Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2009/10

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Esercizi di Analisi Matematica

Esercizi del 26 febbraio 2010

1. Risolvere le disequazioni razionali seguenti:

$$\frac{1}{3+4x} < -1\,, \qquad \frac{6+3x}{6x+1} - \frac{3}{x+5} > 0\,, \qquad \frac{x}{3x+4} \geq \frac{5+6x}{3x+4}\,,$$
$$\frac{x-1}{2-x} + \frac{6}{x} \leq 0\,, \qquad \frac{x^2+2x-3}{x^2+1} < 0\,, \qquad \frac{2-3x}{1+x} \leq \frac{1+x}{5-x}\,.$$

2. Risolvere le disequazioni con valori assoluti seguenti:

$$|5+3x| < 1\,, \qquad |2-x| \geq 4\,, \qquad |1+4x| - x < 0\,, \qquad |x-3| \geq x+1\,,$$
$$-\frac{1}{2}|-2x-6| < 0\,, \qquad \frac{|5+3x|}{3x+6} < 0\,, \qquad \frac{|6x+1|}{4x+1} > 0\,,$$
$$|-1-3x| - 4\cdot|x| \leq 2x\,, \qquad 5|x| > -1-2x\,, \qquad \frac{|5x+3|}{2x+5} > \frac{5x+2}{|1+2x|}\,.$$

3. Studiare il segno delle espressioni seguenti, cioè dire per quali x sono positive, negative, nulle:

$$(1-x)(2x^2+x-3)\,, \qquad \frac{1}{3} + \frac{3}{8x+16} - \frac{11}{24(3x-2)}\,, \qquad \frac{4x^2+7x-2}{(5-x)^3}\,,$$
$$1-|x-3|\,, \qquad 1+|x+3|-3|x|\,, \qquad \frac{|3x+1|}{x+4} + \frac{4x+4}{|6+x|}\,.$$

4. Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} 1+x>0 \\ 2-3x<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x^2+x-1<0 \\ x^2<4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{5+6x}{2x+1} \leq \dfrac{3x+2}{6x+6} \\ \dfrac{x}{x+1} < 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3x \geq |4x+4|-6 \\ x^2-x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (4x-3)|5x+6| < 0 \\ \dfrac{1}{x+2} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5(x-4)<0 \\ |3x+3| \geq 6+5x \\ |x^2+x-1| < 1 \end{cases}$$

5. Dimostrare che la disuguaglianza $n! \geq 3^{n-2}$ è ereditaria almeno per $n \geq 2$. Per quali n è vera?

6. Dimostrare che $4 \cdot 5^n \geq 5 \cdot 4^n$ per $n \geq 1$. Verificato poi che $2^n + 4 \cdot 5^n > 4 \cdot 5^n \geq 5 \cdot 4^n > 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n$, dimostrare che

$$2^n + 5^n \geq 3^n + 4^n \qquad \forall n \geq 1.$$

(Per il passo induttivo sommare membro a membro con $2^n + 4 \cdot 5^n \geq 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n$).

7. Dimostrare che $(2n)! > 4^{n-1} n!(n-1)!$ per $n \geq 1$.

8. Dimostrare che $5^n \geq 2^n n^2$ per $n \geq 1$.
(Moltiplicare membro a membro per $5 \geq 2(n+1)^2/n^2$, che è vera per...).

9. Dimostrare che per $n \geq 1$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$

10. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n2^n = 2 + (n-1)2^{n+1} .$$

11. Trovare massimo e minimo dei seguenti insiemi finiti di numeri reali:

$$\left\{\frac{2}{17}, -\frac{14}{19}, \frac{1}{13}, \frac{16}{9}, -\frac{13}{8}, -\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{4}, \sqrt{2}-1, \frac{1}{\sqrt{2}+1}, -\pi\right\},$$
$$\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}, \pi, \sqrt[3]{2}-1, \sqrt{2}\right\}.$$

12. Trovare massimo, minimo (quando ci sono) ed estremo inferiore e superiore degli insiemi di numeri reali seguenti:

$$\mathbb{Q}, \quad \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}, \quad \{1/n^2 \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}, \quad [-5, +\infty],$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0, x^2 < 2\}, \quad \big\{x \in \mathbb{R} \bigm| x(x-1)(x+1) \geq 0\big\}, \quad \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x-2}{x-1} \leq 0\right\},$$
$$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x-1}{x^2-x} \leq -1\right\}, \quad \left\{\frac{n}{n-1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\right\}.$$

13. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\max\{x, 2\} < 2x\,, \quad \max\{x, 2x\} > 1 - x\,, \quad \min\{x-1, 1-x\} \geq 0\,,$$
$$\min\{x, -2x\} < \max\{1+2x, -1\}\,, \quad \min\big\{x, 3|x-1|\big\} < \frac{x}{2}\,.$$

14. Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:

$$2x+1<\sqrt{x+2},\quad x+4\le\sqrt{x+1},\quad x+4\le\sqrt{2x+7},\quad 1-2x>\sqrt{x+1},$$
$$x+3<\sqrt{2x^2+20},\quad 4-x>\sqrt{x^2-1},\quad (2-x)\big(\sqrt{x^2-1}-1\big)<0,$$
$$\sqrt{\frac{x^3-2}{x-1}}<x,\quad 4-\sqrt{x}\ge\sqrt{x-8},$$
$$\begin{cases} x+1\ge\sqrt{x^2-8} \\ 2x<7 \end{cases}\qquad \begin{cases} 2x-1\ge\sqrt{3x^2-1} \\ \dfrac{2x+1}{x-1}\ge 0 \end{cases}$$

15. Sapendo che le funzioni costanti sono continue, e che la funzione $x\mapsto x$ è continua (cioè tende a x_0 per $x\to x_0$), tende a $+\infty$ per $x\to+\infty$ e tende a $-\infty$ per $x\to-\infty$, e usando le regole su somma, prodotto e quoziente dei limiti, calcolare i limiti seguenti

$$\lim_{x\to0}2x,\quad \lim_{x\to1}(x-1),\quad \lim_{x\to-2}(x^2-1),\quad \lim_{x\to+\infty}-x,\quad \lim_{x\to-1}\frac{x}{x-1}$$
$$\lim_{x\to-\infty}x^3,\quad \lim_{x\to-\infty}(2x-4),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2+x},$$
$$\lim_{x\to+\infty}x^2\Big(1-\frac{1}{x}\Big),\quad \lim_{x\to+\infty}(x^2-x),\quad \lim_{x\to-\infty}x^3\Big(1+\frac{1}{x}\Big),\quad \lim_{x\to-\infty}(x^3+x^2),$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(1-\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2})}{x(\frac{1}{x}-1)},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+2}{1-x},$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x(2+\frac{1}{x})}{(\frac{2}{x}+3)x^2},\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{2x+3x^2},\ \lim_{x\to+\infty}\Big(x-\frac{x^2-1}{x}\Big),\ \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{x^2-x}{x+2}+\frac{x^3+x^2+1}{1-x^2}\Big),$$
$$\lim_{x\to0}\frac{3}{x^2},\quad \lim_{x\to0}\frac{x(1+x)}{2x(1-2x)},\quad \lim_{x\to0}\frac{x+x^2}{2x-4x^2},\quad \lim_{x\to0}\frac{x^2(x+3)}{x(1-x)},\quad \lim_{x\to0}\frac{x^3+3x^2}{x-x^2},$$
$$\lim_{x\to1}\frac{-x}{1+x},\quad \lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{(1-x)(1+x)},\quad \lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{1-x^2},\quad \lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)},$$
$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x}{x^3+1},\quad \lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-2)},\quad \lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2},\quad \lim_{x\to0^+}\frac{x+1}{x},$$
$$\lim_{x\to0^-}\frac{x+1}{x},\quad \lim_{x\to0}\frac{x+1}{x},\quad \lim_{x\to0}\frac{x-1}{x^2},\quad \lim_{x\to1^-}\frac{x}{x-1},\quad \lim_{x\to1^+}\frac{x}{x-1},$$
$$\lim_{x\to1}\frac{x}{x-1},\quad \lim_{x\to2}\frac{x+1}{(x-2)^2},\quad \lim_{x\to2^+}\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2},\quad \lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}.$$

16. Sapendo che la radice quadrata è continua e che $\sqrt{x}$ tende a $+\infty$ per $x\to+\infty$, calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to4}\sqrt{x^3-3x},\quad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x},\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},\quad \lim_{x\to1}\frac{x+\sqrt{x}}{x-1},$$
$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\big),\quad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}\big),\quad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{2x-2}-\sqrt{x+1}\big),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(2+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}\sqrt{2-\frac{1}{x}}},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x\big(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\big)}{x\big(1-\frac{1}{x}\big)},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{x-1},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}\Big(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\Big)},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-2x}\big),\quad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}\big),$$

$$\lim_{x\to-\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-3x}\big),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

17. Ricordando che seno e coseno sono sempre compresi fra -1 e 1, e usando il teorema del confronto, calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-\cos x),\quad \lim_{x\to-\infty}(x+\operatorname{sen}x-\cos x),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\operatorname{sen}x}{x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x-1)}{x^2},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\cos(x-1)}{\sqrt{x^4+1}},\quad \lim_{x\to0}\Big(\frac{1}{x^2}+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\Big),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^2+x}{x-2}+\cos(x^3-2^x)\Big),\quad \lim_{x\to-\infty}(x+1)\big(2+\operatorname{sen}\sqrt{x^2-1}\big).$$

18. Ricordando che seno e coseno sono continui, che $(\operatorname{sen}x)/x\to1$ e $(1-\cos x)/x^2\to1/2$ per $x\to0$, (più la regola del cambio di variabile, prodotti notevoli, scomposizioni in fattori...), calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x},\quad \lim_{x\to0}\frac{x^2-x}{\operatorname{sen}x},\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(2x-x^2)}{x},\quad \lim_{x\to1}\frac{x-x^2}{\operatorname{sen}(x-1)},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x},\quad \lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen}x}{x-1},\quad \lim_{x\to+\infty}x\operatorname{sen}\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}x\operatorname{sen}\frac{x-1}{x^2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{x-1}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2},\quad \lim_{x\to0}\frac{(\cos 2x)-1}{x^2},\quad \lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^3},\quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^3},$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x(x-2)},\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}^2x}{1-\cos x},\quad \lim_{x\to0}\frac{x\operatorname{sen}x}{1-\cos^3x},\quad \lim_{x\to0}\frac{\cos^2x+\cos x-2}{x^3-2x}.$$

19. Ricordando la continuità e i limiti agli estremi delle funzioni esponenziali e logaritmiche, e i limiti di a^x/x^n e $(\ln_a x)/x$ per $x\to+\infty$, oltre alle regole già viste prima, calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}(3^x-x),\quad \lim_{x\to-\infty}2^{x-1},\quad \lim_{x\to+\infty}(5^x-x4^x),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x\log_2x}{3^x},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{sen}2^x}{3^x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3^x+1}{x^3-2x+2^x},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3^x-1}{x^2+x-3^x},$$

$$\lim_{x\to 0^+} 3^{1/x}, \quad \lim_{x\to 0^-} 2^{2/x}, \quad \lim_{x\to+\infty} 2^x 3^{-x+1}, \quad \lim_{x\to 0} 2^{(x-1)/x^2},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_2(x^2-1), \quad \lim_{x\to+\infty} \log_3(3^x-2^x), \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log_2 x}{x},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_2 \frac{1+x}{x-1}, \quad \lim_{x\to+\infty} \bigl(\log_2(x+1)-\log_2 x\bigr), \quad \lim_{x\to 0^+} 2^{-\log_2 x},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2\sqrt{x}}{\log_2 x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2\sqrt{x}}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_2 x)^2}{x},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2(x^2)-\log_2 x}{\log_2 x}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log_2 x}{1/x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_3(3^x-2^x).$$

20. Esercizi di ricapitolazione:

$$\lim_{x\to+\infty} \bigl(\sqrt{2^x+x}-\sqrt{2^x-x}\bigr), \quad \lim_{x\to 1} 2^{1/(x-1)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2^{1/x}}{2^{1/x}},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \bigl(x^2-\log_2 x+2^{x-1}\bigr), \quad \lim_{x\to-\infty} 3^x(1-\cos 3^{-x}), \quad \lim_{x\to+\infty} 2^{x+\operatorname{sen} x},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2+\operatorname{sen}^2 x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\operatorname{sen} x)}{1-\cos x},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x-\operatorname{sen} x}{x^2-2x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-x^2-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}, \quad \lim_{x\to+\infty} (x^4-2^x+\cos x),$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(2x-x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to 0} \frac{2x-\operatorname{sen} x\cos x}{1-\cos x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_3(3^x-2^x+x)}{\log_2 x},$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+1-\cos\sqrt{x}}{\operatorname{sen} x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1-\operatorname{sen} x)(1-\cos x)}{\operatorname{sen} x}.$$

21. Calcolare i seguenti limiti, usando per esempio la formula $a^b = e^{b\ln a}$ e i limiti notevoli $(e^x-1)/x \to 1$, $(\ln(1+x))/x \to 1$ per $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} x)^{1/x}, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n-1}, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{n+1}{2n^2+1}\right)^n,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+3}{n^2+1}\right)^{n/2}, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n^2+3}{n^2+1}\right)^{n/2}, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{n/2},$$

$$\lim_{x\to 0} \bigl(\ln(e+x)\bigr)^{1/x}, \quad \lim_{x\to 0} \ln\bigl((e+x)^{1/x}\bigr), \quad \lim_{x\to 0} \bigl(1+x+x^2\bigr)^{1/x},$$

$$\lim_{x\to 0} \bigl(\cos x\bigr)^{1/x}, \quad \lim_{x\to 0} \bigl(\cos x\bigr)^{1/x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \bigl(\cos x-\operatorname{sen} x\bigr)^{1/x},$$

$$\lim_{x\to 0} \bigl(e^x+e^{2x}-1\bigr)^{1/\operatorname{sen} x}, \quad \lim_{x\to 0} \bigl(2^x+3^x-1\bigr)^{1/\ln(1+x)}, \quad \lim_{x\to 0} \bigl(e^x+\operatorname{sen} x\bigr)^{1/x}.$$

22. (Avanzato) Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} x\bigl(x-1-\sqrt{x^2-2x}\bigr), \qquad \lim_{x\to+\infty} \bigl(x-\sqrt{x^2-2x}\bigr)^x.$$

23. (Avanzato) Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} x\bigl(-1+\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\bigr), \qquad \lim_{x\to+\infty} \bigl(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\bigr)^x.$$