Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Esercizi di Analisi Matematica

Esercizi del 25 ottobre 2011

1. Risolvere le disequazioni razionali seguenti:

$$\frac{1}{3+4x} < -1\,, \qquad \frac{6+3x}{6x+1} - \frac{3}{x+5} > 0\,, \qquad \frac{x}{3x+4} \geq \frac{5+6x}{3x+4}\,,$$
$$\frac{x-1}{2-x} + \frac{6}{x} \leq 0\,, \qquad \frac{x^2+2x-3}{x^2+1} < 0\,, \qquad \frac{2-3x}{1+x} \leq \frac{1+x}{5-x}\,.$$

2. Risolvere le disequazioni con valori assoluti seguenti:

$$|5+3x| < 1\,, \qquad |2-x| \geq 4\,, \qquad |1+4x| - x < 0\,, \qquad |x-3| \geq x+1\,,$$
$$-\frac{1}{2}|-2x-6| < 0\,, \qquad \frac{|5+3x|}{3x+6} < 0\,, \qquad \frac{|6x+1|}{4x+1} > 0\,,$$
$$|-1-3x| - 4\cdot|x| \leq 2x\,, \qquad 5|x| > -1-2x\,, \qquad \frac{|5x+3|}{2x+5} > \frac{5x+2}{|1+2x|}\,.$$

3. Studiare il segno delle espressioni seguenti, cioè dire per quali x sono positive, negative, nulle:

$$(1-x)(2x^2+x-3)\,, \qquad \frac{1}{3} + \frac{3}{8x+16} - \frac{11}{24(3x-2)}\,, \qquad \frac{4x^2+7x-2}{(5-x)^3}\,,$$
$$1-|x-3|\,, \qquad 1+|x+3|-3|x|\,, \qquad \frac{|3x+1|}{x+4} + \frac{4x+4}{|6+x|}\,.$$

4. Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} 1+x > 0 \\ 2-3x < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x^2+x-1 < 0 \\ x^2 < 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{5+6x}{2x+1} \leq \dfrac{3x+2}{6x+6} \\ \dfrac{x}{x+1} < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \geq |4x+4| - 6 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (4x-3)|5x+6| < 0 \\ \dfrac{1}{x+2} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5(x-4) < 0 \\ |3x+3| \geq 6+5x \\ |x^2+x-1| < 1 \end{cases}$$

5. Trovare massimo e minimo dei seguenti insiemi finiti di numeri reali:

$$\left\{\frac{2}{17}, -\frac{14}{19}, \frac{1}{13}, \frac{16}{9}, -\frac{13}{8}, -\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{4}, \sqrt{2}-1, \frac{1}{\sqrt{2}+1}, -\pi\right\},$$
$$\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}, \pi, \sqrt[3]{2}-1, \sqrt{2}\right\}.$$

6. Trovare massimo, minimo (quando ci sono) ed estremo inferiore e superiore degli insiemi di numeri reali seguenti:

$$\mathbb{Q}, \quad \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}, \quad \{1/n^2 \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}, \quad [-5, +\infty],$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0, x^2 < 2\}, \quad \big\{x \in \mathbb{R} \bigm| x(x-1)(x+1) \geq 0\big\}, \quad \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x-2}{x-1} \leq 0\right\},$$
$$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x-1}{x^2-x} \leq -1\right\}, \quad \left\{\frac{n}{n-1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\right\}.$$

7. Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:

$$2x+1 < \sqrt{x+2}, \quad x+4 \leq \sqrt{x+1}, \quad x+4 \leq \sqrt{2x+7}, \quad 1-2x > \sqrt{x+1},$$
$$x+3 < \sqrt{2x^2+20}, \quad 4-x > \sqrt{x^2-1}, \quad (2-x)\big(\sqrt{x^2-1}-1\big) < 0,$$
$$\sqrt{\frac{x^3-2}{x-1}} < x, \quad 4-\sqrt{x} \geq \sqrt{x-8},$$
$$\begin{cases} x+1 \geq \sqrt{x^2-8} \\ 2x < 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-1 \geq \sqrt{3x^2-1} \\ \dfrac{2x+1}{x-1} \geq 0 \end{cases}$$

8. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\max\{x, 2\} < 2x\,, \quad \max\{x, 2x\} > 1-x\,, \quad \min\{x-1, 1-x\} \geq 0\,,$$
$$\min\{x, -2x\} < \max\{1+2x, -1\}\,, \quad \min\big\{x, 3|x-1|\big\} < \frac{x}{2}\,.$$

Esercizi dell'8 novembre 2011

Ripasso su esponenziali e logaritmi
Per le disuguaglianze, usare il fatto che quando $a > 1$ valgono le equivalenze $x < y \iff a^x < a^y \iff \log_a x < \log_a y$.

9. Vero o falso?

$$2^{\log_2 3} = 3, \quad 3^{\log_2 3} = 2, \quad \log_2 4 = 2, \quad \log_3(-3)^2 = -3, \quad 3^{\sqrt{2}} < \sqrt{27}, \quad \sqrt{2^x} = 2^{x/2},$$
$$\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}, \quad 5^{\log_2 3} < 5^{\log_2 5}, \quad 6^{\log_2 a} = a3^{\log_2 a}, \quad 3^{1/x} = \frac{1}{3^x},$$
$$\log_2 \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}\log_2 6, \quad \log_a\big(\sqrt{2}+\sqrt{3}\big) = \frac{1}{2}\log_a 2 + \log\big(1+\sqrt{3/2}\big).$$

10. Trovare l'insieme di definizione delle formule seguenti (quando per i logaritmi non è indicata la base vuol dire che non ha importanza):

$$2^{1/x}, \quad \log|x|, \quad \log\bigl(x+\sqrt{x-1}\bigr), \quad \log x - \log(1-x), \quad \log\frac{x}{1-x},$$
$$\frac{1}{2-3^x}, \quad \log(2-3^x), \quad \frac{1}{\log(2-3^x)},$$
$$\log\bigl((\log_2 x)^2-1\bigr), \quad \log\bigl(1-2x+\sqrt{1+x}\bigr), \quad \sqrt{x+2-\sqrt{x+1}},$$
$$\log\bigl(\min\{x-1, 2-x\}\bigr), \quad \frac{1}{1-\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

11. Vero o falso?

$$|\operatorname{sen} x| = \sqrt{1-\cos^2 x}, \quad \operatorname{sen}(x+\pi) = \operatorname{sen} x, \quad \operatorname{sen}(2\pi - x) = -\operatorname{sen} x,$$
$$\forall x \in [-1,1]\colon \operatorname{sen}\operatorname{arcsen} x = x,$$
$$\forall x \in [0,1]\colon \arccos x = \operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}\bigr),$$
$$\forall x \in [-1,1]\colon \arccos x = \operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}.$$

12. Trovare l'insieme di definizione delle formule seguenti (quando per i logaritmi non è indicata la base vuol dire che non ha importanza):

$$\operatorname{sen}(1/x), \quad \frac{1}{\operatorname{arcsen} x}, \quad \operatorname{arcsen}(\log_2 x), \quad \arctan(1+x), \quad \arccos\frac{1}{1+x^2},$$
$$\sqrt{x^2+x-6} - \operatorname{arcsen}(3x), \quad \log\bigl(2+\operatorname{sen}(1/x)\bigr), \quad \operatorname{arcsen} 2^{-x}.$$

($\operatorname{arcsen} x$ e $\arccos x$ sono definiti quando $-1 \le x \le 1$; $\arctan x$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$).
Principio di induzione

13. Dimostrare che per $n \ge 1$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

14. Dimostrare che per ogni $n \ge 1$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n2^n = 2 + (n-1)2^{n+1}.$$

15. Dimostrare che la disuguaglianza $n! \ge 3^{n-2}$ è induttiva (ereditaria) almeno per $n \ge 2$. Per quali n è vera?

16. Dimostrare che $4 \cdot 5^n \ge 5 \cdot 4^n$ per $n \ge 1$. Verificato poi che $2^n + 4 \cdot 5^n > 4 \cdot 5^n \ge 5 \cdot 4^n > 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n$, dimostrare che

$$2^n + 5^n \ge 3^n + 4^n \qquad \forall n \ge 1.$$

(Per il passo induttivo sommare membro a membro con $2^n + 4 \cdot 5^n \ge 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n$).

17. Dimostrare che $(2n)! > 4^{n-1}n!(n-1)!$ per $n \geq 1$.

18. Dimostrare che $5^n \geq 2^n n^2$ per $n \geq 1$.
(Moltiplicare membro a membro per $5 \geq 2(n+1)^2/n^2$, che è vera per...).

Esercizi del 6 dicembre 2011

19. Verificare che la definizione di limite $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \operatorname{dom} f :\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di δ:

$$\lim_{x\to 2}(x-1) = 1 \quad \text{con } \delta = \varepsilon,$$
$$\lim_{x\to -1}(2x+1) = -1 \quad \text{con } \delta = \varepsilon/2,$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2x}{x-1} = 2 \quad \text{con } \delta = \varepsilon/2,$$
$$\lim_{x\to 0} 2^x = 1 \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \log_2(1+\varepsilon) & \text{se } \varepsilon \geq 1, \\ \min\{\log_2(1+\varepsilon), -\log_2(1-\varepsilon)\} & \text{se } 0 < \varepsilon < 1. \end{cases}$$

20. Verificare che la definizione di limite $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall x \in \operatorname{dom} f :\ \ x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di N:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0 \quad \text{con } N = 1/\varepsilon,$$
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+1}{2x} = \frac{1}{2} \quad \text{con } N = 1/(2\varepsilon),$$
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-1}{2x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{con } N = 1/\sqrt{2\varepsilon},$$
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{2^x} = 0 \quad \text{con } N = -\log_2\varepsilon.$$

21. Verificare che la definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, cioè $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \operatorname{dom} f :\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di δ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^2} = +\infty \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M \leq 0, \\ \sqrt{2/M} & \text{se } M > 0 \end{cases}$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2} = +\infty \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M \leq 0, \\ 1/\sqrt{M} & \text{se } M > 0 \end{cases}$$
$$\lim_{x\to -1}\frac{1}{|x+1|} = +\infty \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M \leq 0, \\ 1/M & \text{se } M > 0 \end{cases}$$

22. Verificare che la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, cioè $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall x \in \operatorname{dom} f:\ x > N \Rightarrow f(x) > M$, resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di N:

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \quad \text{con } N = M$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \quad \text{con } N = \begin{cases} \text{non importa quanto,} & \text{se } M < 0, \\ \sqrt{M} & \text{se } M \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty \quad \text{con } N = \begin{cases} \text{non importa quanto,} & \text{se } M \leq 0, \\ \log_2 M & \text{se } M > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x+1} = +\infty \quad \text{con } N = \begin{cases} -1/2 & \text{se } M \leq 0, \\ M + \sqrt{M + M^2} & \text{se } M > 0 \end{cases}$$

23. Trovare δ o N appropriati per la definizione di limite nei seguenti casi:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty,$$
$$\lim_{x\to2} |x+1| = 3, \qquad \lim_{x\to0} \sqrt[3]{x} = 0, \qquad \lim_{x\to-1} \max\{x, 1-x\} = 2.$$

Esercizi del 16 dicembre 2011

24. Sapendo che le funzioni costanti sono continue, e che la funzione $x \mapsto x$ è continua (cioè tende a x_0 per $x \to x_0$), tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$, e usando le regole su somma, prodotto e quoziente dei limiti, calcolare i limiti seguenti

$$\lim_{x\to0} 2x, \quad \lim_{x\to1}(x-1), \quad \lim_{x\to-2}(x^2-1), \quad \lim_{x\to+\infty} -x, \quad \lim_{x\to-1} \frac{x}{x-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3, \quad \lim_{x\to-\infty}(2x-4), \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2+x},$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\Big(1-\frac{1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to+\infty}(x^2-x), \quad \lim_{x\to-\infty} x^3\Big(1+\frac{1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to-\infty}(x^3+x^2),$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2})}{x(\frac{1}{x}-1)}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+2}{1-x},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x(2+\frac{1}{x})}{(\frac{2}{x}+3)x^2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{2x+3x^2}, \quad \lim_{x\to+\infty}\Big(x-\frac{x^2-1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{x^2-x}{x+2}+\frac{x^3+x^2+1}{1-x^2}\Big),$$

$$\lim_{x\to0} \frac{3}{x^2}, \quad \lim_{x\to0} \frac{x(1+x)}{2x(1-2x)}, \quad \lim_{x\to0} \frac{x+x^2}{2x-4x^2}, \quad \lim_{x\to0} \frac{x^2(x+3)}{x(1-x)}, \quad \lim_{x\to0} \frac{x^3+3x^2}{x-x^2},$$

$$\lim_{x\to1} \frac{-x}{1+x}, \quad \lim_{x\to1} \frac{x(x-1)}{(1-x)(1+x)}, \quad \lim_{x\to1} \frac{x^2-x}{1-x^2}, \quad \lim_{x\to-1} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)},$$

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^2+x}{x^3+1}, \quad \lim_{x\to2} \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-2)}, \quad \lim_{x\to2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}, \quad \lim_{x\to0^+} \frac{x+1}{x},$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{x+1}{x}, \quad \lim_{x\to0} \frac{x+1}{x}, \quad \lim_{x\to0} \frac{x-1}{x^2}, \quad \lim_{x\to1^-} \frac{x}{x-1}, \quad \lim_{x\to1^+} \frac{x}{x-1},$$

$$\lim_{x\to1} \frac{x}{x-1}, \quad \lim_{x\to2} \frac{x+1}{(x-2)^2}, \quad \lim_{x\to2^+} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2}, \quad \lim_{x\to2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}.$$

25. Sapendo che la radice quadrata è continua e che $\sqrt{x}$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x^3-3x},\quad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x},\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},\quad \lim_{x\to 1}\frac{x+\sqrt{x}}{x-1},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\big),\quad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}\big),\quad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{2x-2}-\sqrt{x+1}\big),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(2+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}\sqrt{2-\frac{1}{x}}},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x\big(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\big)}{x\big(1-\frac{1}{x}\big)},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{x-1},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}\Big(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\Big)},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-2x}\big),\quad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}\big),$$

$$\lim_{x\to-\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-3x}\big),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

26. Ricordando che seno e coseno sono sempre compresi fra -1 e 1, e usando il teorema del confronto, calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-\cos x),\quad \lim_{x\to-\infty}(x+\operatorname{sen}x-\cos x),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\operatorname{sen}x}{x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x-1)}{x^2},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\cos(x-1)}{\sqrt{x^4+1}},\quad \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x^2}+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\Big),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^2+x}{x-2}+\cos(x^3-2^x)\Big),\quad \lim_{x\to-\infty}(x+1)\big(2+\operatorname{sen}\sqrt{x^2-1}\big).$$

27. Ricordando la continuità e i limiti agli estremi delle funzioni esponenziali e logaritmiche, e i limiti di a^x/x^n e $(\ln_a x)/x$ per $x \to +\infty$, oltre alle regole già viste prima, calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}(3^x-x),\quad \lim_{x\to-\infty}2^{x-1},\quad \lim_{x\to+\infty}(5^x-x4^x),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x\log_2 x}{3^x},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{sen}2^x}{3^x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3^x+1}{x^3-2x+2^x},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3^x-1}{x^2+x-3^x},$$

$$\lim_{x\to 0^+}3^{1/x},\quad \lim_{x\to 0^-}2^{2/x},\quad \lim_{x\to+\infty}2^x3^{-x+1},\quad \lim_{x\to 0}2^{(x-1)/x^2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log_2(x^2-1),\quad \lim_{x\to+\infty}\log_3(3^x-2^x),\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\log_2 x}{x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log_2\frac{1+x}{x-1},\quad \lim_{x\to+\infty}\big(\log_2(x+1)-\log_2 x\big),\quad \lim_{x\to 0^+}2^{-\log_2 x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_2\sqrt{x}}{\log_2 x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_2\sqrt{x}}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{(\log_2 x)^2}{x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_2(x^2)-\log_2 x}{\log_2 x},\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\log_2 x}{1/x},\quad \lim_{x\to+\infty}\log_3(3^x-2^x).$$

Esercizi del 20 dicembre 2011

28. Ricordando che seno e coseno sono continui, che $(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ e $(1-\cos x)/x^2 \to 1/2$ per $x \to 0$, (più la regola del cambio di variabile, prodotti notevoli, scomposizioni in fattori...), calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{\operatorname{sen} x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x-x^2)}{x},\quad \lim_{x\to 1}\frac{x-x^2}{\operatorname{sen}(x-1)},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x},\quad \lim_{x\to \pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x-1},\quad \lim_{x\to +\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to +\infty} x\operatorname{sen}\frac{x-1}{x^2},$$
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+2}{x-1}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{(\cos 2x)-1}{x^2},\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^3},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^3},$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x(x-2)},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen} x}{1-\cos^3 x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x+\cos x-2}{x^3-2x}.$$

Nel seguito i logatitmi in cui non viene indicata la base si devono assumere in base e, ossia $\log x = \ln x$.

29. Ricordando che esponenziale e logaritmo sono continui, che $(\ln(1+x))/x \to 1$, (e^x-1) $/x \to 1$ per $x \to 0$, (più la regola del cambio di variabile, prodotti notevoli, scomposizioni in fattori, limiti notevoli precedenti...), calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x^2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x^2)}{x^2+2x^3},\quad \lim_{x\to 1}\frac{x-x^2}{\log x},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{1-e^x},\quad \lim_{x\to -1}\frac{\log|x|}{x^2-1},\quad \lim_{x\to +\infty} x\log\frac{x+1}{x},\quad \lim_{x\to +\infty} x(1-e^{1/x}),$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 2x)-1}{x\log(x+1)},\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x^2}-1}{x^3},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^3},\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1-\sqrt{x})}{x(x-2)},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{(1-e^x)(1-e^{2x})},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x^2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\log(e+x)}{x^3-2x}.$$

30. Esercizi di ricapitolazione:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{2^x+x}-\sqrt{2^x-x}\right),\quad \lim_{x\to 1} 2^{1/(x-1)},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2^{1/x}}{2^{1/x}},$$
$$\lim_{x\to +\infty}\left(x^2-\log_2 x+2^{x-1}\right),\quad \lim_{x\to -\infty} 3^x(1-\cos 3^{-x}),\quad \lim_{x\to +\infty} 2^{x+\operatorname{sen} x},$$
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{2+\operatorname{sen}^2 x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\operatorname{sen} x)}{1-\cos x},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\operatorname{sen} x}{x^2-2x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x},\quad \lim_{x\to +\infty}(x^4-2^x+\cos x),$$
$$\lim_{x\to +\infty}\left(2x-x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right),\quad \lim_{x\to 0}\frac{2x-\operatorname{sen} x\cos x}{1-\cos x},\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{\log_3(3^x-2^x+x)}{\log_2 x},$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1-\cos\sqrt{x}}{\operatorname{sen} x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1-\operatorname{sen} x)(1-\cos x)}{\operatorname{sen} x}.$$

Dare per noti la continuità di esponenziale e logaritmo, nonché i limiti di $(1+1/x)^x$ per $x \to \pm\infty$; di $(1+x)^{1/x}$, $(\ln(1+x))/x$, $(e^x-1)/x$ per $x \to 0$.

31. Calcolare i seguenti limiti, usando per esempio la formula $a^b = e^{b \ln a}$:

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{1/x}, \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{n+2}\Big)^{n-1}, \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{n+1}{2n^2+1}\Big)^{n},$$
$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{2n+3}{n^2+1}\Big)^{n/2}, \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{2n^2+3}{n^2+1}\Big)^{n/2}, \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n^2+3}{n^2+1}\Big)^{n/2},$$
$$\lim_{x\to 0}\big(\ln(e+x)\big)^{1/x}, \quad \lim_{x\to 0}\ln\big((e+x)^{1/x}\big), \quad \lim_{x\to 0}\big(1+x+x^2\big)^{1/x},$$
$$\lim_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{1/x}, \quad \lim_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{1/x^2}, \quad \lim_{x\to 0}\big(\cos x-\operatorname{sen} x\big)^{1/x},$$
$$\lim_{x\to 0}\big(e^x+e^{2x}-1\big)^{1/\operatorname{sen} x}, \quad \lim_{x\to 0}\big(2^x+3^x-1\big)^{1/\ln(1+x)}, \quad \lim_{x\to 0}\big(e^x+\operatorname{sen} x\big)^{1/x}.$$

32. (Avanzato) Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} x\big(x-1-\sqrt{x^2-2x}\big), \qquad \lim_{x\to+\infty}\big(x-\sqrt{x^2-2x}\big)^{x}.$$

33. (Avanzato) Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} x\big(-1+\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\big), \qquad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\big)^{x}.$$

Esercizi del 7 marzo 2011

34. Dimostrare che la somma di due funzioni (strettamente o debolmente) crescenti è crescente. E la somma di due funzioni decrescenti? E la somma di una funzione crescente con una decrescente?

35. Dimostrare che il prodotto di due funzioni positive crescenti è crescente. E il prodotto di due funzioni negative crescenti? Lo stesso per due funzioni positive decrescenti, o negative decrescenti. E il prodotto di due funzioni crescenti che cambiano segno?

36. Verificare che per ogni $x, y \geq 0$ con $x \neq y$ si ha $\sqrt{x}-\sqrt{y} = (x-y)/(\sqrt{x}+\sqrt{y})$. Dedurre che la funzione $f(x) := \sqrt{x}$ è strettamente crescente su $[0,+\infty[$.

37. Consideriamo la funzione $f(x) := x^3/(1+x^2)$. Verificare che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(x)-f(y) = \frac{x^2+y^2+(x+y)^2+2x^2y^2}{2(1+x^2)(1+y^2)}(x-y)\,.$$

Dedurre che la funzione f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

38. Dando per noto che la successione $a_n := (1+1/n)^n$ è crescente e tende ad e, dimostrare che anche $c_n := (1+\frac{1}{2n})^n$ è crescente e trovarne il limite (osservare che $c_n = \sqrt{a_{2n}}$). Similmente per $d_n := (1+\frac{1}{3n})^{2n}$.

39. (Avanzato). Ricalcando la dimostrazione che la successione $a_n := (1+1/n)^n$ è crescente, dimostrare che anche $c_n := (1+2/n)^n$ è crescente. Dimostrare poi che c_n tende a e^2. (Per il calcolo del limite osservare che $c_{2n} = a_n^2$).

40. (Avanzato) Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)!} = +\infty\,.$$

41. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n^2+2n+2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!+\ln n}{n^n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+e^n}{n!}.$$

42. (Avanzato) Consideriamo la successione $a_n = \binom{2n}{n}/n^n$, dove $\binom{n}{k} = n!/(k!(n-k)!)$ è il coefficiente binomiale. Mostrare che vale la relazione ricorsiva

$$a_{n+1} = \frac{4n+2}{(n+1)^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \cdot a_n\,.$$

Studiare monotonia e limite della successione.

43. Consideriamo le funzioni x, x^2-2x, $(x-1)(x+1)$, $(\operatorname{sen} x)/x$, $2-2\cos x$, $\log x$, $\log(1/x)$, $1/(x-x^2)$, e^{x^2}, e^{-x+2} (e altre inventate sul momento) per $x \to +\infty$. Dire quali di queste sono infinitesime o infinite e metterle in ordine di infinito o infinitesimo crescente. Scrivere tutte le possibili notazioni di Landau che valgono fra queste funzioni.

44. Consideriamo le funzioni x, x^2-2x, $\operatorname{sen} 2x$, $x/\operatorname{sen} x$, $2-2\cos x$, $\log x$, $1/(x-x^2)$, e^{1/x^2}, e^{-1/x^2} (e altre inventate sul momento) per $x \to 0$. Dire quali di queste sono infinitesime o infinite e metterle in ordine di infinito o infinitesimo crescente. Scrivere tutte le possibili notazioni di Landau che valgono fra queste funzioni.

Esercizi del 21 marzo 2011

45. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $xf(x) \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$. Dimostrare che f ha almeno uno zero.

46. (Avanzato) Considerare la funzione $f(x) := 3x-1$ su $[a,b] = [0,1]$ e siano $[a_n, b_n]$ gli intervallini prodotti dal metodo di bisezione del teorema dell'esistenza degli zeri. Calcolare esplicitamente a_n, b_n per n da 1 a 3. Mostrare (per induzione) che a_n e b_n sono tutte frazioni con denominatore una potenza di 2. Dedurre che la bisezione non termina in un numero finito di passi.

47. (Avanzato) Considerare la funzione $\cos x$ sull'intervallo $[0, 3\pi]$. Siano $[a_n, b_n]$ gli intervallini prodotti dal metodo di bisezione del teorema dell'esistenza degli zeri. A cosa tendono a_n e b_n per $n \to +\infty$?

48. (Avanzato) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x+1) = -f(x)$ per ogni x. Dimostrare che f si annulla in infiniti punti. Conoscete un esempio concreto di una tale funzione f?

49. (Avanzato) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che esistano finiti $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Dimostrare che f è limitata. Ha necessariamente punti di massimo o minimo globale? E se si aggiunge l'ipotesi che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$?

50. (Avanzato) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e supponiamo che $f(x) \to 0$ sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$. Dimostrare che esiste almeno un punto di massimo globale per f.

51. (Avanzato) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua per la quale i limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ esistono finiti e coincidono. Dimostrare che almeno uno fra il $\sup_{\mathbb{R}} f$ e l'$\inf_{\mathbb{R}} f$ è un valore assunto da f.

52. (Avanzato) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) \to +\infty$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$. Dimostrare che esiste almeno un punto di minimo globale per f e che ogni valore maggiore del valore minimo viene assunto in almeno due punti distinti.

53. (Avanzato+) Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esista e sia $\leq f(x_0)$ per ogni $x_0 \in [a,b]$. Dimostrare che l'insieme dei valori assunti da f ha massimo. (Ripercorrere la dimostrazione del teorema di Weierstrass, con modifica alla fine).

Esercizi del 29 marzo 2012

54. Può una funzione essere sia debomente crescente che debolmente decrescente? Può essere sia strettamente crescente che strettamente decrescente?

55. Dimostrare che la somma di funzioni crescenti è crescente, e che la somma di funzioni decrescenti è decrescente. Si può dire qualcosa della somma di due funzioni monotone? O della differenza?

56. Il prodotto di due funzioni (de)crescenti è (de)crescente? L'opposto di una funzione monotona è monotona?

57. La composizione di funzioni monotone è monotona?

58. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono monotone, anche $f(x)/g(x)$ è monotona? Che dire di $f(x)^{g(x)}$?

59. Il grafico della funzione $\sqrt{1-x^2}$ è un semicerchio. È una funzione monotona? Ha dei tratti monotoni? Ha dei tratti invertibili? Come sono le inverse di quei tratti invertibili?

60. La funzione $f(x) = x - 1/x$ è monotona per $x > 0$? (Differenza di funzioni monotone...) E' invertibile? Qual'è la formula dell'inversa?

61. E' vero o no che $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$ per ogni x? E' vero o no che $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x$ per ogni x?

62. (Avanzato) Verificare che vale l'uguaglianza

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(\frac{3}{4}b^2 + \left(a + \frac{b}{2}\right)^2\right).$$

Dedurne che $a^3 - b^3$ e $a - b$ hanno sempre lo stesso segno. Dimostrare quindi che la funzione $f(x) := x^3 + x$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$. Mostrare anche che $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, che f è invertibile, e che l'inversa è continua. (Usare il teorema dei valori intermedi e il teorema sull'invertibilità).

63. (Avanzato) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che per ogni $x_0 \in [a,b]$ esista $\delta > 0$ tale che la f è debolmente crescente su $[a,b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Dimostrare che f è debolmente crescente su tutto $[a,b]$.

64. (Avanzato) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione che è continua a sinistra in ogni punto, cioè $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ per ogni x_0. La f è necessariamente limitata? (Cosa succede per $x_0 = a$?). E se si aggiunge l'ipotesi che f sia continua in $x_0 = a$?

65. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua per la quale i limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ esistono finiti e coincidono. Dimostrare che almeno uno fra il $\sup_{\mathbb{R}} f$ e l'$\inf_{\mathbb{R}} f$ è un valore assunto da f.

Esercizi del 6 aprile 2012

66. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := x^2 - 2x$ nel punto generico x_0, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = -1$.

67. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := (x-1)/(x^2+1)$ nel punto $x_0 = 1$ usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Lo stesso per la derivata nel punto generico x_0. Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto $x_0 = 1$.

68. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt{x}$ nel punto generico $x_0 > 0$, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

69. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \log(3x - 1)$ nel punto generico $x_0 > 1/3$, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

70. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt[3]{x}$ nel punto generico x_0, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? (Si ricordi che si parla di funzione "derivabile" quando la derivata esiste *finita*). Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2$. (Ricordare il prodotto notevole $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = \ldots$).

71. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}$ nel punto generico x_0 per il quale $\operatorname{sen} x_0 \neq 0$, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = \pi/3$.

72. (Avanzato) Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x + x^2}$ nel punto generico x_0, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

73. Calcolare le derivate nel punto generico x delle funzioni seguenti:

$$3x + 8, \quad 2 + x - \operatorname{sen} x, \quad 5x^2 + 2x - 9, \quad e^x + \cos x, \quad -5x^7 + 3x^5 - 6x + 1,$$
$$x \cos x, \quad (\ln x) \operatorname{sen} x, \quad (2 - x) \ln x, \quad e^x(\cos x + \operatorname{sen} x), \quad (x + \operatorname{sen} x) \ln x,$$
$$\frac{x+7}{2x-5}, \quad \frac{1}{x^2+3x}, \quad \frac{3x+1}{2x^2-4x-3}, \quad \frac{(x-1)\cos x}{e^x}, \quad \frac{2x + \operatorname{sen} x}{5 - \cos x} - \frac{5}{x+1},$$
$$\cos(2x - \pi), \quad \tan(1 - x^2), \quad (x + e^x)^5, \quad (\operatorname{sen} 2x - \cos 3x)^2, \quad \operatorname{sen}^2\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^2,$$
$$\frac{e^{1-x} + \ln x}{(x+1)^2}, \quad \frac{\tan(1+x)}{x^2 + (1-x)^2}, \quad \frac{1 - (\ln x)^2}{(2-x)^2}, \quad \Big(\operatorname{sen} x + \frac{e^x + e^{-x}}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\Big)^2.$$

74. Calcolare la derivata delle seguenti somme di funzioni, specificando su quale dominio siano definite:

$$f_1(x) = \operatorname{sen} x + 3^x - \arctan x, \qquad f_2(x) = x^4 + \operatorname{arcsen} x, \qquad f_3(x) = \log x - \cos x + \sqrt{x}\,.$$

75. Calcolare la derivata dei seguenti prodotti di funzioni, specificando su quale dominio siano definite:

$$f_4(x) = x^{3/2} \log x, \qquad f_5(x) = \operatorname{sen} x \cos x, \qquad f_6(x) = e^x \sqrt[3]{x},$$
$$f_7(x) = 3x^{-1} \operatorname{sen} x \, \log x, \qquad f_8(x) = x^2 \log x \, \arctan x, \qquad f_9(x) = 5^x \operatorname{arcsen} x \, \cos x.$$

76. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni, specificando su quale dominio siano definite:

$$f_{10}(x) = \frac{1}{x^3}, \qquad f_{11}(x) = \frac{1}{\operatorname{arcsen} x}, \qquad f_{12}(x) = \frac{1}{x^2 + \cos x}\,.$$

77. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni razionali, specificando (dove fattibile) su quale dominio siano definite:

$$f_{13}(x) = \frac{x+7}{12x-5}, \qquad f_{14}(x) = \frac{x^2+3x-5}{x^2+x-1}, \qquad f_{15}(x) = \frac{5x^2+3x-1}{2-x}.$$
$$f_{16}(x) = \frac{1 - 2x^2 + 2x}{x^2 - x + 1}, \qquad f_{17}(x) = \frac{2 - 4x^3 + 6x^6 - 4x^9 + x^{12}}{1 - 4x^3 + 6x^6 - 4x^9 + x^{12}}.$$

78. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni composte, specificando su quale dominio siano definite:

$$f_{18}(x) = (3x+1)^2, \qquad f_{19}(x) = \sqrt{x^2+1}, \qquad f_{20}(x) = \log(2-3x^2),$$
$$f_{21}(x) = (5\log x)^3, \qquad f_{22}(x) = \frac{1}{\arctan(e^x+1)} \qquad f_{23}(x) = 2^{3x+\operatorname{sen} x},$$
$$f_{24}(x) = \operatorname{arcsen}(x^3-1), \qquad f_{25}(x) = \operatorname{sen}(\log(3x+5)), \qquad f_{26}(x) = \frac{e^{3x+1}}{\operatorname{sen}^2 x + 4}.$$

79. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni (forma esponenziale), specificando su quale dominio siano definite:

$$f_{27}(x) = x^{\arctan x}, \quad f_{28}(x) = (3x+5)^{\operatorname{sen} x},$$
$$f_{29}(x) = \Big(\frac{x+1}{2x+3}\Big)^x, \quad f_{30}(x) = \big(\log(\arctan x)\big)^{1/x}.$$

Esercizi del 3 maggio 2012

80. (Avanzato). Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile, e supponiamo che $f'(a)$ ed $f'(b)$ siano di segno opposto. Dimostrare che esiste $c \in [a,b]$ tale che $f'(c) = 0$. (Applicare il teorema del massimo/minimo di Weierstrass).

81. (Avanzato). Sia I un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione non monotona. Dimostrare che in I esistono tre punti $x_1 < x_2 < x_3$ tali che $f(x_2)$ non è compreso fra $f(x_1)$ e $f(x_2)$ (cioè è maggiore o minore di entrambi). Dimostrare poi che se f è anche derivabile, allora la derivata si annulla in almeno un punto.

82. (Avanzato). Sia I un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f(x) > 0$ in tutti i punti x esclusi un numero finito. Dimostrare che f è strettamente crescente su I.

83. Delle seguenti funizioni trovare il dominio di definizione, studiare il segno della derivata, e dedurne gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo locali e globali:

$$2x^2-3x+4, \qquad x^3-2x^2+x, \qquad \frac{x-1}{x+1}, \qquad \frac{2x-1}{x^2+4x}, \qquad \frac{2-x-x^2}{x+x^2},$$
$$x + \frac{x^2-1}{2x+4}, \qquad 2x^2+\log(x-1), \qquad \log(x^2+x-1)-3x,$$
$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}, \qquad \sqrt{x^2+x+1}-\frac{x}{2}+1, \qquad \sqrt{x-2}-\log(2x+1),$$
$$\log(x+2)-\arctan(x+1), \qquad x-\operatorname{arcsen} x, \qquad \arctan x - \operatorname{arcsen} x,$$
$$2\sqrt{x+1}-\arccos x, \qquad \sqrt{\arctan x}, \qquad \log(\log x), \qquad e^{x^2-2x+3}.$$

84. Calcolare i seguenti limiti, usando eventualmente la regola de L'Hôpital se ritenuto lecito e opportuno:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x)-\log x}{\pi-2\arctan x},\qquad \lim_{x\to1^-}\frac{\pi-2\arcsen x}{1-x},\qquad \lim_{x\to1^-}\frac{\pi-2\arcsen x}{\sqrt{1-x}},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-2\sen x-1}{x^2},\qquad \lim_{x\to0}\frac{3x+\log(1+x^3)-3\tan x}{1-\cos x},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sen x}{e^x+x-1-\sen 2x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x)}{\log(1+x^2)},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(9^x+x^2)}{1+\log(e^{2x}+x)},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e(1-x)^{1/x}-1}{x},\qquad \lim_{x\to0}\frac{\sen x-\tan x}{5-e^{2x}-4\cos x+2\sen x},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2-2\sqrt{1+x}+\sen x}{\arcsen x+2\sqrt{1-x}-2},\qquad \lim_{x\to0}\frac{2e^x+9\sqrt[3]{1-x}+\sen x-11}{\log(1-x)-\log(1+x)+2\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+12\sqrt{x^2-x+1}+5\sen(x-x^2)-13}{(1+\sen x)x},\qquad \lim_{x\to0}\frac{x^2-2+2\cos(\sen x)}{1-\cos(x^2)}.$$

85. Consideriamo i limiti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{e^{-2x}-e^{-x}},\qquad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sen x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Sono forme indeterminate? Applicando la regola de L'Hôpital ripetutamente più volte si arriva prima o poi a una forma non indeterminata? C'è un'altra via per calcolare il limite?

Esercizi del 12 maggio 2012

86. Delle seguenti funzioni studiare il segno della derivata seconda, e dedurne gli intervalli di convessità/concavità e i punti di flesso:

$$2x^2-3x+4,\qquad x^3-2x^2+x,\qquad \frac{x-1}{x+1},\qquad \frac{2-x-x^2}{x+x^2},$$

$$x+\frac{x^2-1}{2x+4},\qquad 2x^2+\log(x-1),\qquad \log(x^2+x-1)-3x,$$

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2},\qquad \sqrt{x^2+x+1}-\frac{x}{2}+1,\qquad \sqrt{x-2}-\log(2x+1),$$

$$x-\arcsen x,\qquad \arctan x-\arcsen x,$$

$$\log(\log x),\qquad e^{x^2-2x+3}.$$

87. Studiare le seguenti funzioni (dagli appelli estivi 2004 e 2005):

$$\frac{x-x^2}{x^2-4x+1},\qquad \frac{x^2-1}{\sqrt{|5-2x^2|}},\qquad \frac{3x^2+1}{x(x^2+3)},\qquad (2+\sqrt{2})x+\ln\left|\frac{(x-1)^2}{1-x\sqrt{2}}\right|,$$

$$x+\log\left|\frac{x-3}{3x+3}\right|,\qquad \frac{(x-1)^3}{x^2-3x+1},\qquad \frac{(x-1)(x+1)^2}{x^2+x+1}.$$

Esercizi del 5 giugno 2012

88. Trovare primitive delle seguenti funzioni, cioè funzioni le cui derivate siano le funzioni date:

$$f_1(x) = 7x^3 - 5x^2 + 3x + 2, \qquad f_2(x) = 7 - 2x - 5x^7, \qquad f_3(x) = 2\,\mathrm{sen}\, x - 13\cos x,$$
$$f_4(x) = \frac{3x^2 - 2x + 5}{2x^2}, \qquad f_5(x) = \frac{5}{1+x^2} - \frac{2}{\cos^2 x}, \qquad f_6(x) = \frac{5x^3\sqrt[3]{x}}{7x\sqrt[4]{x}},$$
$$f_7(x) = \frac{4}{\sqrt[3]{x}} - 3^x + x^2, \qquad f_8(x) = \frac{5\cos^2 x - 3}{\cos^2 x}, \qquad f_9(x) = 5\cos x + x\sqrt{x} - 5,$$
$$f_{10}(x) = 2^x + 4x^2 - 12\,\mathrm{sen}\, x, \qquad f_{11}(x) = \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2, \qquad f_{12}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{7}{x}.$$

89. Trovare primitive delle seguenti funzioni:

$$f_{13}(x) = (2x-1)^2, \qquad f_{14}(x) = \cos(3x+4), \qquad f_{15}(x) = 5e^{1-5x},$$
$$f_{16}(x) = 3\,\mathrm{sen}\, x\cos^3 x, \qquad f_{17}(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}, \qquad f_{18}(x) = \frac{1}{7x+9},$$
$$f_{19}(x) = \frac{2}{\cos^2(2x-1)}, \qquad f_{20}(x) = \sqrt{3-4x}, \qquad f_{21}(x) = \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\, x},$$
$$f_{22}(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}, \qquad f_{23}(x) = \frac{5}{1+9x^2}, \qquad f_{24}(x) = \frac{2\arctan^3 x}{1+x^2}.$$

90. Trovare primitive delle seguenti funzioni utilizzando il metodo per parti:

$$f_{25}(x) = x^2 e^x, \qquad f_{26}(x) = x\log(4x), \qquad f_{27}(x) = xe^{-2x},$$
$$f_{28}(x) = e^x\,\mathrm{sen}(2x), \qquad f_{29}(x) = \arctan x, \qquad f_{30}(x) = (3x^2 - 2x + 1)\cos x,$$
$$f_{31}(x) = x\log^2 x, \qquad f_{32}(x) = (2x^2 - x)\log x, \qquad f_{33}(x) = e^{-3x}\,\mathrm{sen}\, x.$$

91. Calcolare i seguenti integrali utilizzando la sostituzione suggerita:

$$\int \frac{1}{\sqrt{16x - 4x^2 - 15}}\,dx, \qquad x = \frac{t}{2} + 2,$$
$$\int \frac{1}{9x^2 - 12x + 5}\,dx, \qquad x = \frac{t}{3} + \frac{2}{3},$$
$$\int x\sqrt[3]{1+x}\,dx, \qquad x = t^3 - 1.$$
$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx, \qquad x = \log t,$$
$$\int (\mathrm{arcsen}\, x)^2 dx, \qquad x = \mathrm{sen}\, t.$$

92. Trovare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni razionali:

$$f_1(x) = \frac{3}{5x-1}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{7-2x}, \qquad f_3(x) = \frac{12x-1}{4x+3}, \qquad f_4(x) = \frac{3-x}{2x+1},$$
$$f_5(x) = \frac{x^2}{x+2}, \qquad f_6(x) = \frac{1}{x^2-6x+5}, \qquad f_7(x) = \frac{1}{4x^2-4x+1},$$
$$f_8(x) = \frac{1}{x^2+x+1}, \qquad f_9(x) = \frac{1}{2x^2-3x+1}, \qquad f_{10}(x) = \frac{1}{x^2+2x+5},$$
$$f_{11}(x) = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}, \qquad f_{12}(x) = \frac{3x+1}{(x+2)^2}, \qquad f_{13}(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1},$$
$$f_{11}(x) = \frac{x^2}{x^2-5x+4}, \qquad f_{12}(x) = \frac{2x^2-x+1}{x^2+2x+3}, \qquad f_{13}(x) = \frac{x^3}{x^2-1}.$$

93. Calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni mediante la sostituzione $t = e^x$

$$f_{17}(x) = \frac{3e^x}{e^{2x}-3e^x+2}, \qquad f_{18}(x) = \frac{2e^{2x}+e^x}{e^{2x}+1}.$$

94. (Avanzato) Ricordando le formule

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

utilizzare la sostituzione

$$x = 2\arctan t, \quad \text{ovvero} \quad t = \tan\frac{x}{2},$$

per calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni:

$$f_{14}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \qquad f_{15}(x) = \frac{1}{2\operatorname{sen} x - 5\cos x + 1},$$
$$f_{16}(x) = \frac{1}{\cos x + 2\operatorname{sen} x + 1}.$$

95. (Avanzato) Ricordando le formule

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x},$$

utilizzare la sostituzione

$$x = \arctan t, \quad \text{ovvero} \quad t = \tan x,$$

per calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni:

$$f_{17}(x) = \frac{1}{2+\operatorname{sen}^2 x}, \qquad f_{18}(x) = \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x - 4\cos^2 x - 1}.$$