\\
2>x<4 \quad &? \quad x<2,\\
2>x<4 \quad &? \quad x<4,\\
(x^3-2x+5)(3x^2-1)=0 \quad &? \quad (x^3-2x+5)=0 \vee (3x^2-1)=0\\
n^2<0 \quad &? \quad n^2-1<0\\
xy \le ab \quad &? \quad x \le a \wedge y \le b,\\
xy \le ab \quad &? \quad x \le a \vee y \le b,\\
0 \le a = b \quad &? \quad a^2=b^2,\\
0 \le a < b \quad &? \quad a^2<b^2,\\
0 \le a \ge b \quad &? \quad a^2 \ge b^2
\end{aligned}$$

9. Al posto dei punti interrogativi inserire il più appropriato fra $\Rightarrow, \Leftarrow, \iff$, o niente:

$$\begin{aligned}
x \ne y \quad &? \quad y \ne x,\\
x \ne y \ne z \quad &? \quad x \ne z,\\
x \ne y \ \wedge \ z \ne w \quad &? \quad x+z \ne y+w\\
x \ne y \ \wedge \ z = w \quad &? \quad x+z \ne y+w\\
x \ne 0 \quad &? \quad x>0\\
x \ne 0 \quad &? \quad x<0
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rcl}
x \neq 0 & ? & x > 0 \ \vee \ x < 0 \\
x \neq 0 \ \vee \ x \neq 1 & ? & \text{vero} \\
x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 1 & ? & \text{falso} \\
x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 1 & ? & 0 < x < 1 \\
x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 1 & ? & x < 0 \ \vee \ 0 < x < 1 \ \vee \ x > 1
\end{array}
$$

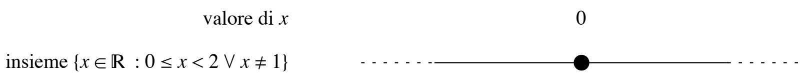
Di seguito diamo degli esempi di come rappresentare graficamente semplici insiemi di numeri reali. Il grafico ha in alto i valori cardine della variabile. In basso i pallini pieni significano punti che appartengono all'insieme, i pallini vuoti sono per punti che non appartengono all'insieme, le linee continue indicano che tutti i loro punti (esclusi forse gli estremi) appartengono all'insieme. Le linee continue che proseguono come tratteggiate si intende che si estendono fino all'infinito.

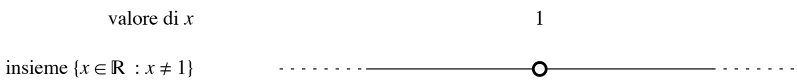
Un modo per indicare un insieme è la forma compatta che non contiene variabili, come per esempio $[0,1[$:

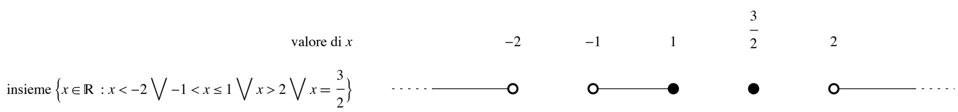
Un'altra notazione è l'insieme degli x reali che verificano certe condizioni, come per esempio $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$:

Un altro modo ancora è l'insieme delle soluzioni di una disequazione, per esempio $0 \leq x < 1$:

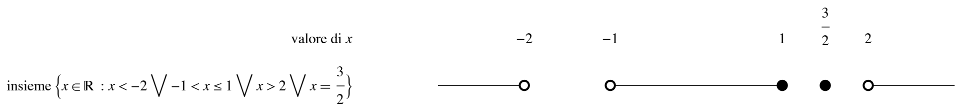
Altri esempi:

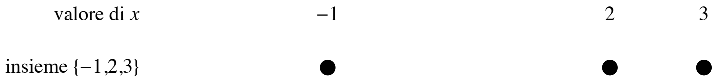






Nel grafico precedente non sono state rispettate le proporzioni delle distanze fra i valori di x. Se serve si possono anche rispettare:





Quando l'insieme è formato da infiniti punti discreti e si rispettano le proporzioni i punti si possono accavallare:

10. Dare una rappresentazione grafica dei seguenti insiemi di numeri reali:

$$\{1,-4\}, \quad \{-1,1\} \cup \{0\}, \quad \{x \mid x < 0\}, \quad \{x \mid x < 0 \vee x = 2\},$$
$$\{x \mid x < -2 \wedge x^2 > 9\}, \quad \{x^2 \mid x < 1\}, \quad \{x - 1 \mid x < 0\},$$
$$\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \{1,2,3,4\}\right\}.$$

11. Vero, falso, malformato?

$$\forall x \in \{0,1,2,3\} \quad x^2 > 1; \qquad \exists x \in \{0,1,2,3\} \text{ tale che } x^2 > 1;$$
$$\exists! x \in \{0,1,2,3\} \text{ tale che } x^2 > 1; \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 + 2n - 1;$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \Rightarrow x > 2; \qquad \exists x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x > 1 \Rightarrow x > 2;$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \Rightarrow x \geq 0; \qquad (\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 0).$$

12. Delle seguenti espressioni dire quali hanno senso compiuto, e in tal caso se sono vere o false o altro:

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x < 0,$$
$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x^2 < 0,$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 \geq 0,$$
$$\forall x < 1,$$
$$\{\forall x < 1\},$$
$$\{\forall x \in \mathbb{R} \mid x > 0\},$$
$$\{x^2 - 1 \mid \forall x \in \mathbb{R}\},$$
$$\{\exists x \mid x^2\},$$
$$\{\nexists x \in \mathbb{R}\}.$$

13. Dare una rappresentazione grafica degli insiemi di numeri reali x che verificano le condizioni seguenti:

$$x < 1 \vee x > 3, \quad x < 1 \wedge x > 3, \quad \neg(x < 0), \quad x < 2 \wedge x = -1,$$
$$x < 1 \Rightarrow 2x < 2, \quad x < 1 \iff x < 0, \quad x > 2 \Rightarrow x^2 > 4, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.$$

14. Sia A l'insieme che comprende i numeri reali > 2 e quelli < -1, e nessun altro. Dire quali dei seguenti insiemi coincidono con A:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \wedge x < -1\}, \qquad \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \vee x < -1\},$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid (x-2)(x+1) > 0\}, \qquad \{(x-2)(x+1) \mid x \in \mathbb{R}, (x-2)(x+1) > 0\},$$
$$]-\infty, -1[\cup]2, +\infty], \qquad]-\infty, -1[\cap]2, +\infty]$$

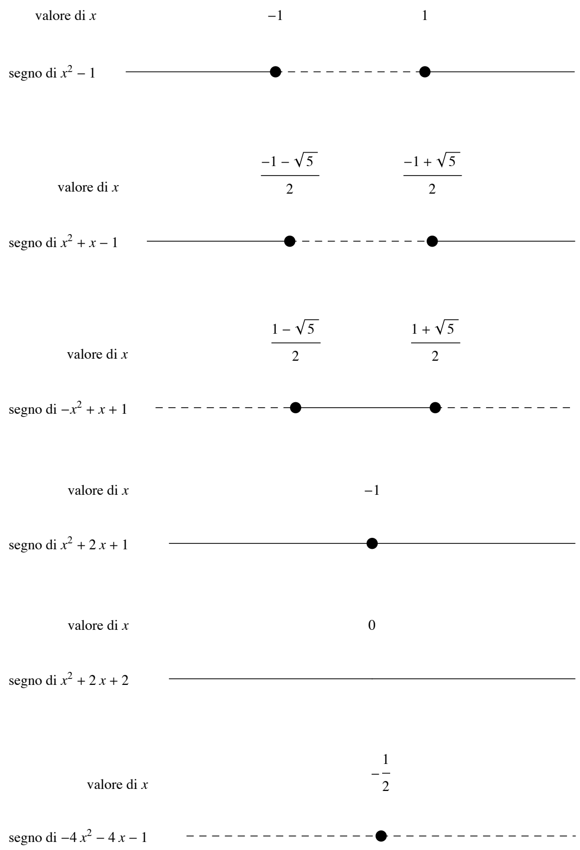
Esercizi del 14 ottobre 2014

15. Usando le regole di base delle disuguaglianze, dimostrare che se $a, b, c > 0$ allora $a/(b + c) < a/b < (a + c)/b$. Cioè se si parte da una frazione positiva, questa aumenta se si aumenta il numeratore, ma cala se si aumenta il denominatore.

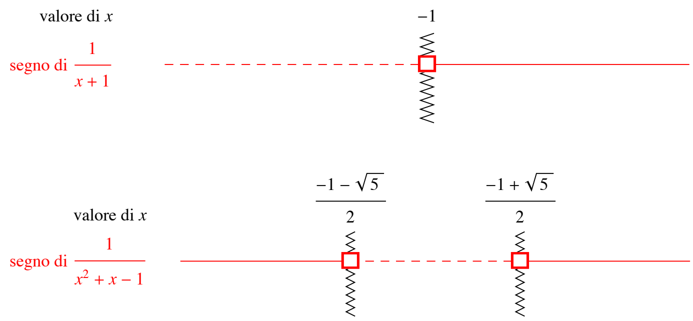
16. Dimostrare che $x/(1 + x^2) \leq x$ quando $x \geq 0$.

17. La sottrazione è commutativa? È associativa? La divisione è commutativa? È associativa? L'elevamento a potenza è commutativo? È associativo? Come vanno interpretate espressioni come $1 - 2 - 3$, $1/2/3$, 2^{3^4}, a/bc?

Quando si chiede di studiare graficamente il segno di un'espressione, bisogna indicare in forma grafica per quali valori della variabile l'espressione è > 0, quando è $= 0$, quando è < 0, ed eventualmente quando non ha senso. La convenzione grafica in questo corso è che i tratti continui indicano zone in cui l'espressione è > 0, tratti tratteggiati zone in cui è < 0, pallini sono punti in cui è $= 0$, e quadratini vuoti e linee a zigzag punti in cui l'espressione non esiste. Sono ammissibili convenzioni diverse, in particolare quella con segni $+$ e $-$ invece di tratti continui o tratteggiati, ma comunque bisogna che ci sia un modo chiaro di indicare quando l'espressione vale 0 o non esiste, cosa che molti studenti non hanno imparato a fare bene alle superiori.
I casi base dello studio del segno sono quando l'espressione è un polinomio di primo o secondo grado. Quando il grado è 1, cioè quando l'espressione è del tipo $mx + q$, si trova dove il polinomio si annulla, e poi in base al coefficiente di x si assegna il



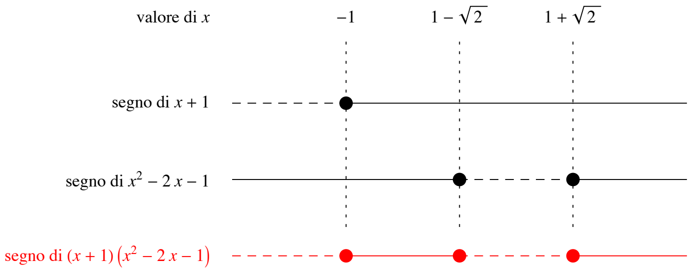
Quando l'espressione è il reciproco di un polinomio di primo o secondo grado, gli zeri del polinomio sono punti di non esistenza dell'espressione. Questi punti si segnalano vistosamente nel grafico con un quadratino vuoto e una linea a zigzag verticale. Per il resto il reciproco ha lo stesso segno del polinomio.



18. Fare lo schema grafico del segno delle espressioni seguenti:

$$x+2, \quad 3x-1, \quad 3-x, \quad 2x^2-3x, \quad (3x-1)^2, \quad x^2-x-2,$$
$$-2x^2+1, \quad 1+2x-x^2, \quad 1/(x-2), \quad \frac{1}{x^2+2x-1}, \quad \frac{1}{2x^2-x-1}.$$

Quando si chiede di studiare il segno di un'espressione che è il prodotto di fattori di primo o secondo grado (o loro reciproci), si applica la regola dei segni. Lo schema grafico riporta il segno dei singoli fattori, e poi il segno risultante.



19. Fare lo schema grafico del segno delle espressioni seguenti:

$$(x^2-2x-1)(2x^2+1),\quad (x+3)(1-3x+x^2),\quad (-2x^2+1)(x^2+x+1),$$
$$\frac{1-2x}{1+2x-x^2},\quad \frac{-2x^2+1}{x^2+x-2},\quad x+2\cdot\frac{x-1}{x+1}.$$

20. Risolvere le disequazioni razionali seguenti:

$$\frac{1}{3+4x}<-1\,,\qquad \frac{6+3x}{6x+1}-\frac{3}{x+5}>0\,,\qquad \frac{x}{3x+4}\geq\frac{5+6x}{3x+4}\,,$$
$$\frac{x-1}{2-x}+\frac{6}{x}\leq 0\,,\qquad \frac{x^2+2x-3}{x^2+1}<0\,,\qquad \frac{2-3x}{1+x}\leq\frac{1+x}{5-x}\,.$$

21. Vero o falso:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad n^2-5n+6\geq 0\,,$$
$$\forall n\in\mathbb{Z}\quad \frac{1-3n}{4n+1}<1\,,$$
$$\exists n\in\mathbb{N}\text{ tale che }\frac{3n^2-2}{2n^2+1}\geq 1\,.$$

22. Risolvere le disequazioni con valori assoluti seguenti:

$$|5+3x|<1\,,\qquad |2-x|\geq 4\,,\qquad |1+4x|-x<0\,,\qquad |x-3|\geq x+1\,,$$
$$-\frac{1}{2}|-2x-6|<0\,,\qquad \frac{|5+3x|}{3x+6}<0\,,\qquad \frac{|6x+1|}{4x+1}>0\,,$$
$$|-1-3x|-4\cdot|x|\leq 2x\,,\qquad 5|x|>-1-2x\,,\qquad \frac{|5x+3|}{2x+5}>\frac{5x+2}{|1+2x|}\,.$$

23. Studiare il segno delle espressioni seguenti, cioè dire per quali x sono positive, negative, nulle:

$$(1-x)(2x^2+x-3)\,,\qquad \frac{1}{3}+\frac{3}{8x+16}-\frac{11}{24(3x-2)}\,,\qquad \frac{4x^2+7x-2}{(5-x)^3}\,,$$
$$1-|x-3|\,,\qquad 1+|x+3|-3|x|\,,\qquad \frac{|3x+1|}{x+4}+\frac{4x+4}{|6+x|}\,,\qquad x^4+x^2-1\,.$$

24. Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} 1+x>0 \\ 2-3x<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x^2+x-1<0 \\ x^2<4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{5+6x}{2x+1} \le \dfrac{3x+2}{6x+6} \\ \dfrac{x}{x+1}<1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \ge |4x+4|-6 \\ x^2-x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (4x-3)|5x+6|<0 \\ \dfrac{1}{x+2}>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5(x-4)<0 \\ |3x+3| \ge 6+5x \\ |x^2+x-1|<1 \end{cases}$$

Esercizi del 23 ottobre 2014

25. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\max\{x,2\}<2x\,, \quad \max\{x,2x\}>1-x\,, \quad \min\{x-1,1-x\} \ge 0\,,$$
$$\min\{x,-2x\}<\max\{1+2x,-1\}\,, \quad \min\big\{x,3|x-1|\big\}<\frac{x}{2}\,.$$

26. Vero o falso? (Per ogni valore reale delle variabili che renda sensata l'espressione).

$$2\max\{x,y\}=\max\{2x,y\}\,, \quad 3\max\{x,y\}=\max\{3x,3y\}\,,$$
$$\min\{x+y,x-y\}=x-y\,, \quad \max\{x/y,y/x\}=(x+y)/(x-y)\,,$$
$$\min\{x,y,z\}=-\max\big\{x,\max\{y,z\}\big\}\,, \quad \max\{x,-y\}=-\min\{-x,y\},$$
$$\min\{-x,-y\}=-\max\{x,y\}, \quad \max\big\{x+z^2,y+z^2\big\}=z^2+\max\{x,y\}\,,$$
$$\max\left\{\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2}\right\}=\frac{1}{\min\{x^2,y^2\}}, \quad x<\min x,y, \quad x \ge \max\{x-1,x+1\}.$$

27. Disegnare il grafico delle funzioni seguenti:

$$f(x):=\max\{x-1,2-x\}, \quad f(x):=\min\{2x,3x+1\},$$
$$f(x):=\max\{1-x,3+x,2\}, \quad f(x):=\min\{x^2-1,2-2x^2\},$$
$$f(x):=x+\max\big\{x,\min\{2x,3x\}\big\}.$$

I due tipi di equazioni irrazionali che abbiamo trattato:

$$\sqrt{A} \ge B \iff \begin{cases} A \ge B^2 \\ B \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B<0 \\ A \ge 0, \end{cases} \qquad \sqrt{A} \le B \iff \begin{cases} A \le B^2 \\ B \ge 0 \\ A \ge 0. \end{cases}$$

28. Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:

$$2x+1<\sqrt{x+2},\quad x+4\le\sqrt{x+1},\quad x+4\le\sqrt{2x+7},\quad 1-2x>\sqrt{x+1},$$
$$x+3<\sqrt{2x^2+20},\quad 4-x>\sqrt{x^2-1},\quad (2-x)\big(\sqrt{x^2-1}-1\big)<0,$$
$$\sqrt{\frac{x^3-2}{x-1}}<x,\quad \begin{cases} x+1\ge\sqrt{x^2-8}\\ 2x<7\end{cases}\qquad \begin{cases} 2x-1\ge\sqrt{3x^2-1}\\ \dfrac{2x+1}{x-1}\ge 0\end{cases}$$

29. (Avanzato) Mostrare che la disuguaglianza $\sqrt{A}+\sqrt{B}\ge C$ è equivalente alla seguente espressione in cui non compaiono radici quadrate:

$$\begin{cases} A\ge 0\\ B\ge 0\\ C<0\end{cases}\quad\vee\quad\begin{cases} A\ge 0\\ B\ge 0\\ C\ge 0\\ C^2-A-B<0\end{cases}\quad\vee\quad\begin{cases} A\ge 0\\ B\ge 0\\ C\ge 0\\ C^2-A-B\ge 0\\ 4AB\ge(C^2-A-B)^2.\end{cases}$$

Si può omettere una delle disuguaglianze del sistema? Come va modificato il sistema se la disuguaglianza di partenza è $\sqrt{A}+\sqrt{B}>C$?

30. (Avanzato) Mostrare che la disuguaglianza $\sqrt{A}+\sqrt{B}\le C$ è equivalente al seguente sistema in cui non compaiono radici quadrate:

$$\begin{cases} A\ge 0\\ B\ge 0\\ C\ge 0\\ C^2-A-B\ge 0\\ 4AB\le(C^2-A-B)^2\end{cases}$$

Si può omettere una delle disuguaglianze del sistema? Come va modificato il sistema se la disuguaglianza è $\sqrt{A}+\sqrt{B}<C$?

31. (Avanzato) Dimostrare che le seguenti uguaglianze sono vere per ogni $x\in\mathbb{R}$, disegnando anche un grafico dei due membri:

$$\max\{x,-x\}=|x|,\quad \max\{x,0\}=\frac{x+|x|}{2},\quad \min\{x,1\}=\frac{x+1-|x-1|}{2},$$
$$\max\{x-1,2-x\}=\left|x-\frac{3}{2}\right|+\frac{1}{2},\quad \min\big\{\max\{x,0\},1\big\}=\frac{2+x+|x|-\big|x-2+|x|\big|}{4}.$$
$$\max\Big\{x-1,-x-1,\min\{1-x,1+x\}\Big\}=\big||x|-1\big|.$$

32. (Avanzato) Stabilire se le disuguaglianze seguenti sono vere o false per via simbolica (elevando al quadrato o al cubo ambo i membri e rimaneggiando, quando lecito, senza calcoli approssimati in virgola mobile):

$$\sqrt{5}<1+\sqrt{2},\quad \sqrt{2}+\sqrt{4}<2\sqrt{3},\quad \sqrt[3]{3}>\sqrt{2},$$
$$\sqrt{1+\sqrt{2}}<\sqrt[3]{2},\quad 1-\sqrt{3}<\sqrt{5}-\sqrt{2}.$$

Esercizi del 30 novembre 2014

Ripasso su esponenziali e logaritmi
Per le disuguaglianze, usare il fatto che quando $a > 1$ valgono le equivalenze $x < y \iff a^x < a^y \iff \log_a x < \log_a y$.

33. Vero o falso? O senza senso?

$$2^{\log_2 3} = 3, \quad 3^{\log_2 3} = 2, \quad \log_2 4 = 2, \quad \log_3(-3)^2 = -3, \quad 3^{\sqrt{2}} < \sqrt{27}, \quad \sqrt{2^x} = 2^{x/2},$$
$$\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}, \quad 5^{\log_2 3} < 5^{\log_2 5}, \quad 6^{\log_2 a} = a3^{\log_2 a}, \quad 3^{1/x} = \frac{1}{3^x},$$
$$\log_2 \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}\log_2 6, \quad \log_a\big(\sqrt{2}+\sqrt{3}\big) = \frac{1}{2}\log_a 2 + \log_a\big(1+\sqrt{3/2}\big),$$
$$\log_a(x^2) = (\log_a x)^2, \quad \log_a b^a = b^{\log_a b}, \quad \log_a(\log_b x) = \log_{ab} x, \quad \log_{ab} x = \frac{\log_a x}{1+\log_a b},$$
$$\log_{-1}(-1)^n = n, \quad \log_0 0 = 1, \quad \log_1 1^2 = 2, \quad \log_{-a} x = \frac{1}{\log_a x},$$
$$\log_{\sqrt{a}}(x) = 2\log_a x, \quad \log_{(a^x)}(x) = \frac{\log_a x}{x}, \quad \log_a(\log_a x) = (\log_a x)^2,$$
$$\frac{\log x}{\log(1+x)} = \log x - \log(1+x).$$

34. Risolvere le disequazioni seguenti:

$$2^x \geq 4^{1-2x}, \quad \sqrt{3^{x+1}} < 9^{x-1}, \quad \log_2 x \leq 3, \quad \sqrt{\log_2 x} < 4,$$
$$\log_2 \sqrt{x} > \sqrt{2}, \quad \log_3(1-x) < \log_3(1+x)\,.$$

35. Studiare il segno delle espressioni seguenti:

$$2^{x+1}(x^2-2x), \quad 3^x - 9^x, \quad (x-2)\log_3(x+1), \quad \frac{\log_2 x - \log_2 x^2}{x-3}.$$

36. Trovare l'insieme di definizione delle formule seguenti (quando per i logaritmi non è indicata la base vuol dire che non ha importanza):

$$2^{1/x}, \quad \log|x|, \quad \log\big(x+\sqrt{x-1}\big), \quad \log x - \log(1-x), \quad \log\frac{x}{1-x},$$
$$\frac{1}{2-3^x}, \quad \log(2-3^x), \quad \frac{1}{\log(2-3^x)},$$
$$\log\big((\log_2 x)^2 - 1\big), \quad \log\big(1-2x+\sqrt{1+x}\big), \quad \sqrt{x+2-\sqrt{x+1}},$$

$$\log\bigl(\min\{x-1, 2-x\}\bigr), \qquad \frac{1}{1-\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

Esercizi del 5 novembre 2014

37. Vero, falso o senza senso?

$$\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 1, \quad \operatorname{sen}^2 x \geq 0, \quad \operatorname{sen}(x^2) \geq 0,$$
$$\cos(x<y), \quad \cos\alpha = \frac{1}{x} \iff \alpha = \frac{1}{\cos x}, \quad \tan x + \tan y = \tan(x+y),$$
$$\cos x \tan x = \operatorname{sen} x, \quad \operatorname{sen}^{-n} x = \frac{1}{\operatorname{sen}^n x}, \arctan^{-1} x = \tan x,$$
$$\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen} y \iff \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y, \quad \operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen} y \Rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y,$$
$$\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen} y \iff x = y.$$

38. Dire quali delle seguenti espressioni sono predicati, nel senso che diventano vere o false a seconda del valore numerico che diamo alla variabile n:

$$(n+1)^2 \geq n+5, \quad \max\{n, n-2, n^2-4n\}, \quad |n^2-4n+1|,$$
$$(n+4>n^2) \Rightarrow n<3, \quad (n-1)/3 \in \mathbb{Z}, \quad \min\{1-n, 2n-4\} \geq 3, \quad n! - n^2.$$

39. Come proseguireste questa sequenza?

$$\begin{aligned}
&1+2\\
&2+3+4\\
&3+4+5+6\\
&4+5+6+7+8\\
&5+6+7+8+9+10
\end{aligned}$$

Come esprimereste il termine generico n-esimo usando la notazione con i puntini "…", oppure con la notazione di sommatoria?

40. Come proseguireste questa sequenza?

$$\begin{aligned}
&1\\
&1^2+2^2\\
&1^3+2^3+3^3\\
&1^4+2^4+3^4+4^4\\
&1^5+2^5+3^5+4^5+5^5
\end{aligned}$$

Come esprimereste il termine generico n-esimo usando la notazione con i puntini "…", oppure con la notazione di sommatoria?

41. Interpretare (quando sensate) le seguenti espressioni contenenti i puntini di sospensione, dire quanti addendi o fattori ci sono, calcolare quanto valgono per $n = 1, 2, 3, 4$, tradurli nella notazione della sommatoria (o produttoria):

$$1+2+3+\cdots+n, \quad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1},$$
$$1+2+3+\cdots+\frac{n}{2}, \quad 1^2+2^2+3^2+\cdots+2^n, \quad 2^1+2^2+2^3+\cdots+n^n,$$
$$n+(n-1)+(n-2)+\cdots, \quad 1^n+2^n+3^n+\cdots+k^n,$$
$$1\cdot 2\cdot 3\cdots n^2>n, \quad 1+2+3+4+\cdots+4+3+2+1,$$
$$1+1+1+\cdots+3, \quad 2n+3n+4n+\cdots+n^2.$$

42. Per ciascuna delle seguenti definizioni calcolare esplicitamente a_0, a_1, a_2, a_3, quando si riesce a dare un senso:

$$a_n := (2n+1)+(2n+2)+(2n+3)+\cdots+(4n-3),$$
$$a_n := \underbrace{n+n+n+\cdots+n}_{n+1 \text{ addendi}},$$
$$a_n := \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}_{n \text{ radici}},$$

43. Riscrivere le seguenti espressioni (quando sensate) usando i puntini "..." invece della sommatoria, e calcolare quanto valgono per $n = 1, 2, 3, 4$:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{2}, \quad \sum_{k=1/2}^{1/8} 2, \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} k^2, \quad \sum_{k=1}^{n^2} k, \quad \sum_{k=n}^{k}(n-k)^2,$$
$$\sum_{k=-n}^{n}(n-k), \quad \sum_{k=\operatorname{sen} n}^{\cos n} \operatorname{arcsen} k, \quad \sum_{k=1}^{4} n^{-k}, \quad \sum_{k=2}^{n}(-k)^n.$$

Esercizi del 12 novembre 2014

44. Dimostrare che per $n \geq 1$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

45. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$

$$1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n2^n = 2+(n-1)2^{n+1}.$$

46. Dimostrare che la disuguaglianza $n! \geq 3^{n-2}$ è induttiva (ereditaria) almeno per $n \geq 2$. Per quali n è vera?

47. Dimostrare che $4 \cdot 5^n \geq 5 \cdot 4^n$ per $n \geq 1$. Verificato poi che $2^n + 4 \cdot 5^n > 4 \cdot 5^n \geq 5 \cdot 4^n > 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n$, dimostrare che

$$2^n + 5^n \geq 3^n + 4^n \qquad \forall n \geq 1.$$

(Per il passo induttivo sommare membro a membro con $2^n + 4 \cdot 5^n \geq 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n$).

48. Dimostrare che $(2n)! > 4^{n-1} n!(n-1)!$ per $n \geq 1$.

49. Dimostrare che $5^n \geq 2^n n^2$ per $n \geq 1$.
(Moltiplicare membro a membro per $5 \geq 2(n+1)^2/n^2$, che è vera per…).

50. (Esercizio avanzato) Trovare delle condizioni sui coefficienti a, b, c (che possono dipendere da x ma non da n) in modo che la formula $P(n)$ seguente

$$1 \cdot x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n = a + (bn + c)x^{n+1}$$

sia ereditaria rispetto a n (cioè $P(n) \Rightarrow P(n+1)$) per $n \geq 1$. Trovare per quali coefficienti $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$. (Scrivere la formula di $P(n+1)$, rimpiazzarne una parte usando $P(n)$, semplificare e imporre che il risultato valga per ogni $n, x \ldots$)

51. (Esercizio avanzato) Trovare delle condizioni sui coefficienti a, b, c, d (indipendenti da n) in modo tale che la formula $P(n)$ seguente

$$1^2 \cdot 2^1 + 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + \cdots + n^2 2^n = a + (bn^2 + cn + d)2^{n+1}$$

sia ereditaria rispetto a n (cioè $P(n) \Rightarrow P(n+1)$) per $n \geq 1$. Trovare per quali coefficienti $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$. (Scrivere la formula di $P(n+1)$, rimpiazzarne una parte usando $P(n)$, semplificare e imporre che il risultato valga per ogni $n \ldots$)

52. Dimostriamo per induzione che $n!$ è un polinomio di grado n nella variabile n. Per $n = 0$ abbiamo $0! = 1$, che è una costante, e quindi un polinomio in n di grado 0. Supponendo che la tesi sia vera per n, abbiamo che $(n+1)!$ è di grado $n+1$, in quanto è il prodotto di $(n+1)$, che ha grado 1, con $n!$ che per ipotesi ha grado n. Si può anche dimostrare senza induzione: cominciando a moltiplicare i fattori $n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$ da sinistra a destra si ottengono successivamente n, $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$, che hanno gradi 1, 2, 3 e così via; quando saremo arrivati all'ultimo fattore avremo il grado n. Tutto chiaro? Il ragionamento fila? Nessuna perplessità?

Esercizi del 27 novembre 2014

53. Rappresentare graficamente gli insiemi seguenti:

$$\{0, \sqrt{2}, \pi\}, \qquad \big\{x^2 : x \in \{-1, 2\}\big\}, \qquad \big\{x \in \mathbb{R} : x^2 \in \{-1, 2\}\big\},$$
$$\{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\}, \qquad \{(-1)^n : n \in \mathbb{Z}\}, \qquad \{n \in \mathbb{Z} : (-1)^n \in \mathbb{N}\},$$
$$\{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 7^2\}, \qquad \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots, 7^2\}, \qquad \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\},$$
$$\{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2\}, \qquad \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots\}.$$

54. Posto $f(x) := x^2 - 2x - 1$ rappresentare graficamente i seguenti insiemi:

$$f\big(\{0\}\big), \quad f\big(\{0,1\}\big), \quad f\big([0,1]\big), \quad f\big(]0,2]\big), \quad f\big(]0,3[\setminus \{2\}\big),$$
$$f\big(]0,3[\big) \setminus \{2\}, \quad f^{-1}\big(\{0\}\big), \quad f^{-1}\big([0,1]\big).$$

55. Vero, falso o senza senso? Rappresentare graficamente i vari insiemi.

$$\frac{2}{3} \text{ è un elemento di } \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\},$$
$$\frac{2}{3} \in \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{n}{n+1} \in \mathbb{N}\right\},$$
$$[0,1] \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x - 4 < 0\},$$
$$[0,1] \subseteq \{x^2 + 2x - 4 : x \in \mathbb{R}, x < 0\},$$
$$[0,1] \Rightarrow [-1,2]$$
$$\frac{n^2-1}{n^2+1} \subseteq \left\{\frac{n^2-1}{n^2+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}\right\},$$
$$x - 1 < \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x+1) > 0\}.$$

56. Trovare massimo e minimo dei seguenti insiemi finiti di numeri reali:

$$\left\{\frac{2}{17}, -\frac{14}{19}, \frac{1}{13}, \frac{16}{9}, -\frac{13}{8}, -\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{4}, \sqrt{2}-1, \frac{1}{\sqrt{2}+1}, -\pi\right\},$$
$$\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}, \pi, \sqrt[3]{2}-1, \sqrt{2}\right\}.$$

57. Dire se le seguenti affermazioni sono vere, false o senza senso:

$\max\{-1,0,2\} = \{2\}$, il minimo è minore del minorante,

il maggiorante è maggiore del massimo

il maggiorante è maggiore o uguale del massimo,

il minimo è maggiore o uguale a ogni minorante,

0 è minorante di $\left\{1, 4, \frac{5}{4}\right\}$,

1 è maggiorante di $\{n \in \mathbb{Z} : 3n - 4 < 0\}$,

2 è maggiorante di $\left\{\frac{n+5}{2n+8} : n \in \mathbb{N}\right\}$,

$n^2 + 1$ è maggiorante di $\{n^2 : n \in \mathbb{Z}\}$,

un maggiorante è sempre maggiore di un minorante,

$\{-1,-2,0\}$ è minorante di 0,

$\max A \cup B = \max\{\max A, \max B\}$,

$\max A \cap B = \min\{\max A, \max B\}$.

58. Tradurre nelle notazioni tipo $\max\{\dots\}$ o $\inf_{x\in\dots}\dots$ le espressioni seguenti e trovarne il valore:

il massimo dell'insieme degli x tali che $x^2-3\le 0$;
l'estremo inferiore degli x^2-3 al variare di $x\in\mathbb{R}$;
il minimo dei numeri naturali il cui quadrato è minore del fattoriale;
l'estremo superiore degli $x\in\mathbb{R}$ per i quali esiste un $y\in\mathbb{R}$ tale che $x^2+y^2<1$..

59. Trovare massimo, minimo (quando ci sono) ed estremo inferiore e superiore degli insiemi di numeri reali seguenti:

$$\mathbb{Q},\quad \{n^2 \mid n\in\mathbb{Z}\wedge n\ge 0\},\quad \{1/n^2 \mid n\in\mathbb{N}\wedge n\ge 1\},\quad [-5,+\infty],$$
$$\{x\in\mathbb{R}\mid x<0\wedge x^2<2\},\quad \{x\in\mathbb{R}\mid x(x-1)(x+1)\ge 0\},\quad \left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;\frac{x-2}{x-1}\le 0\right\},$$
$$\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;\frac{x-1}{x^2-x}\le -1\right\},\quad \left\{\frac{n}{n-1}\;\middle|\;n\in\mathbb{N}\wedge n\ge 2\right\}.$$

Esercizi del 10 dicembre 2014

60. (Avanzato) Scrivere un programma con cui studiare "sperimentalmente" la stabilizzazione delle cifre decimali della successione $a_n := (n+1)^2/(2n^2+1)$.

61. (Avanzato) Scrivere un programma con cui studiare "sperimentalmente" la stabilizzazione (o meno) delle cifre decimali della successione $r_n := a_{n+1}/a_n$, dove a_n è definito da $a_1 := 1$, $a_2 := 2$, $a_{n+2} := 3a_{n+1} - a_n$.

62. Tradurre le espressioni seguenti nella notazione $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$:

$n^2 \to +\infty$ per $n\to+\infty$,
il limite di $(\operatorname{sen} x)/x$ per x che tende a 0 è 1,
$g(x)$ tende a ℓ quando x si avvicina a $-\infty$
per n che tende a $+\infty$, $n^2-2n\to+\infty$.

63. Verificare che la definizione di limite $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{R}\ \forall x\in\operatorname{dom} f:\quad x>N \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di N:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{con } N=1/\varepsilon,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x}=\frac{1}{2} \quad \text{con } N=1/(2\varepsilon),$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{2x^2}=\frac{1}{2} \quad \text{con } N=1/\sqrt{2\varepsilon},$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x}=0 \quad \text{con } N=-\log_2\varepsilon.$$

64. Verificare che la definizione di limite $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \operatorname{dom} f :\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di δ:

$$\lim_{x\to 2}(x-1) = 1 \quad \text{con } \delta = \varepsilon,$$
$$\lim_{x\to -1}(2x+1) = -1 \quad \text{con } \delta = \varepsilon/2,$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2x}{x-1} = 2 \quad \text{con } \delta = \varepsilon/2,$$
$$\lim_{x\to 0} 2^x = 1 \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \log_2(1+\varepsilon) & \text{se } \varepsilon \ge 1, \\ \min\bigl\{\log_2(1+\varepsilon), -\log_2(1-\varepsilon)\bigr\} & \text{se } 0 < \varepsilon < 1. \end{cases}$$

65. Verificare che la definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, cioè $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \operatorname{dom} f :$ $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di δ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^2} = +\infty \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M \le 0, \\ \sqrt{2/M} & \text{se } M > 0 \end{cases}$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2} = +\infty \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M \le 0, \\ 1/\sqrt{M} & \text{se } M > 0 \end{cases}$$
$$\lim_{x\to -1}\frac{1}{|x+1|} = +\infty \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M \le 0, \\ 1/M & \text{se } M > 0 \end{cases}$$

66. Verificare che la definizione di $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, cioè $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall x \in \operatorname{dom} f :\ x > N \Rightarrow f(x) > M$, resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di N:

$$\lim_{x\to +\infty} x = +\infty \quad \text{con } N = M$$
$$\lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{con } N = \begin{cases} \text{non importa quanto,} & \text{se } M < 0, \\ \sqrt{M} & \text{se } M \ge 0 \end{cases}$$
$$\lim_{x\to +\infty} 2^x = +\infty \quad \text{con } N = \begin{cases} \text{non importa quanto,} & \text{se } M \le 0, \\ \log_2 M & \text{se } M > 0 \end{cases}$$
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{2x+1} = +\infty \quad \text{con } N = \begin{cases} -1/2 & \text{se } M \le 0, \\ M + \sqrt{M + M^2} & \text{se } M > 0 \end{cases}$$

67. Trovare δ o N appropriati per la definizione di limite nei seguenti casi:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 2}|x+1| = 3, \qquad \lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x} = 0, \qquad \lim_{x\to -1}\max\{x, 1-x\} = 2.$$

68. Vero, falso o senza senso?

$$1^- < 0, \qquad -(2^+) = (-2)^+, \qquad 1^+ - (2^+) = (-1)^-,$$
$$(0^-)^2 = 0^+, \qquad ((-2)^-)^2 = 4^-,$$
$$((1-\sqrt{2})^+)^2 - 2(1-\sqrt{2})^+ - 1 = 0^+, \qquad ((-1)^+)^- = -1^+ = (-1)^+,$$

Esercizi del 13 gennaio 2015

69. Sapendo che le funzioni costanti sono continue, e che la funzione $x \mapsto x$ è continua (cioè tende a x_0 per $x \to x_0$), tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$, e usando le regole su somma, prodotto e quoziente dei limiti, calcolare i limiti seguenti

$$\lim_{x\to 0} 2x, \quad \lim_{x\to 1}(x-1), \quad \lim_{x\to -2}(x^2-1), \quad \lim_{x\to +\infty} -x, \quad \lim_{x\to -1} \frac{x}{x-1}$$

$$\lim_{x\to -\infty} x^3, \quad \lim_{x\to -\infty}(2x-4), \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x+1}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x^2+x},$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^2\Big(1-\frac{1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to +\infty}(x^2-x), \quad \lim_{x\to -\infty} x^3\Big(1+\frac{1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to -\infty}(x^3+x^2),$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2})}{x(\frac{1}{x}-1)}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-x+2}{1-x},$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x(2+\frac{1}{x})}{(\frac{2}{x}+3)x^2}, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{2x+1}{2x+3x^2}, \quad \lim_{x\to +\infty}\Big(x-\frac{x^2-1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to -\infty}\Big(\frac{x^2-x}{x+2}+\frac{x^3+x^2+1}{1-x^2}\Big),$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x(1+x)}{2x(1-2x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2}{2x-4x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x+3)}{x(1-x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3+3x^2}{x-x^2},$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{-x}{1+x}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(1-x)(1+x)}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{1-x^2}, \quad \lim_{x\to -1} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)},$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x}{x^3+1}, \quad \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-2)}, \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x},$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2}, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1}, \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1},$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}, \quad \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{(x-2)^2}, \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2}, \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}.$$

70. Sapendo che la radice quadrata è continua e che $\sqrt{x}$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to 4} \sqrt{x^3-3x}, \quad \lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+2x}, \quad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x+\sqrt{x}}{x-1},$$

$$\lim_{x\to +\infty}\big(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\big), \quad \lim_{x\to +\infty}\big(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}\big), \quad \lim_{x\to +\infty}\big(\sqrt{2x-2}-\sqrt{x+1}\big),$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x(2+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}\sqrt{2-\frac{1}{x}}}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x\big(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\big)}{x\big(1-\frac{1}{x}\big)}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x-1},$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}\Big(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\Big)}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}},$$

$$\lim_{x\to +\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-2x}\big), \quad \lim_{x\to +\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}\big),$$

$$\lim_{x\to -\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-3x}\big), \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

71. Il seguente conto è corretto?

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-\sqrt[3]{8x^6+x^5-1}}{\sqrt{x^4+2x^3}-x^2} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-\sqrt[3]{x^6(8+x^{-1}-x^{-6}}}{(x^4+2x^3)-x^4}\left(\sqrt{x^4+2x^3}+x^2\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-x^2\sqrt[3]{8+x^{-1}-x^{-6}}}{2x^3}\left(\sqrt{x^4(1+2x^{-1})}+x^2\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-x^2\sqrt[3]{8+0-0}}{2x^3}\left(\sqrt{x^4(1+0)}+x^2\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1}-2x^2}{2x^3}2x^2 = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^4-3x^3+1-4x^4}{x\left(\sqrt{4x^4-3x^3+1}+2x^2\right)} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^3+1}{x\left(\sqrt{x^4(4-3x^{-1}+x^{-4})}+2x^2\right)} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3(-3+x^{-3})}{x\left(x^2\sqrt{4-3x^{-1}+x^{-4}}+x^2\right)} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(-3+0)}{x^2\sqrt{4-0+0}+2x^2} = \frac{-3}{2+2} = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

72. Ricordando che seno e coseno sono sempre compresi fra -1 e 1, e usando il teorema del confronto, calcolare i limiti seguenti:

$$
\lim_{x\to+\infty}(x^2-\cos x), \quad \lim_{x\to-\infty}(x+\operatorname{sen} x-\cos x), \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\operatorname{sen} x}{x},
$$
$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x-1)}{x^2}, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\cos(x-1)}{\sqrt{x^4+1}}, \quad \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right),
$$
$$
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{x-2}+\cos(x^3-2^x)\right), \quad \lim_{x\to-\infty}(x+1)\left(2+\operatorname{sen}\sqrt{x^2-1}\right).
$$

Esercizi del 15 gennaio 2015

73. Ricordando la continuità e i limiti agli estremi delle funzioni esponenziali e logaritmiche, e i limiti di a^x/x^n e $(\ln_a x)/x$ per $x\to+\infty$, oltre alle regole già viste prima, calcolare i seguenti limiti:

$$
\lim_{x\to+\infty}(3^x-x), \quad \lim_{x\to-\infty}2^{x-1}, \quad \lim_{x\to+\infty}(5^x-x4^x), \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x\log_2 x}{3^x},
$$
$$
\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{sen} 2^x}{3^x}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3^x+1}{x^3-2x+2^x}, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3^x-1}{x^2+x-3^x},
$$

$$\lim_{x\to 0^+} 3^{1/x}, \quad \lim_{x\to 0^-} 2^{2/x}, \quad \lim_{x\to+\infty} 2^x 3^{-x+1}, \quad \lim_{x\to 0} 2^{(x-1)/x^2},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_2(x^2-1), \quad \lim_{x\to+\infty} \log_3(3^x-2^x), \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log_2 x}{x},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_2 \frac{1+x}{x-1}, \quad \lim_{x\to+\infty} \big(\log_2(x+1)-\log_2 x\big), \quad \lim_{x\to 0^+} 2^{-\log_2 x},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2\sqrt{x}}{\log_2 x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2\sqrt{x}}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_2 x)^2}{x},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2(x^2)-\log_2 x}{\log_2 x}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log_2 x}{1/x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_3(3^x-2^x).$$

74. Ricordando che seno e coseno sono continui, che $(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ e $(1-\cos x)/x^2 \to 1/2$ per $x \to 0$, (più la regola del cambio di variabile, prodotti notevoli, scomposizioni in fattori...), calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{\operatorname{sen} x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x-x^2)}{x}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x-x^2}{\operatorname{sen}(x-1)},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}, \quad \lim_{x\to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x-1}, \quad \lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}\frac{x-1}{x^2},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{x-1} \operatorname{sen}\frac{1}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(\cos 2x)-1}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^3}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^3},$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{x(x-2)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos^3 x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x+\cos x-2}{x^3-2x}.$$

Esercizi del 21 gennaio 2015

Nel seguito i logatitmi in cui non viene indicata la base si devono assumere in base e, ossia $\log x = \log_e x = \ln x$.

75. Ricordando che esponenziale e logaritmo sono continui, che $(\ln(1+x))/x \to 1$, $(e^x-1)/x \to 1$ per $x \to 0$, (più la regola del cambio di variabile, prodotti notevoli, scomposizioni in fattori, limiti notevoli precedenti...), calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x^2)}{x^2+2x^3}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x-x^2}{\log x},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1-e^x}, \quad \lim_{x\to -1} \frac{\log|x|}{x^2-1}, \quad \lim_{x\to+\infty} x\log\frac{x+1}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} x(1-e^{1/x}),$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos 2x)-1}{x\log(x+1)}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-1}{x^3}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^3}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-\sqrt{x})}{x(x-2)},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(1-e^x)(1-e^{2x})}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-\log(e+x)}{x^3-2x}.$$

76. Esercizi di ricapitolazione:

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{2^x+x}-\sqrt{2^x-x}\big),\quad \lim_{x\to1}2^{1/(x-1)},\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}2^{1/x}}{2^{1/x}},$$
$$\lim_{x\to+\infty}\big(x^2-\log_2 x+2^{x-1}\big),\quad \lim_{x\to-\infty}3^x(1-\cos 3^{-x}),\quad \lim_{x\to+\infty}2^{x+\operatorname{sen}x},$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2+\operatorname{sen}^2x},\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}{x},\quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\operatorname{sen}x)}{1-\cos x},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{2x-\operatorname{sen}x}{x^2-2x},\quad \lim_{x\to0}\frac{1-x^2-\cos x}{\operatorname{sen}^2x},\quad \lim_{x\to+\infty}(x^4-2^x+\cos x),$$
$$\lim_{x\to+\infty}\Big(2x-x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}\Big),\quad \lim_{x\to0}\frac{2x-\operatorname{sen}x\cos x}{1-\cos x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_3(3^x-2^x+x)}{\log_2 x},$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{x+1-\cos\sqrt{x}}{\operatorname{sen}x},\quad \lim_{x\to0}\frac{\cos(x^2)-\cos x}{\operatorname{sen}^2x},\quad \lim_{x\to0}\frac{(1-\operatorname{sen}x)(1-\cos x)}{\operatorname{sen}x}.$$

Dare per noti la continuità di esponenziale e logaritmo, nonché i limiti di $(1+1/x)^x$ per $x\to\pm\infty$; di $(1+x)^{1/x}$, $(\ln(1+x))/x$, $(e^x-1)/x$ per $x\to0$.

77. Calcolare i seguenti limiti, usando per esempio la formula $a^b=e^{b\ln a}$:

$$\lim_{x\to0}(1+\operatorname{sen}x)^{1/x},\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{n+2}\Big)^{n-1},\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{n+1}{2n^2+1}\Big)^n,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{2n+3}{n^2+1}\Big)^{n/2},\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{2n^2+3}{n^2+1}\Big)^{n/2},\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n^2+3}{n^2+1}\Big)^{n/2},$$
$$\lim_{x\to0}\big(\ln(e+x)\big)^{1/x},\quad \lim_{x\to0}\ln\big((e+x)^{1/x}\big),\quad \lim_{x\to0}\big(1+x+x^2\big)^{1/x},$$
$$\lim_{x\to0}\big(\cos x\big)^{1/x},\quad \lim_{x\to0}\big(\cos x\big)^{1/x^2},\quad \lim_{x\to0}\big(\cos x-\operatorname{sen}x\big)^{1/x},$$
$$\lim_{x\to0}\big(e^x+e^{2x}-1\big)^{1/\operatorname{sen}x},\quad \lim_{x\to0}\big(2^x+3^x-1\big)^{1/\ln(1+x)},\quad \lim_{x\to0}\big(e^x+\operatorname{sen}x\big)^{1/x}.$$

78. (Avanzato) Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty}x\big(x-1-\sqrt{x^2-2x}\big),\qquad \lim_{x\to+\infty}\big(x-\sqrt{x^2-2x}\big)^x.$$

79. (Avanzato) Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty}x\big(-1+\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\big),\qquad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\big)^x.$$

80. Definiamo la funzione $f(x)$ così:

$$f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Calcolando $f(x)$ per $x=1-\sqrt{2}$ viene

$$f(1-\sqrt{2})=\lim_{1-\sqrt{2}\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+(1-\sqrt{2})^2}}.$$

O no?

81. Vero, falso, o senza senso?

$$\lim_{x\to 2x} \frac{x}{x+1} = \frac{2x}{2x+1}, \qquad \lim_{x\to x+1} (x+3)^2 = (x+4)^2,$$
$$\lim_{x+1\to x^2} \frac{x+1}{1+(x+1)^2} = \frac{x^2}{1+x^4}, \quad \lim_{x\to f(x)} f(-x) = -f(x),$$
$$\lim_{f(x)\to -x} g(x) = g(-x), \quad \lim_{f(x)\to 0} x = f^{-1}(0),$$
$$\lim_{x\to y} y = x, \quad \lim_{x\to y} x = y,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^4-3x^3+1} - \sqrt[3]{8x^3+x^2-1}}{2x} = x-1.$$

Esercizi del 26 febbraio 2015

82. Dire che la successione reale a_n è strettamente crescente equivale a quali delle seguenti formule?

$$a_n < a_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$
$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad n < m \Rightarrow a_n < a_m,$$
$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad n \le m \Rightarrow a_n < a_m,$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < a_{n+1},$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \le a_{n-1}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \le a_{n-1}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n-1} < a_{n+1}. \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n-1} < a_n,$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1.$$

83. Sapendo che $a_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ e che $b_n > a_n$ per tutti gli n pari, si può concludere qualcosa sul limite di b_n?

84. Dando per noto che la successione $a_n := (1+1/n)^n$ è crescente e tende ad e, dimostrare che anche $c_n := (1+\frac{1}{2n})^n$ è crescente e trovarne il limite (osservare che $c_n = \sqrt{a_{2n}}$). Similmente per $d_n := (1+\frac{1}{3n})^{2n}$.

85. (Avanzato). Ricalcando la dimostrazione che la successione $a_n := (1+1/n)^n$ è crescente, dimostrare che anche $c_n := (1+2/n)^n$ è crescente. Dimostrare poi che c_n tende a e^2. (Per il calcolo del limite osservare che $c_{2n} = a_n^2$).

86. Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)!} = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)^n}{(2n)!} = 0\,.$$

87. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+2)!},\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{20^{5n}}{(2n+3)!},\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{n^n},\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{3^{(n^2)}}.$$

88. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{n^2+2n+2},\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n!+\ln n}{n^n},\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+e^n}{n!}.$$

89. Si può scrivere

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\overbrace{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}}^{n \text{ fattori, tutti } >1.}$$

Quindi il limite è $+\infty$. O no?

90. Vero o falso? (Per ogni valore ragionevole delle variabili che renda sensati primo e secondo membro)

$$(n+1)!=n!(n+1),\quad (n+2)!=n!+(n+1)!,\quad (n+m)!=\frac{n!+m!}{2},$$
$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=n^2+n,\quad (n^2)!=(n!)^2.$$

91. (Avanzato) Consideriamo la successione $a_n=(2n)!/n^n$. Mostrare che vale la relazione ricorsiva

$$a_{n+1}=\frac{2(2n+1)}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\cdot a_n\,.$$

Studiare monotonia e limite della successione.

92. (Avanzato) Consideriamo la successione $a_n=\binom{2n}{n}/n^n$, dove $\binom{n}{k}=n!/(k!(n-k)!)$ è il coefficiente binomiale. Mostrare che vale la relazione ricorsiva

$$a_{n+1}=\frac{4n+2}{(n+1)^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\cdot a_n\,.$$

Studiare monotonia e limite della successione.

93. Consideriamo le funzioni x, x^2-2x, $(x-1)(x+1)$, $(\operatorname{sen}x)/x$, $2-2\cos x$, $\log x$, $\log(1/x)$, $1/(x-x^2)$, e^{x^2}, e^{-x+2}, x^x, x^{x+1}, $(x+1)^x$ (e altre inventate sul momento) per $x\to+\infty$. Dire quali di queste sono infinitesime o infinite e metterle in ordine di infinito o infinitesimo crescente. Scrivere tutte le possibili notazioni di Landau che valgono fra queste funzioni.

Esercizi del 5 marzo 2015

94. Consideriamo le funzioni x, $x^2 - 2x$, $\operatorname{sen} 2x$, $x/\operatorname{sen} x$, $2 - 2\cos x$, $\log x$, $1/(x - x^2)$, e^{1/x^2}, e^{-1/x^2} (e altre inventate sul momento) per $x \to 0$. Dire quali di queste sono infinitesime o infinite e metterle in ordine di infinito o infinitesimo crescente. Scrivere possibili notazioni di Landau che valgono fra queste funzioni.

95. Data una funzione continua f di variabile reale e una successione x_n che converge a $\bar{x}$, tutti nel dominio di f, quali delle seguenti formule hanno senso e sono vere?

$$\lim_{n\to 0} f(x_n) = f(x_0), \qquad \lim_{n\to x_0} f(x_n) = f(x_0), \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to f(\bar{x})} x_n\Big),$$
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x_n) = f(n), \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to+\infty} x_n\Big),$$
$$\lim_{n\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{n}), \qquad \lim_{n\to x} f(n) = f(x), \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\bar{x}),$$
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

96. Quali di queste funzioni sono continue sul loro insieme di definizione? ($\lfloor x \rfloor$ è la parte intera di x, cioè il massimo intero $\leq x$)

$$x^3 - 2x, \quad \frac{x+1}{x-1}, \quad \log(-x^2 - 1), \quad \sqrt{2^x - 3}, \quad \frac{|x|}{x} + x, \quad \arctan\frac{1}{x},$$
$$x + (2x+1), \quad \lfloor x \rfloor + x, \quad \operatorname{sgn}(1 + x^2), \quad \operatorname{sgn}(1/x), \quad \log(1 + \sqrt{x}).$$

97. Supponiamo di avere un teorema che dice "sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, allora bla bla bla". Dire se il teorema si applica alle funzioni seguenti:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad a = 0, b = 2,$$
$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 2}, \qquad a = 0, b = 3,$$
$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad a = 0, b = 1,$$
$$f(x) = e^{x+3}, \qquad a = -\infty, b = -4,$$
$$f(x) = |x^2 - 1|, \qquad a = -1, b = 1,$$
$$f(x) = \frac{x}{|x|}, \qquad a = \sqrt{2}, b = -1,$$
$$f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}, \qquad a = 0, b = 2,$$
$$f(x) = \operatorname{sgn}(x - 2), \qquad a = 0, b = 5.$$

98. Usando il teorema dell'esistenza degli zeri (o quello dei valori intermedi), dimostrare che le seguenti equazioni hanno almeno una soluzione reale:

$$2x^5 - x^2 + 2x - 1 = 0, \quad x + e^x = 0, \quad x + \operatorname{sen} x = 0, \quad x^2 = \cos x.$$

99. Usando il teorema dei valori intermedi, dimostrare che le funzioni assumono tutti i valori reali:

$$2x^5 - x^2 + 2x - 1, \quad x + e^x, \quad x + \operatorname{sen} x.$$

100. Un alpinista parte alle 8 del mattino per salire a un rifugio. Il giorno dopo riparte dal rifugio alle 8 del mattino e fa lo stesso sentiero nella direzione opposta fino al punto di partenza. Mostrare che esiste (almeno) un punto della strada in cui l'alpinista è passato nei due giorni esattamente alla stessa ora. Il luogo è necessariamente unico?

Esercizi del 19 marzo 2015

101. Un gioco per esercitarsi con i numeri in una lingua straniera funziona così: l'insegnante chiede a uno studente, per esempio, quanti abitanti ha New York. Lo studente dice una cifra, e l'insegnante risponde "di più" oppure "di meno", poi ripete la domanda a un altro studente, e così via, finché si arriva alla cifra esatta. Confrontare questo gioco con la procedura della bisezione nei teoremi dell'esistenza degli zeri o di Weierstraß.

102. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che esistano finiti $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Dimostrare che f è limitata. Ha necessariamente punti di massimo o minimo globale? E se si aggiunge l'ipotesi che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$?

103. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e supponiamo che $f(x) \to 0$ sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$. Dimostrare che esiste almeno un punto di massimo globale per f.

104. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua per la quale i limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ esistono finiti e coincidono. Dimostrare che almeno uno fra il $\sup_{\mathbb{R}} f$ e l'$\inf_{\mathbb{R}} f$ è un valore assunto da f.

105. (Avanzato+) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esista e sia $\leq f(x_0)$ per ogni $x_0 \in [a,b]$. Dimostrare che l'insieme dei valori assunti da f ha massimo. (Ripercorrere la dimostrazione del teorema di Weierstrass, con modifica alla fine).

106. Vero o falso?

$$|\operatorname{sen} x| = \sqrt{1-\cos^2 x}, \quad \operatorname{sen}(x+\pi) = \operatorname{sen} x, \quad \operatorname{sen}(2\pi - x) = -\operatorname{sen} x,$$
$$\forall x \in [-1,1]\colon \operatorname{sen}\operatorname{arcsen} x = x,$$
$$\forall x \in [0,1]\colon \arccos x = \operatorname{arcsen} \sqrt{1-x^2}),$$
$$\forall x \in [-1,1]\colon \arccos x = \operatorname{arcsen} \sqrt{1-x^2}, \quad \forall x \in [-\pi,\pi]\colon \arcsin(cosx) = \frac{\pi}{2} - |x|.$$

107. Trovare l'insieme di definizione delle formule seguenti (quando per i logaritmi non è indicata la base vuol dire che non ha importanza):

$$\operatorname{sen}(1/x), \quad \frac{1}{\operatorname{arcsen} x}, \quad \operatorname{arcsen}(\log_2 x), \quad \arctan(1+x), \quad \arccos\frac{1}{1+x^2},$$
$$\sqrt{x^2+x-6} - \operatorname{arcsen}(3x), \quad \log\bigl(2+\operatorname{sen}(1/x)\bigr), \quad \operatorname{arcsen} 2^{-x}.$$

($\operatorname{arcsen} x$ e $\arccos x$ sono definiti quando $-1 \le x \le 1$; $\arctan x$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$).

108. (Avanzato) Dimostrare che l'equazione $x \operatorname{sen} x = \cos x$ ha infinite soluzioni.

109. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $xf(x) \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$. Dimostrare che f ha almeno uno zero.

110. (Avanzato) Considerare la funzione $f(x) := 3x - 1$ su $[a,b] = [0,1]$ e siano $[a_n, b_n]$ gli intervallini prodotti dal metodo di bisezione del teorema dell'esistenza degli zeri. Calcolare esplicitamente a_n, b_n per n da 1 a 3. Mostrare (per induzione) che a_n e b_n sono tutte frazioni con denominatore una potenza di 2. Dedurre che la bisezione non termina in un numero finito di passi.

111. (Avanzato) Considerare la funzione $\cos x$ sull'intervallo $[0, 3\pi]$. Siano $[a_n, b_n]$ gli intervallini prodotti dal metodo di bisezione del teorema dell'esistenza degli zeri. A cosa tendono a_n e b_n per $n \to +\infty$?

112. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x+1) = -f(x)$ per ogni x. Dimostrare che f si annulla in infiniti punti. Conoscete un esempio concreto di una tale funzione f?

113. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) \to +\infty$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$. Dimostrare che esiste almeno un punto di minimo globale per f e che ogni valore maggiore del valore minimo viene assunto in almeno due punti distinti.

114. Può una funzione essere sia debomente crescente che debolmente decrescente? Può essere sia strettamente crescente che strettamente decrescente?

115. Dimostrare che la somma di funzioni crescenti è crescente, e che la somma di funzioni decrescenti è decrescente. Si può dire qualcosa della somma di due funzioni monotone? O della differenza?

116. Il prodotto di due funzioni (de)crescenti è (de)crescente? L'opposto di una funzione monotona è monotona?

117. La composizione di funzioni monotone è monotona?

118. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono monotone, anche $f(x)/g(x)$ è monotona? Che dire di $f(x)^{g(x)}$?

119. Il grafico della funzione $\sqrt{1-x^2}$ è un semicerchio. È una funzione monotona? Ha dei tratti monotoni? Ha dei tratti invertibili? Come sono le inverse di quei tratti invertibili?

120. La funzione $f(x) = x - 1/x$ è monotona per $x > 0$? (Differenza di funzioni monotone...) E' invertibile? Qual'è la formula dell'inversa?

121. E' vero o no che $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$ per ogni x? E' vero o no che $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x$ per ogni x?

122. (Avanzato) Verificare che vale l'uguaglianza

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(\frac{3}{4}b^2 + \left(a + \frac{b}{2}\right)^2\right).$$

Dedurne che $a^3 - b^3$ e $a - b$ hanno sempre lo stesso segno. Dimostrare quindi che la funzione $f(x) := x^3 + x$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$. Mostrare anche che $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, che f è invertibile, e che l'inversa è continua. (Usare il teorema dei valori intermedi e il teorema sull'invertibilità).

123. (Avanzato) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che per ogni $x_0 \in [a,b]$ esista $\delta > 0$ tale che la f è debolmente crescente su $[a,b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Dimostrare che f è debolmente crescente su tutto $[a,b]$.

124. (Avanzato) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione che è continua a sinistra in ogni punto, cioè $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ per ogni x_0. La f è necessariamente limitata? (Cosa succede per $x_0 = a$?). E se si aggiunge l'ipotesi che f sia continua in $x_0 = a$?

125. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua per la quale i limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ esistono finiti e coincidono. Dimostrare che almeno uno fra il $\sup_{\mathbb{R}} f$ e l'$\inf_{\mathbb{R}} f$ è un valore assunto da f.

126. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := x^2 - 2x$ nel punto generico x_0, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = -1$.

127. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := (x-1)/(x^2+1)$ nel punto $x_0 = 1$ usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Lo stesso per la derivata nel punto generico x_0. Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto $x_0 = 1$.

Esercizi del 26 marzo 2015

128. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt{x}$ nel punto generico $x_0 > 0$, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

129. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \log(3x - 1)$ nel punto generico $x_0 > 1/3$, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

130. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt[3]{x}$ nel punto generico x_0, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? (Si ricordi che si parla di funzione "derivabile" quando la derivata esiste *finita*). Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2$. (Ricordare il prodotto notevole $(a-b)(a^2+ab+b^2) = \ldots$).

131. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}$ nel punto generico x_0 per il quale $\operatorname{sen} x_0 \neq 0$, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = \pi/3$.

132. (Avanzato) Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+x^2}$ nel punto generico x_0, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

133. Supponiamo che f sia derivabile in x_0 ma g non sia derivabile in x_0 (x_0 sia nel dominio di entrambe). La funzione $f+g$ è non derivabile in x_0?

134. Supponiamo che f e g non siano derivabili in x_0 (x_0 sia nel dominio di entrambe). La funzione $f+g$ è non derivabile in x_0?

135. Calcolare le derivate nel punto generico x delle funzioni seguenti:

$$
\begin{gathered}
3x+8, \quad 2+x-\operatorname{sen} x, \quad 5x^2+2x-9, \quad e^x+\cos x, \quad -5x^7+3x^5-6x+1, \\
x^2-\log 2, \quad (x-3)\cos\pi, \quad \arctan 2 - x, \quad \frac{\log x}{\log 3}, \\
x\cos x, \quad (\ln x)\operatorname{sen} x, \quad (2-x)\ln x, \quad e^x(\cos x+\operatorname{sen} x), \quad (x+\operatorname{sen} x)\ln x, \\
\frac{x+7}{2x-5}, \quad \frac{1}{x^2+3x}, \quad \frac{3x+1}{2x^2-4x-3}, \quad \frac{(x-1)\cos x}{e^x}, \quad \frac{2x+\operatorname{sen} x}{5-\cos x} - \frac{5}{x+1}, \\
\cos(2x-\pi), \quad \tan(1-x^2), \quad (x+e^x)^5, \quad (\operatorname{sen} 2x - \cos 3x)^2, \quad \operatorname{sen}^2\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^2, \\
\frac{e^{1-x}+\ln x}{(x+1)^2}, \quad \frac{\tan(1+x)}{x^2+(1-x)^2}, \quad \frac{1-(\ln x)^2}{(2-x)^2}, \quad \Big(\operatorname{sen} x + \frac{e^x+e^{-x}}{1+\operatorname{sen}^2 x}\Big)^2, \\
|x|, \quad |x-1|, \quad \operatorname{sen}|x|, \quad |\operatorname{sen} x|, \quad \log|x+1|, \quad |\log(x-1)|\,.
\end{gathered}
$$

136. Posto $f(x) = 3x^2 - \operatorname{sen} x$, quanto vale $f'(3x^2 - \operatorname{sen} x)$?

137. Posto $f(x) = \frac{x}{2x-1}$ dire se è vero o falso che

$$
f'\Big(\frac{x}{2x-1}\Big) = \frac{1\cdot(2x-1) - x\cdot 2}{(1-2x)^2}.
$$

Esercizi del 1 aprile 2015

138. Calcolare la derivata delle seguenti somme di funzioni, specificando su quale dominio siano definite:

$$f_1(x) = \operatorname{sen} x + 3^x - \arctan x, \qquad f_2(x) = x^4 + \operatorname{arcsen} x, \qquad f_3(x) = \log x - \cos x + \sqrt{x}\,.$$

139. Calcolare la derivata dei seguenti prodotti di funzioni, specificando su quale dominio siano definite:

$$f_4(x) = x^{3/2}\log x, \qquad f_5(x) = \operatorname{sen} x \cos x, \qquad f_6(x) = e^x\,\sqrt[3]{x},$$
$$f_7(x) = 3x^{-1}\operatorname{sen} x\,\log x, \qquad f_8(x) = x^2\log x\,\arctan x, \qquad f_9(x) = 5^x\operatorname{arcsen} x\,\cos x.$$

140. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni, specificando su quale dominio siano definite:

$$f_{10}(x) = \frac{1}{x^3}, \qquad f_{11}(x) = \frac{1}{\operatorname{arcsen} x}, \qquad f_{12}(x) = \frac{1}{x^2 + \cos x}\,.$$

141. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni razionali, specificando (dove fattibile) su quale dominio siano definite:

$$f_{13}(x) = \frac{x+7}{12x-5}, \qquad f_{14}(x) = \frac{x^2+3x-5}{x^2+x-1}, \qquad f_{15}(x) = \frac{5x^2+3x-1}{2-x}.$$
$$f_{16}(x) = \frac{1-2x^2+2x}{x^2-x+1}, \qquad f_{17}(x) = \frac{2-4x^3+6x^6-4x^9+x^{12}}{1-4x^3+6x^6-4x^9+x^{12}}.$$

142. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni composte, specificando su quale dominio siano definite:

$$f_{18}(x) = (3x+1)^2, \qquad f_{19}(x) = \sqrt{x^2+1}, \qquad f_{20}(x) = \log(2-3x^2),$$
$$f_{21}(x) = (5\log x)^3, \qquad f_{22}(x) = \frac{1}{\arctan(e^x+1)} \qquad f_{23}(x) = 2^{3x+\operatorname{sen} x},$$
$$f_{24}(x) = \operatorname{arcsen}(x^3-1), \qquad f_{25}(x) = \operatorname{sen}(\log(3x+5)), \qquad f_{26}(x) = \frac{e^{3x+1}}{\operatorname{sen}^2 x + 4}.$$

143. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni (forma esponenziale), specificando su quale dominio siano definite:

$$f_{27}(x) = x^{\arctan x}, \qquad f_{28}(x) = (3x+5)^{\operatorname{sen} x},$$
$$f_{29}(x) = \Big(\frac{x+1}{2x+3}\Big)^x, \qquad f_{30}(x) = \big(\log(\arctan x)\big)^{1/x}.$$

Esercizi del 16 aprile 2015

144. Delle funzioni seguenti dire se hanno derivata identicamente nulla, e se sono costanti, e dove (e magari dare un'interpretazione trigonometrica):

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x, \qquad \operatorname{arcsen} x - \operatorname{arcsen} \sqrt{1-x^2},$$
$$\arctan x - 2\arctan \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, \qquad \arccos x - 2\arccos \sqrt{\frac{x+1}{2}},$$
$$\arcsin x + 2\arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \tan(\arccos x).$$

145. (Avanzato). Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile, e supponiamo che $f'(a)$ ed $f'(b)$ siano di segno opposto. Dimostrare che esiste $c \in [a,b]$ tale che $f'(c) = 0$. (Applicare il teorema del massimo/minimo di Weierstrass).

146. (Avanzato). Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile, e supponiamo che $f'(a) > 0$ ed $f'(b) < 0$. Sia $c = (a+b)/2$ il punto medio. Se $f'(c) = 0$ siamo a posto. Se $f'(c) < 0$ scegliamo $[a,c]$. Se $f'(c) > 0$ scegliamo $[c,b]$. E così via per bisezione. Qualora il procedimento non termini in un numero finito di passi, sia x_0 il punto a cui converge. Si ha necessariamente $f'(x_0) = 0$?

147. (Avanzato). Sia I un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione non monotona. Dimostrare che in I esistono tre punti $x_1 < x_2 < x_3$ tali che $f(x_2)$ non è compreso fra $f(x_1)$ e $f(x_2)$ (cioè è maggiore o minore di entrambi). Dimostrare poi che se f è anche derivabile, allora la derivata si annulla in almeno un punto.

148. (Avanzato) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile (anche agli estremi), e tale che $f(a) = f(b)$. Sia c il punto medio di $[a,b]$. Mostrare che la terna $(f(a), f(c), f(b))$ non è in ordine strettamente monotono (cioè non si ha né che $f(a) < f(c) < f(b)$ né che $f(a) > f(c) > f(b)$). Dividiamo $[a,c]$ e $[c,b]$ ciascuno in due parti uguali con due ulteriori punti di suddivisione $a < c_1 < c < c_2 < b$. Mostrare che almeno una delle tre terne $(f(a), f(c_1), f(c))$, $(f(c_1), f(c), f(c_2))$ e $(f(c), f(c_2), f(b))$ non è in ordine strettamente monotono. Se è la prima poniamo $[a_1, b_1] = [a, c]$, se è la seconda poniamo $[a_1, b_1] = [c_1, c_2]$, altrimenti $[a_1, b_1] = [c, b]$. Dividiamo l'intervallo $[a_1, b_1]$ in quattro parti uguali, e ripetiamo il procedimento, ottenendo un nuovo intervallo $[a_2, b_2]$. e così via. Dimostrare che le successioni a_n, b_n convergono a un punto $\bar{x} \in [a,b]$, e che $f'(\bar{x}) = 0$.

149. (Avanzato). Sia I un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f(x) > 0$ in tutti i punti x esclusi un numero finito. Dimostrare che f è strettamente crescente su I.

150. Delle seguenti funizioni trovare il dominio di definizione, studiare il segno della derivata, e dedurne gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo locali e globali:

$$2x^2 - 3x + 4, \qquad x^3 - 2x^2 + x, \qquad \frac{x-1}{x+1}, \qquad \frac{2x-1}{x^2+4x}, \qquad \frac{2-x-x^2}{x+x^2},$$

$$x+\frac{x^2-1}{2x+4},\qquad 2x^2+\log(x-1),\qquad \log(x^2+x-1)-3x,$$
$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2},\qquad \sqrt{x^2+x+1}-\frac{x}{2}+1,\qquad \sqrt{x-2}-\log(2x+1),$$
$$\log(x+2)-\arctan(x+1),\qquad x-\operatorname{arcsen}x,\qquad \arctan x-\operatorname{arcsen}x,$$
$$2\sqrt{x+1}-\arccos x,\qquad \sqrt{\arctan x},\qquad \log(\log x),\qquad e^{x^2-2x+3}.$$

Esercizi del 30 aprile 2015

151. Calcolare i seguenti limiti, usando eventualmente la regola de L'Hôpital se ritenuto lecito e opportuno:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x)-\log x}{\pi-2\arctan x},\qquad \lim_{x\to1^-}\frac{\pi-2\operatorname{arcsen}x}{1-x},\qquad \lim_{x\to1^-}\frac{\pi-2\operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x}},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-2\operatorname{sen}x-1}{x^2},\qquad \lim_{x\to0}\frac{3x+\log(1+x^3)-3\tan x}{1-\cos x},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{e^x+x-1-\operatorname{sen}2x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x)}{\log(1+x^2)},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(9^x+x^2)}{1+\log(e^{2x}+x)},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e(1-x)^{1/x}-1}{x},\qquad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x-\tan x}{5-e^{2x}-4\cos x+2\operatorname{sen}x},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{2-2\sqrt{1+x}+\operatorname{sen}x}{\operatorname{arcsen}x+2\sqrt{1-x}-2},\qquad \lim_{x\to0}\frac{2e^x+9\sqrt[3]{1-x}+\operatorname{sen}x-11}{\log(1-x)-\log(1+x)+2\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+12\sqrt{x^2-x+1}+5\operatorname{sen}(x-x^2)-13}{(1+\operatorname{sen}x)x},\qquad \lim_{x\to0}\frac{x^2-2+2\cos(\operatorname{sen}x)}{1-\cos(x^2)}.$$

152. Consideriamo i limiti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{e^{-2x}-e^{-x}},\qquad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\operatorname{sen}x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Sono forme indeterminate? Applicando la regola de L'Hôpital ripetutamente più volte si arriva prima o poi a una forma non indeterminata? C'è un'altra via per calcolare il limite?

153. Calcoliamo

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3+x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+x-x\cdot\overbrace{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}^{\to1}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+x-x\cdot1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x^3}=1.$$

Lo stesso limite in un altro modo, usando L'Hôpital più volte:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3+x-\operatorname{sen}x}{x^3}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to0}\frac{3x^2+1-\cos x}{3x^2}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to0}\frac{6x+\operatorname{sen}x}{6x}\overset{\substack{0/0\\ \text{L'Hôpital}}}{=}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{6+\cos x}{6}=\frac{6+1}{6}=\frac{7}{6}.$$

I risultati sono diversi. Ci sono degli sbagli da qualche parte?

154. Delle seguenti funzioni studiare il segno della derivata seconda, e dedurne gli intervalli di convessità/concavità e i punti di flesso:

$$2x^2-3x+4, \qquad x^3-2x^2+x, \qquad \frac{x-1}{x+1}, \qquad \frac{2-x-x^2}{x+x^2},$$
$$x+\frac{x^2-1}{2x+4}, \qquad 2x^2+\log(x-1), \qquad \log(x^2+x-1)-3x,$$
$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}, \qquad \sqrt{x^2+x+1}-\frac{x}{2}+1, \qquad \sqrt{x-2}-\log(2x+1),$$
$$x-\operatorname{arcsen} x, \qquad \arctan x-\operatorname{arcsen} x,$$
$$\log(\log x), \qquad e^{x^2-2x+3}.$$

155. Studiare le seguenti funzioni (dagli appelli estivi 2004 e 2005):

$$\frac{x-x^2}{x^2-4x+1}, \quad \frac{x^2-1}{\sqrt{|5-2x^2|}}, \quad \frac{3x^2+1}{x(x^2+3)}, \quad (2+\sqrt{2})x+\ln\left|\frac{(x-1)^2}{1-x\sqrt{2}}\right|,$$
$$x+\log\left|\frac{x-3}{3x+3}\right|, \quad \frac{(x-1)^3}{x^2-3x+1}, \quad \frac{(x-1)(x+1)^2}{x^2+x+1}.$$

156. Dimostrare che il polinomio $3x^3+7x^2-7x-35$ si annulla in un unico punto di $\mathbb{R}$, e che questo punto è compreso fra 1 e 2.

Esercizi del 24 maggio 2015

157. (Avanzato) Consideriamo l'integrale $\int((2x+1)^2+f(x))dx$. Calcoliamolo in due modi, senza e con l'espansione del quadrato:

$$\int\big((2x+1)^2+f(x)\big)dx=\frac{1}{6}(2x+1)^3+\int f(x)dx,$$
$$\int\big(4x^2+4x+1+f(x)\big)dx=\frac{4}{3}x^3+2x^2+x+\int f(x)dx.$$

Sottraendo membro a membro otteniamo

$$0=\frac{1}{6}(2x+1)^3-\Big(\frac{4}{3}x^3+2x^2+x\Big),$$

da cui, semplificando, $0=1/6$. O no?

158. Vero o falso?

$$\lim_{x\to+\infty}\int f(x)dx=\int\lim_{x\to+\infty}f(x)\,dx, \qquad \frac{d}{dx}\int f(x)dx=\int\frac{d}{dx}f(x)dx.$$

159. Trovare primitive delle seguenti funzioni, cioè funzioni le cui derivate siano le funzioni date:

$$f_1(x) = 7x^3 - 5x^2 + 3x + 2, \qquad f_2(x) = 7 - 2x - 5x^7, \qquad f_3(x) = 2\operatorname{sen} x - 13\cos x,$$
$$f_4(x) = \frac{3x^2 - 2x + 5}{2x^2}, \qquad f_5(x) = \frac{5}{1+x^2} - \frac{2}{\cos^2 x}, \qquad f_6(x) = \frac{5x^3\sqrt[3]{x}}{7x\sqrt[4]{x}},$$
$$f_7(x) = \frac{4}{\sqrt[3]{x}} - 3^x + x^2, \qquad f_8(x) = \frac{5\cos^2 x - 3}{\cos^2 x}, \qquad f_9(x) = 5\cos x + x\sqrt{x} - 5,$$
$$f_{10}(x) = 2^x + 4x^2 - 12\operatorname{sen} x, \qquad f_{11}(x) = \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2, \qquad f_{12}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{7}{x}.$$

160. Trovare primitive delle seguenti funzioni:

$$f_{13}(x) = (2x-1)^2, \qquad f_{14}(x) = \cos(3x+4), \qquad f_{15}(x) = 5e^{1-5x},$$
$$f_{16}(x) = 3\operatorname{sen} x\cos^3 x, \qquad f_{17}(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}, \qquad f_{18}(x) = \frac{1}{7x+9},$$
$$f_{19}(x) = \frac{2}{\cos^2(2x-1)}, \qquad f_{20}(x) = \sqrt{3-4x}, \qquad f_{21}(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$
$$f_{22}(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}, \qquad f_{23}(x) = \frac{5}{1+9x^2}, \qquad f_{24}(x) = \frac{2\arctan^3 x}{1+x^2}.$$

Esercizi del 22 maggio 2015

161. Trovare primitive delle seguenti funzioni utilizzando il metodo per parti:

$$f_{25}(x) = x^2 e^x, \qquad f_{26}(x) = x\log(4x), \qquad f_{27}(x) = xe^{-2x},$$
$$f_{28}(x) = e^x\operatorname{sen}(2x), \qquad f_{29}(x) = \arctan x, \qquad f_{30}(x) = (3x^2 - 2x + 1)\cos x,$$
$$f_{31}(x) = x\log^2 x, \qquad f_{32}(x) = (2x^2 - x)\log x, \qquad f_{33}(x) = e^{-3x}\operatorname{sen} x.$$

162. Calcolare i seguenti integrali utilizzando la sostituzione suggerita:

$$\int \frac{1}{\sqrt{16x - 4x^2 - 15}}\,dx, \qquad x = \frac{t}{2} + 2,$$
$$\int \frac{1}{9x^2 - 12x + 5}\,dx, \qquad x = \frac{t}{3} + \frac{2}{3},$$
$$\int x\sqrt[3]{1+x}\,dx, \qquad x = t^3 - 1.$$
$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx, \qquad x = \log t,$$
$$\int (\operatorname{arcsen} x)^2 dx, \qquad x = \operatorname{sen} t.$$

163. Trovare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni razionali:

$$f_1(x) = \frac{3}{5x-1}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{7-2x}, \qquad f_3(x) = \frac{12x-1}{4x+3}, \qquad f_4(x) = \frac{3-x}{2x+1},$$

$$f_5(x) = \frac{x^2}{x+2}, \qquad f_6(x) = \frac{1}{x^2-6x+5}, \qquad f_7(x) = \frac{1}{4x^2-4x+1},$$

$$f_8(x) = \frac{1}{x^2+x+1}, \qquad f_9(x) = \frac{1}{2x^2-3x+1}, \qquad f_{10}(x) = \frac{1}{x^2+2x+5},$$

$$f_{11}(x) = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}, \qquad f_{12}(x) = \frac{3x+1}{(x+2)^2}, \qquad f_{13}(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1},$$

$$f_{11}(x) = \frac{x^2}{x^2-5x+4}, \qquad f_{12}(x) = \frac{2x^2-x+1}{x^2+2x+3}, \qquad f_{13}(x) = \frac{x^3}{x^2-1}.$$

164. Calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni mediante la sostituzione $t = e^x$

$$f_{17}(x) = \frac{3e^x}{e^{2x}-3e^x+2}, \qquad f_{18}(x) = \frac{2e^{2x}+e^x}{e^{2x}+1}.$$

165. (Avanzato) Ricordando le formule

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

utilizzare la sostituzione

$$x = 2\arctan t, \quad \text{ovvero} \quad t = \tan\frac{x}{2},$$

per calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni:

$$f_{14}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \qquad f_{15}(x) = \frac{1}{2\operatorname{sen} x - 5\cos x + 1},$$

$$f_{16}(x) = \frac{1}{\cos x + 2\operatorname{sen} x + 1}.$$

166. (Avanzato) Ricordando le formule

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x},$$

utilizzare la sostituzione

$$x = \arctan t, \quad \text{ovvero} \quad t = \tan x,$$

per calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni:

$$f_{17}(x) = \frac{1}{2+\operatorname{sen}^2 x}, \qquad f_{18}(x) = \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x - 4\cos^2 x - 1}.$$

167. Poniamo $f(x) = \int e^{3x^2}dx$. Allora

$$f(\sqrt{\log 2}) = \int e^{3\log 2} d\log 2 = \int 2^3 d\frac{1}{2} = \int 8d\frac{1}{2}.$$

O no?