Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Esercizi di Analisi Matematica

Esercizi sul primo semestre del corso

1. Risolvere le disequazioni razionali seguenti:

$$\frac{1}{3+4x} < -1\,, \qquad \frac{6+3x}{6x+1} - \frac{3}{x+5} > 0\,, \qquad \frac{x}{3x+4} \geq \frac{5+6x}{3x+4}\,,$$
$$\frac{x-1}{2-x} + \frac{6}{x} \leq 0\,, \qquad \frac{x^2+2x-3}{x^2+1} < 0\,, \qquad \frac{2-3x}{1+x} \leq \frac{1+x}{5-x}\,.$$

2. Risolvere le disequazioni con valori assoluti seguenti:

$$|5+3x| < 1\,, \qquad |2-x| \geq 4\,, \qquad |1+4x| - x < 0\,, \qquad |x-3| \geq x+1\,,$$
$$-\frac{1}{2}|-2x-6| < 0\,, \qquad \frac{|5+3x|}{3x+6} < 0\,, \qquad \frac{|6x+1|}{4x+1} > 0\,,$$
$$|-1-3x| - 4 \cdot |x| \leq 2x\,, \qquad 5|x| > -1-2x\,, \qquad \frac{|5x+3|}{2x+5} > \frac{5x+2}{|1+2x|}\,.$$

3. Studiare il segno delle espressioni seguenti, cioè dire per quali x sono positive, negative, nulle:

$$(1-x)(2x^2+x-3)\,, \qquad \frac{1}{3} + \frac{3}{8x+16} - \frac{11}{24(3x-2)}\,, \qquad \frac{4x^2+7x-2}{(5-x)^3}\,,$$
$$1-|x-3|\,, \qquad 1+|x+3|-3|x|\,, \qquad \frac{|3x+1|}{x+4} + \frac{4x+4}{|6+x|}\,.$$

4. Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} 1+x>0 \\ 2-3x<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x^2+x-1<0 \\ x^2<4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{5+6x}{2x+1} \leq \dfrac{3x+2}{6x+6} \\ \dfrac{x}{x+1} < 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3x \geq |4x+4|-6 \\ x^2-x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (4x-3)|5x+6| < 0 \\ \dfrac{1}{x+2} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5(x-4)<0 \\ |3x+3| \geq 6+5x \\ |x^2+x-1| < 1 \end{cases}$$

5. Dimostrare che la disuguaglianza $n! \geq 3^{n-2}$ è induttiva (ereditaria) almeno per $n \geq 2$. Per quali n è vera?

6. Dimostrare che $4 \cdot 5^n \geq 5 \cdot 4^n$ per $n \geq 1$. Verificato poi che $2^n + 4 \cdot 5^n > 4 \cdot 5^n \geq 5 \cdot 4^n > 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n$, dimostrare che

$$2^n + 5^n \geq 3^n + 4^n \qquad \forall n \geq 1.$$

(Per il passo induttivo sommare membro a membro con $2^n + 4 \cdot 5^n \geq 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n$).

7. Dimostrare che $(2n)! > 4^{n-1} n!(n-1)!$ per $n \geq 1$.

8. Dimostrare che $5^n \geq 2^n n^2$ per $n \geq 1$.
(Moltiplicare membro a membro per $5 \geq 2(n+1)^2/n^2$, che è vera per...).

9. Dimostrare che per $n \geq 1$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

10. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n2^n = 2 + (n-1)2^{n+1}.$$

11. Trovare massimo e minimo dei seguenti insiemi finiti di numeri reali:

$$\left\{\frac{2}{17}, -\frac{14}{19}, \frac{1}{13}, \frac{16}{9}, -\frac{13}{8}, -\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{4}, \sqrt{2}-1, \frac{1}{\sqrt{2}+1}, -\pi\right\},$$
$$\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}, \pi, \sqrt[3]{2}-1, \sqrt{2}\right\}.$$

12. Trovare massimo, minimo (quando ci sono) ed estremo inferiore e superiore degli insiemi di numeri reali seguenti:

$$\mathbb{Q}, \quad \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}, \quad \{1/n^2 \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}, \quad [-5, +\infty],$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0, x^2 < 2\}, \quad \big\{x \in \mathbb{R} \bigm| x(x-1)(x+1) \geq 0\big\}, \quad \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x-2}{x-1} \leq 0\right\},$$
$$\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x-1}{x^2-x} \leq -1\right\}, \quad \left\{\frac{n}{n-1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, n \geq 2\right\}.$$

13. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\max\{x, 2\} < 2x, \quad \max\{x, 2x\} > 1 - x, \quad \min\{x-1, 1-x\} \geq 0,$$
$$\min\{x, -2x\} < \max\{1+2x, -1\}, \quad \min\big\{x, 3|x-1|\big\} < \frac{x}{2}.$$

14. Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:

$$2x+1<\sqrt{x+2},\quad x+4\le\sqrt{x+1},\quad x+4\le\sqrt{2x+7},\quad 1-2x>\sqrt{x+1},$$
$$x+3<\sqrt{2x^2+20},\quad 4-x>\sqrt{x^2-1},\quad (2-x)\big(\sqrt{x^2-1}-1\big)<0,$$
$$\sqrt{\frac{x^3-2}{x-1}}<x,\quad 4-\sqrt{x}\ge\sqrt{x-8},$$
$$\begin{cases} x+1\ge\sqrt{x^2-8} \\ 2x<7 \end{cases}\qquad \begin{cases} 2x-1\ge\sqrt{3x^2-1} \\ \dfrac{2x+1}{x-1}\ge 0 \end{cases}$$

15. Sapendo che le funzioni costanti sono continue, e che la funzione $x\mapsto x$ è continua (cioè tende a x_0 per $x\to x_0$), tende a $+\infty$ per $x\to+\infty$ e tende a $-\infty$ per $x\to-\infty$, e usando le regole su somma, prodotto e quoziente dei limiti, calcolare i limiti seguenti

$$\lim_{x\to0}2x,\quad \lim_{x\to1}(x-1),\quad \lim_{x\to-2}(x^2-1),\quad \lim_{x\to+\infty}-x,\quad \lim_{x\to-1}\frac{x}{x-1}$$
$$\lim_{x\to-\infty}x^3,\quad \lim_{x\to-\infty}(2x-4),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2+x},$$
$$\lim_{x\to+\infty}x^2\Big(1-\frac{1}{x}\Big),\quad \lim_{x\to+\infty}(x^2-x),\quad \lim_{x\to-\infty}x^3\Big(1+\frac{1}{x}\Big),\quad \lim_{x\to-\infty}(x^3+x^2),$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(1-\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2})}{x(\frac{1}{x}-1)},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+2}{1-x},$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x(2+\frac{1}{x})}{(\frac{2}{x}+3)x^2},\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{2x+3x^2},\ \lim_{x\to+\infty}\Big(x-\frac{x^2-1}{x}\Big),\ \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{x^2-x}{x+2}+\frac{x^3+x^2+1}{1-x^2}\Big),$$
$$\lim_{x\to0}\frac{3}{x^2},\quad \lim_{x\to0}\frac{x(1+x)}{2x(1-2x)},\quad \lim_{x\to0}\frac{x+x^2}{2x-4x^2},\quad \lim_{x\to0}\frac{x^2(x+3)}{x(1-x)},\quad \lim_{x\to0}\frac{x^3+3x^2}{x-x^2},$$
$$\lim_{x\to1}\frac{-x}{1+x},\quad \lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{(1-x)(1+x)},\quad \lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{1-x^2},\quad \lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)},$$
$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x}{x^3+1},\quad \lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-2)},\quad \lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2},\quad \lim_{x\to0^+}\frac{x+1}{x},$$
$$\lim_{x\to0^-}\frac{x+1}{x},\quad \lim_{x\to0}\frac{x+1}{x},\quad \lim_{x\to0}\frac{x-1}{x^2},\quad \lim_{x\to1^-}\frac{x}{x-1},\quad \lim_{x\to1^+}\frac{x}{x-1},$$
$$\lim_{x\to1}\frac{x}{x-1},\quad \lim_{x\to2}\frac{x+1}{(x-2)^2},\quad \lim_{x\to2^+}\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2},\quad \lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}.$$

16. Sapendo che la radice quadrata è continua e che $\sqrt{x}$ tende a $+\infty$ per $x\to+\infty$, calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to4}\sqrt{x^3-3x},\quad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x},\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},\quad \lim_{x\to1}\frac{x+\sqrt{x}}{x-1},$$
$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\big),\quad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}\big),\quad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{2x-2}-\sqrt{x+1}\big),$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(2+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}\sqrt{2-\frac{1}{x}}}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x\big(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\big)}{x\big(1-\frac{1}{x}\big)}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x-1},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}\Big(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\Big)}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \big(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-2x}\big), \quad \lim_{x\to+\infty} \big(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}\big),$$

$$\lim_{x\to-\infty} \big(\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-3x}\big), \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

17. Ricordando che seno e coseno sono sempre compresi fra -1 e 1, e usando il teorema del confronto, calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2-\cos x), \quad \lim_{x\to-\infty} (x+\operatorname{sen} x-\cos x), \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+\operatorname{sen} x}{x},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x-1)}{x^2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+\cos(x-1)}{\sqrt{x^4+1}}, \quad \lim_{x\to0} \Big(\frac{1}{x^2}+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\Big),$$

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(\frac{x^2+x}{x-2}+\cos(x^3-2^x)\Big), \quad \lim_{x\to-\infty} (x+1)\big(2+\operatorname{sen}\sqrt{x^2-1}\big).$$

18. Ricordando che seno e coseno sono continui, che $(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ e $(1-\cos x)/x^2 \to 1/2$ per $x \to 0$, (più la regola del cambio di variabile, prodotti notevoli, scomposizioni in fattori...), calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}, \quad \lim_{x\to0} \frac{x^2-x}{\operatorname{sen} x}, \quad \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}(2x-x^2)}{x}, \quad \lim_{x\to1} \frac{x-x^2}{\operatorname{sen}(x-1)},$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x}, \quad \lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x-1}, \quad \lim_{x\to+\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} x\operatorname{sen}\frac{x-1}{x^2},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{x-1}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}, \quad \lim_{x\to0} \frac{(\cos 2x)-1}{x^2}, \quad \lim_{x\to0^+} \frac{1-\cos x}{x^3}, \quad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^3},$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{x(x-2)}, \quad \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x}, \quad \lim_{x\to0} \frac{x\operatorname{sen} x}{1-\cos^3 x}, \quad \lim_{x\to0} \frac{\cos^2 x+\cos x-2}{x^3-2x}.$$

19. Ricordando la continuità e i limiti agli estremi delle funzioni esponenziali e logaritmiche, e i limiti di a^x/x^n e $(\ln_a x)/x$ per $x \to +\infty$, oltre alle regole già viste prima, calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} (3^x-x), \quad \lim_{x\to-\infty} 2^{x-1}, \quad \lim_{x\to+\infty} (5^x-x4^x), \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x\log_2 x}{3^x},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{sen} 2^x}{3^x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3^x+1}{x^3-2x+2^x}, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3^x-1}{x^2+x-3^x},$$

$$\lim_{x\to 0^+} 3^{1/x}, \quad \lim_{x\to 0^-} 2^{2/x}, \quad \lim_{x\to+\infty} 2^x 3^{-x+1}, \quad \lim_{x\to 0} 2^{(x-1)/x^2},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \log_2(x^2-1), \quad \lim_{x\to+\infty} \log_3(3^x-2^x), \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log_2 x}{x},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \log_2 \frac{1+x}{x-1}, \quad \lim_{x\to+\infty} \big(\log_2(x+1)-\log_2 x\big), \quad \lim_{x\to 0^+} 2^{-\log_2 x},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2\sqrt{x}}{\log_2 x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2\sqrt{x}}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_2 x)^2}{x},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2(x^2)-\log_2 x}{\log_2 x}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log_2 x}{1/x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_3(3^x-2^x).$$

20. Esercizi di ricapitolazione:

$$\lim_{x\to+\infty} \big(\sqrt{2^x+x}-\sqrt{2^x-x}\big), \quad \lim_{x\to 1} 2^{1/(x-1)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2^{1/x}}{2^{1/x}},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \big(x^2-\log_2 x+2^{x-1}\big), \quad \lim_{x\to-\infty} 3^x(1-\cos 3^{-x}), \quad \lim_{x\to+\infty} 2^{x+\operatorname{sen} x},$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2+\operatorname{sen}^2 x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\operatorname{sen} x)}{1-\cos x},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{2x-\operatorname{sen} x}{x^2-2x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-x^2-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}, \quad \lim_{x\to+\infty} (x^4-2^x+\cos x),$$
$$\lim_{x\to+\infty} \Big(2x-x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to 0} \frac{2x-\operatorname{sen} x\cos x}{1-\cos x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_3(3^x-2^x+x)}{\log_2 x},$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+1-\cos\sqrt{x}}{\operatorname{sen} x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1-\operatorname{sen} x)(1-\cos x)}{\operatorname{sen} x}.$$

Esercizi del 16 marzo 2011

21. Dimostrare che la somma di due funzioni (strettamente o debolmente) crescenti è crescente. E la somma di due funzioni decrescenti? E la somma di una funzione crescente con una decrescente?

22. Dimostrare che il prodotto di due funzioni positive crescenti è crescente. E il prodotto di due funzioni negative crescenti? Lo stesso per due funzioni positive decrescenti, o negative decrescenti. E il prodotto di due funzioni crescenti che cambiano segno?

23. Verificare che per ogni $x, y \geq 0$ con $x \neq y$ si ha $\sqrt{x}-\sqrt{y} = (x-y)/(\sqrt{x}+\sqrt{y})$. Dedurre che la funzione $f(x) := \sqrt{x}$ è strettamente crescente su $[0,+\infty]$.

24. Consideriamo la funzione $f(x) := x^3/(1+x^2)$. Verificare che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(x)-f(y) = \frac{x^2+y^2+(x+y)^2+2x^2y^2}{2(1+x^2)(1+y^2)}(x-y)\,.$$

Dedurre che la funzione f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

25. Dando per noto che la successione $a_n := (1+1/n)^n$ è crescente e tende ad e, dimostrare che anche $c_n := (1+\frac{1}{2n})^n$ è crescente e trovarne il limite (osservare che $c_n = \sqrt{a_{2n}}$). Similmente per $d_n := (1+\frac{1}{3n})^{2n}$.

26. (Avanzato). Ricalcando la dimostrazione che la successione $a_n := (1+1/n)^n$ è crescente, dimostrare che anche $c_n := (1+2/n)^n$ è crescente. Dimostrare poi che c_n tende a e^2. (Per il calcolo del limite osservare che $c_{2n} = a_n^2$).

Dare per noti la continuità di esponenziale e logaritmo, nonché i limiti di $(1+1/x)^x$ per $x \to \pm\infty$; di $(1+x)^{1/x}$, $(\ln(1+x))/x$, $(e^x-1)/x$ per $x \to 0$; di $n!$, $n!/a^n$ per $n \to +\infty$.

27. Calcolare i seguenti limiti, usando per esempio la formula $a^b = e^{b \ln a}$:

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{1/x}, \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{n+2}\Big)^{n-1}, \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{n+1}{2n^2+1}\Big)^{n},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{2n+3}{n^2+1}\Big)^{n/2}, \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{2n^2+3}{n^2+1}\Big)^{n/2}, \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n^2+3}{n^2+1}\Big)^{n/2},$$

$$\lim_{x\to 0}\big(\ln(e+x)\big)^{1/x}, \quad \lim_{x\to 0}\ln\big((e+x)^{1/x}\big), \quad \lim_{x\to 0}\big(1+x+x^2\big)^{1/x},$$

$$\lim_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{1/x}, \quad \lim_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{1/x^2}, \quad \lim_{x\to 0}\big(\cos x - \operatorname{sen} x\big)^{1/x},$$

$$\lim_{x\to 0}\big(e^x+e^{2x}-1\big)^{1/\operatorname{sen} x}, \quad \lim_{x\to 0}\big(2^x+3^x-1\big)^{1/\ln(1+x)}, \quad \lim_{x\to 0}\big(e^x+\operatorname{sen} x\big)^{1/x}.$$

28. (Avanzato) Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} x\big(x-1-\sqrt{x^2-2x}\big), \qquad \lim_{x\to+\infty}\big(x-\sqrt{x^2-2x}\big)^x.$$

29. (Avanzato) Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} x\big(-1+\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\big), \qquad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\big)^x.$$

30. Giustificare le disuguaglianze

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{3}\cdots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n} \ge n\cdot 1\cdot 1\cdots 1 = n,$$

e dedurne che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{n!} = +\infty,$$

cioè che n^n va all'infinito più velocemente del fattoriale.

31. (Avanzato) Con una variante del metodo dell'esercizio precedente, dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)!} = +\infty\,.$$

32. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n^2+2n+2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!+\ln n}{n^n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+e^n}{n!}.$$

33. Studiare monotonia e limite della successione ricorsiva $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, nonché della successione dei rapporti $b_n = a_{n+1}/a_n$.

34. (Avanzato) Consideriamo la successione $a_n = \binom{2n}{n}/n^n$, dove $\binom{n}{k} = n!/(k!(n-k)!)$ è il coefficiente binomiale. Mostrare che vale la relazione ricorsiva
$$a_{n+1} = \frac{4n+2}{(n+1)^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \cdot a_n\,.$$
Studiare monotonia e limite della successione.

Esercizi del 2 aprile 2011

35. Consideriamo le funzioni x, $x^2 - 2x$, $\operatorname{sen} 2x$, $x/\operatorname{sen} x$, $2 - 2\cos x$, $\log x$, $1/(x - x^2)$, e^{1/x^2}, e^{-1/x^2} (e altre inventate sul momento) per $x \to 0$. Dire quali di queste sono infinitesime o infinite e metterle in ordine di infinito o infinitesimo crescente. Scrivere tutte le possibili notazioni di Landau che valgono fra queste funzioni.

36. Consideriamo le funzioni x, x^2-2x, $(x-1)(x+1)$, $(\operatorname{sen} x)/x$, $2-2\cos x$, $\log x$, $\log(1/x)$, $1/(x - x^2)$, e^{x^2}, e^{-x+2} (e altre inventate sul momento) per $x \to +\infty$. Dire quali di queste sono infinitesime o infinite e metterle in ordine di infinito o infinitesimo crescente. Scrivere tutte le possibili notazioni di Landau che valgono fra queste funzioni.

37. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $xf(x) \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$. Dimostrare che f ha almeno uno zero.

38. (Avanzato) Considerare la funzione $f(x) := 3x - 1$ su $[a, b] = [0, 1]$ e siano $[a_n, b_n]$ gli intervallini prodotti dal metodo di bisezione del teorema dell'esistenza degli zeri. Calcolare esplicitamente a_n, b_n per n da 1 a 3. Mostrare (per induzione) che a_n e b_n sono tutte frazioni con denominatore una potenza di 2. Dedurre che la bisezione non termina in un numero finito di passi.

39. (Avanzato) Considerare la funzione $\cos x$ sull'intervallo $[0, 3\pi]$. Siano $[a_n, b_n]$ gli intervallini prodotti dal metodo di bisezione del teorema dell'esistenza degli zeri. A cosa tendono a_n e b_n per $n \to +\infty$?

Esercizi del 27 aprile 2011

40. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che esistano finiti $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Dimostrare che f è limitata. Ha necessariamente punti di massimo o minimo globale?

41. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e supponiamo che $f(x) \to 0$ sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$. Dimostrare che esiste almeno un punto di massimo globale per f.

42. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua per la quale i limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ esistono finiti e coincidono. Dimostrare che almeno uno fra il $\sup_{\mathbb{R}} f$ e l'$\inf_{\mathbb{R}} f$ è un valore assunto da f.

43. (Avanzato) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) \to +\infty$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$. Dimostrare che esiste almeno un punto di minimo globale per f e che ogni valore maggiore del valore minimo viene assunto in almeno due punti distinti.

44. (Avanzato) Verificare che vale l'uguaglianza

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(\frac{3}{4}b^2 + \left(a + \frac{b}{2}\right)^2\right).$$

Dedurne che $a^3 - b^3$ e $a - b$ hanno sempre lo stesso segno. Dimostrare quindi che la funzione $f(x) := x^3 + x$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$. Mostrare anche che $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, che f è invertibile, e che l'inversa è continua. (Usare il teorema dei valori intermedi e il teorema sull'invertibilità).

45. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := x^2 - 2x$ nel punto generico x_0, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = -1$.

46. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := (x-1)/(x^2+1)$ nel punto $x_0 = 1$ usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Lo stesso per la derivata nel punto generico x_0. Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto $x_0 = 1$.

47. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt{x}$ nel punto generico $x_0 > 0$, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

48. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \log(3x - 1)$ nel punto generico $x_0 > 1/3$, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

49. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt[3]{x}$ nel punto generico x_0, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? (Si ricordi che si parla di funzione "derivabile" quando la derivata esiste *finita*). Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2$. (Ricordare il prodotto notevole $(a-b)(a^2+ab+b^2) = \ldots$).

50. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}$ nel punto generico x_0 per il quale $\operatorname{sen} x_0 \neq 0$, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = \pi/3$.

51. (Avanzato) Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+x^2}$ nel punto generico x_0, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

52. Calcolare le derivate nel punto generico x delle funzioni seguenti:

$$3x+8, \quad 2+x-\operatorname{sen} x, \quad 5x^2+2x-9, \quad e^x+\cos x, \quad -5x^7+3x^5-6x+1,$$
$$x\cos x, \quad (\ln x)\operatorname{sen} x, \quad (2-x)\ln x, \quad e^x(\cos x+\operatorname{sen} x), \quad (x+\operatorname{sen} x)\ln x,$$
$$\frac{x+7}{2x-5}, \quad \frac{1}{x^2+3x}, \quad \frac{3x+1}{2x^2-4x-3}, \quad \frac{(x-1)\cos x}{e^x}, \quad \frac{2x+\operatorname{sen} x}{5-\cos x} - \frac{5}{x+1},$$
$$\cos(2x-\pi), \quad \tan(1-x^2), \quad (x+e^x)^5, \quad (\operatorname{sen} 2x - \cos 3x)^2, \quad \operatorname{sen}^2\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^2,$$
$$\frac{e^{1-x}+\ln x}{(x+1)^2}, \quad \frac{\tan(1+x)}{x^2+(1-x)^2}, \quad \frac{1-(\ln x)^2}{(2-x)^2}, \quad \Big(\operatorname{sen} x + \frac{e^x+e^{-x}}{1+\operatorname{sen}^2 x}\Big)^2.$$

53. Calcolare la derivata delle seguenti somme di funzioni, specificando su quale dominio siano definite:

$$f_1(x) = \operatorname{sen} x + 3^x - \arctan x, \qquad f_2(x) = x^4 + \operatorname{arcsen} x, \qquad f_3(x) = \log x - \cos x + \sqrt{x}\,.$$

54. Calcolare la derivata dei seguenti prodotti di funzioni, specificando su quale dominio siano definite:

$$f_4(x) = x^{3/2}\log x, \qquad f_5(x) = \operatorname{sen} x\cos x, \qquad f_6(x) = e^x\,\sqrt[3]{x},$$
$$f_7(x) = 3x^{-1}\operatorname{sen} x\,\log x, \qquad f_8(x) = x^2\log x\,\arctan x, \qquad f_9(x) = 5^x\operatorname{arcsen} x\,\cos x.$$

55. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni, specificando su quale dominio siano definite:

$$f_{10}(x) = \frac{1}{x^3}, \qquad f_{11}(x) = \frac{1}{\operatorname{arcsen} x}, \qquad f_{12}(x) = \frac{1}{x^2+\cos x}\,.$$

56. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni razionali, specificando (dove fattibile) su quale dominio siano definite:

$$f_{13}(x) = \frac{x+7}{12x-5}, \qquad f_{14}(x) = \frac{x^2+3x-5}{x^2+x-1}, \qquad f_{15}(x) = \frac{5x^2+3x-1}{2-x}.$$

$$f_{16}(x) = \frac{1-2x^2+2x}{x^2-x+1}, \qquad f_{17}(x) = \frac{2-4x^3+6x^6-4x^9+x^{12}}{1-4x^3+6x^6-4x^9+x^{12}}.$$

57. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni composte, specificando su quale dominio siano definite:

$$f_{18}(x) = (3x+1)^2, \qquad f_{19}(x) = \sqrt{x^2+1}, \qquad f_{20}(x) = \log(2-3x^2),$$

$$f_{21}(x) = (5\log x)^3, \qquad f_{22}(x) = \frac{1}{\arctan(e^x+1)} \qquad f_{23}(x) = 2^{3x+\operatorname{sen} x},$$

$$f_{24}(x) = \operatorname{arcsen}(x^3-1), \qquad f_{25}(x) = \operatorname{sen}(\log(3x+5)), \qquad f_{26}(x) = \frac{e^{3x+1}}{\operatorname{sen}^2 x + 4}.$$

58. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni (forma esponenziale), specificando su quale dominio siano definite:

$$f_{27}(x) = x^{\arctan x}, \quad f_{28}(x) = (3x+5)^{\operatorname{sen} x},$$

$$f_{29}(x) = \Big(\frac{x+1}{2x+3}\Big)^x, \quad f_{30}(x) = \big(\log(\arctan x)\big)^{1/x}.$$

Esercizi del 17 maggio 2011

59. (Avanzato). Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile, e supponiamo che $f'(a)$ ed $f'(b)$ siano di segno opposto. Dimostrare che esiste $c \in [a,b]$ tale che $f'(c) = 0$. (Applicare il teorema del massimo/minimo di Weierstrass).

60. (Avanzato). Sia I un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione non monotona. Dimostrare che in I esistono tre punti $x_1 < x_2 < x_3$ tali che $f(x_2)$ non è compreso fra $f(x_1)$ e $f(x_2)$ (cioè è maggiore o minore di entrambi). Dimostrare poi che se f è anche derivabile, allora la derivata si annulla in almeno un punto.

61. Delle seguenti funizioni trovare il dominio di definizione, studiare il segno della derivata, e dedurne gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo locali e globali:

$$2x^2-3x+4, \qquad x^3-2x^2+x, \qquad \frac{x-1}{x+1}, \qquad \frac{2x-1}{x^2+4x}, \qquad \frac{2-x-x^2}{x+x^2},$$

$$x+\frac{x^2-1}{2x+4}, \qquad 2x^2+\log(x-1), \qquad \log(x^2+x-1)-3x,$$

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}, \qquad \sqrt{x^2+x+1}-\frac{x}{2}+1, \qquad \sqrt{x-2}-\log(2x+1),$$

$$\log(x+2)-\arctan(x+1), \qquad x-\operatorname{arcsen} x, \qquad \arctan x - \operatorname{arcsen} x,$$

$$2\sqrt{x+1}-\arccos x, \qquad \sqrt{\arctan x}, \qquad \log(\log x), \qquad e^{x^2-2x+3}.$$

62. Calcolare i seguenti limiti, usando eventualmente la regola de L'Hôpital se ritenuto lecito e opportuno:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x)-\log x}{\pi-2\arctan x},\qquad \lim_{x\to1^-}\frac{\pi-2\operatorname{arcsen}x}{1-x},\qquad \lim_{x\to1^-}\frac{\pi-2\operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x}},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-2\operatorname{sen}x-1}{x^2},\qquad \lim_{x\to0}\frac{3x+\log(1+x^3)-3\tan x}{1-\cos x},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{e^x+x-1-\operatorname{sen}2x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x)}{\log(1+x^2)},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(9^x+x^2)}{1+\log(e^{2x}+x)},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e(1-x)^{1/x}-1}{x},\qquad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x-\tan x}{5-e^{2x}-4\cos x+2\operatorname{sen}x},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{2-2\sqrt{1+x}+\operatorname{sen}x}{\operatorname{arcsen}x+2\sqrt{1-x}-2},\qquad \lim_{x\to0}\frac{2e^x+9\sqrt[3]{1-x}+\operatorname{sen}x-11}{\log(1-x)-\log(1+x)+2\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+12\sqrt{x^2-x+1}+5\operatorname{sen}(x-x^2)-13}{(1+\operatorname{sen}x)x},\qquad \lim_{x\to0}\frac{x^2-2+2\cos(\operatorname{sen}x)}{1-\cos(x^2)}.$$

63. Consideriamo il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{e^{-2x}-e^{-x}}.$$

È una forma indeterminata? Applicando la regola de L'Hôpital ripetutamente più volte si arriva prima o poi a una forma non indeterminata? C'è un'altra via per calcolare il limite?

64. Delle seguenti funzioni studiare il segno della derivata seconda, e dedurne gli intervalli di convessità/concavità e i punti di flesso:

$$2x^2-3x+4,\qquad x^3-2x^2+x,\qquad \frac{x-1}{x+1},\qquad \frac{2-x-x^2}{x+x^2},$$
$$x+\frac{x^2-1}{2x+4},\qquad 2x^2+\log(x-1),\qquad \log(x^2+x-1)-3x,$$
$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2},\qquad \sqrt{x^2+x+1}-\frac{x}{2}+1,\qquad \sqrt{x-2}-\log(2x+1),$$
$$x-\operatorname{arcsen}x,\qquad \arctan x-\operatorname{arcsen}x,$$
$$\log(\log x),\qquad e^{x^2-2x+3}.$$

65. Studiare le seguenti funzioni (dagli appelli estivi 2004 e 2005):

$$\frac{x-x^2}{x^2-4x+1},\qquad \frac{x^2-1}{\sqrt{|5-2x^2|}},\qquad \frac{3x^2+1}{x(x^2+3)},\qquad (2+\sqrt{2})x+\ln\left|\frac{(x-1)^2}{1-x\sqrt{2}}\right|,$$
$$x+\log\left|\frac{x-3}{3x+3}\right|,\qquad \frac{(x-1)^3}{x^2-3x+1},\qquad \frac{(x-1)(x+1)^2}{x^2+x+1}.$$

Esercizi del 7 giugno 2011

66. Trovare primitive delle seguenti funzioni, cioè funzioni le cui derivate siano le funzioni date:

$$f_1(x) = 7x^3 - 5x^2 + 3x + 2, \qquad f_2(x) = 7 - 2x - 5x^7, \qquad f_3(x) = 2\operatorname{sen} x - 13\cos x,$$
$$f_4(x) = \frac{3x^2 - 2x + 5}{2x^2}, \qquad f_5(x) = \frac{5}{1+x^2} - \frac{2}{\cos^2 x}, \qquad f_6(x) = \frac{5x^3\sqrt[3]{x}}{7x\sqrt[4]{x}},$$
$$f_7(x) = \frac{4}{\sqrt[3]{x}} - 3^x + x^2, \qquad f_8(x) = \frac{5\cos^2 x - 3}{\cos^2 x}, \qquad f_9(x) = 5\cos x + x\sqrt{x} - 5,$$
$$f_{10}(x) = 2^x + 4x^2 - 12\operatorname{sen} x, \qquad f_{11}(x) = \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2, \qquad f_{12}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{7}{x}.$$

67. Trovare primitive delle seguenti funzioni:

$$f_{13}(x) = (2x-1)^2, \qquad f_{14}(x) = \cos(3x+4), \qquad f_{15}(x) = 5e^{1-5x},$$
$$f_{16}(x) = 3\operatorname{sen} x \cos^3 x, \qquad f_{17}(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}, \qquad f_{18}(x) = \frac{1}{7x+9},$$
$$f_{19}(x) = \frac{2}{\cos^2(2x-1)}, \qquad f_{20}(x) = \sqrt{3-4x}, \qquad f_{21}(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$
$$f_{22}(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}, \qquad f_{23}(x) = \frac{5}{1+9x^2}, \qquad f_{24}(x) = \frac{2\arctan^3 x}{1+x^2}.$$

68. Trovare primitive delle seguenti funzioni utilizzando il metodo per parti:

$$f_{25}(x) = x^2e^x, \qquad f_{26}(x) = x\log(4x), \qquad f_{27}(x) = xe^{-2x},$$
$$f_{28}(x) = e^x\operatorname{sen}(2x), \qquad f_{29}(x) = \arctan x, \qquad f_{30}(x) = (3x^2-2x+1)\cos x,$$
$$f_{31}(x) = x\log^2 x, \qquad f_{32}(x) = (2x^2-x)\log x, \qquad f_{33}(x) = e^{-3x}\operatorname{sen} x.$$

69. Calcolare i seguenti integrali utilizzando la sostituzione suggerita:

$$\int \frac{1}{\sqrt{16x-4x^2-15}}\,dx, \qquad x = \frac{t}{2} + 2,$$
$$\int \frac{1}{9x^2-12x+5}\,dx, \qquad x = \frac{t}{3} + \frac{2}{3},$$
$$\int x\sqrt[3]{1+x}\,dx, \qquad x = t^3 - 1.$$
$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx, \qquad x = \log t,$$
$$\int (\operatorname{arcsen} x)^2 dx, \qquad x = \operatorname{sen} t.$$

70. Trovare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni razionali:

$$f_1(x) = \frac{3}{5x-1}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{7-2x}, \qquad f_3(x) = \frac{12x-1}{4x+3}, \qquad f_4(x) = \frac{3-x}{2x+1},$$
$$f_5(x) = \frac{x^2}{x+2}, \qquad f_6(x) = \frac{1}{x^2-6x+5}, \qquad f_7(x) = \frac{1}{4x^2-4x+1},$$
$$f_8(x) = \frac{1}{x^2+x+1}, \qquad f_9(x) = \frac{1}{2x^2-3x+1}, \qquad f_{10}(x) = \frac{1}{x^2+2x+5},$$
$$f_{11}(x) = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}, \qquad f_{12}(x) = \frac{3x+1}{(x+2)^2}, \qquad f_{13}(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1},$$
$$f_{11}(x) = \frac{x^2}{x^2-5x+4}, \qquad f_{12}(x) = \frac{2x^2-x+1}{x^2+2x+3}, \qquad f_{13}(x) = \frac{x^3}{x^2-1}.$$

71. Calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni mediante la sostituzione $t = e^x$

$$f_{17}(x) = \frac{3e^x}{e^{2x}-3e^x+2}, \qquad f_{18}(x) = \frac{2e^{2x}+e^x}{e^{2x}+1}.$$

72. (Avanzato) Ricordando le formule

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

utilizzare la sostituzione

$$x = 2\arctan t, \quad \text{ovvero} \quad t = \tan\frac{x}{2},$$

per calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni:

$$f_{14}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \qquad f_{15}(x) = \frac{1}{2\operatorname{sen} x - 5\cos x + 1},$$
$$f_{16}(x) = \frac{1}{\cos x + 2\operatorname{sen} x + 1}.$$

73. (Avanzato) Ricordando le formule

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x},$$

utilizzare la sostituzione

$$x = \arctan t, \quad \text{ovvero} \quad t = \tan x,$$

per calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni:

$$f_{17}(x) = \frac{1}{2+\operatorname{sen}^2 x}, \qquad f_{18}(x) = \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x - 4\cos^2 x - 1}.$$