



Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Esercizi di Analisi Matematica

Esercizi del 14 ottobre 2008

1. Dimostrare che se $a, b, c > 0$ allora $a/(b+c) < a/b < (a+c)/b$. Cioè se si parte da una frazione positiva, questa aumenta se si aumenta il numeratore, ma cala se si aumenta il denominatore.

2. Dimostrare che $x/(1+x^2) \leq x$ quando $x \geq 0$.

3. Risolvere le disequazioni razionali seguenti:

$$\frac{1}{3+4x} < -1, \quad \frac{6+3x}{6x+1} - \frac{3}{x+5} > 0, \quad \frac{x}{3x+4} \geq \frac{5+6x}{3x+4},$$

$$\frac{x-1}{2-x} + \frac{6}{x} \leq 0, \quad \frac{x^2+2x-3}{x^2+1} < 0, \quad \frac{2-3x}{1+x} \leq \frac{1+x}{5-x}.$$

4. Da $a^2 < b^2$ segue che $a < b$? Segue che $|a| < |b|$?

5. Risolvere le disequazioni con valori assoluti seguenti:

$$|5+3x| < 1, \quad |2-x| \geq 4, \quad |1+4x| - x < 0, \quad |x-3| \geq x+1,$$

$$-\frac{1}{2}|-2x-6| < 0, \quad \frac{|5+3x|}{3x+6} < 0, \quad \frac{|6x+1|}{4x+1} > 0,$$

$$|-1-3x| - 4 \cdot |x| \leq 2x, \quad 5|x| > -1-2x, \quad \frac{|5x+3|}{2x+5} > \frac{5x+2}{|1+2x|}.$$

6. Studiare il segno delle espressioni seguenti, cioè dire per quali x sono positive, negative, nulle:

$$(1-x)(2x^2+x-3), \quad \frac{1}{3} + \frac{3}{8x+16} - \frac{11}{24(3x-2)}, \quad \frac{4x^2+7x-2}{(5-x)^3},$$

$$1 - |x-3|, \quad 1 + |x+3| - 3|x|, \quad \frac{|3x+1|}{x+4} + \frac{4x+4}{|6+x|}.$$

7. Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} 1+x > 0 \\ 2-3x < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x^2+x-1 < 0 \\ x^2 < 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{5+6x}{2x+1} \leq \frac{3x+2}{6x+6} \\ \frac{x}{x+1} < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \geq |4x+4| - 6 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (4x-3)|5x+6| < 0 \\ \frac{1}{x+2} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5(x-4) < 0 \\ |3x+3| \geq 6+5x \\ |x^2+x-1| < 1 \end{cases}$$

- 8.** Dimostrare che la disuguaglianza $n! \geq 3^{n-2}$ è ereditaria almeno per $n \geq 2$. Per quali n è vera?
- 9.** Dimostrare che $4 \cdot 5^n \geq 5 \cdot 4^n$ per $n \geq 1$. Verificato poi che $2^n + 4 \cdot 5^n > 4 \cdot 5^n \geq 5 \cdot 4^n > 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n$, dimostrare che

$$2^n + 5^n \geq 3^n + 4^n \quad \forall n \geq 1.$$

(Per il passo induttivo sommare membro a membro con $2^n + 4 \cdot 5^n \geq 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n$).

- 10.** Dimostrare che $(2n)! > 4^{n-1}n!(n-1)!$ per $n \geq 1$.
- 11.** Dimostrare che $5^n \geq 2^n n^2$ per $n \geq 1$.
(Moltiplicare membro a membro per $5 \geq 2(n+1)^2/n^2$, che è vera per...).
- 12.** Dimostrare che per $n \geq 1$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

- 13.** Dimostrare che per ogni $n \geq 1$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n2^n = 2 + (n-1)2^{n+1}.$$

- 14.** (Esercizio avanzato) Trovare delle condizioni sui coefficienti a, b, c (che possono dipendere da x ma non da n) in modo che la formula $P(n)$ seguente

$$1 \cdot x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n = a + (bn + c)x^{n+1}$$

sia ereditaria rispetto a n (cioè $P(n) \Rightarrow P(n+1)$) per $n \geq 1$. Trovare per quali coefficienti $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$. (Scrivere la formula di $P(n+1)$, rimpiazzarne una parte usando $P(n)$, semplificare e imporre che il risultato valga per ogni $n, x \dots$)

- 15.** (Esercizio avanzato) Trovare delle condizioni sui coefficienti a, b, c, d (indipendenti da n) in modo tale che la formula $P(n)$ seguente

$$1^2 \cdot 2^1 + 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + \dots + n^2 2^n = a + (bn^2 + cn + d)2^{n+1}$$

sia ereditaria rispetto a n (cioè $P(n) \Rightarrow P(n+1)$) per $n \geq 1$. Trovare per quali coefficienti $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$. (Scrivere la formula di $P(n+1)$, rimpiazzarne una parte usando $P(n)$, semplificare e imporre che il risultato valga per ogni $n \dots$)

Esercizi del 4 novembre 2008

16. Trovare massimo e minimo dei seguenti insiemi finiti di numeri reali:

$$\left\{ \frac{2}{17}, -\frac{14}{19}, \frac{1}{13}, \frac{16}{9}, -\frac{13}{8}, -\frac{5}{4}, \frac{1}{4} \right\}, \quad \left\{ \frac{1}{4}, \sqrt{2} - 1, \frac{1}{\sqrt{2} + 1}, -\pi \right\},$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}, \pi, \sqrt[3]{2} - 1, \sqrt{2} \right\}.$$

17. Trovare massimo, minimo (quando ci sono) ed estremo inferiore e superiore degli insiemi di numeri reali seguenti:

$$\mathbb{Q}, \quad \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}, \quad \{1/n^2 \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}, \quad [-5, +\infty],$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0, x^2 < 2\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x(x-1)(x+1) \geq 0\}, \quad \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-2}{x-1} \leq 0\right\},$$

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{x^2-x} \leq -1\right\}, \quad \left\{\frac{n}{n-1} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2\right\}.$$

18. Dimostrare che le seguenti uguaglianze sono vere per ogni $x \in \mathbb{R}$, disegnando anche un grafico dei due membri:

$$\max\{x, -x\} = |x|, \quad \max\{x, 0\} = \frac{x + |x|}{2}, \quad \min\{x, 1\} = \frac{x + 1 - |x - 1|}{2},$$

$$\max\{x - 1, 2 - x\} = \left|x - \frac{3}{2}\right| + \frac{1}{2}, \quad \min\{\max\{x, 0\}, 1\} = \frac{2 + x + |x| - |x - 2 + |x||}{4}.$$

$$\max\{x - 1, -x - 1, \min\{1 - x, 1 + x\}\} = ||x| - 1|.$$

19. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\max\{x, 2\} < 2x, \quad \max\{x, 2x\} > 1 - x, \quad \min\{x - 1, 1 - x\} \geq 0,$$

$$\min\{x, -2x\} < \max\{1 + 2x, -1\}, \quad \min\{x, 3|x - 1|\} < \frac{x}{2}.$$

20. Stabilire se le disuguaglianze seguenti sono vere o false per via simbolica (elevando al quadrato o al cubo ambo i membri e rimaneggiando, quando lecito, senza calcoli approssimati in virgola mobile):

$$\sqrt{5} < 1 + \sqrt{2}, \quad \sqrt{2} + \sqrt{4} < 2\sqrt{3}, \quad \sqrt[3]{3} > \sqrt{2},$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{2}} < \sqrt[3]{2}, \quad 1 - \sqrt{3} < \sqrt{5} - \sqrt{2}.$$

Esercizi del 13 novembre 2008

21. Studiare “sperimentalmente” la stabilizzazione delle cifre decimali della successione $a_n := (n+1)^2/(2n^2+1)$.

22. Studiare “sperimentalmente” la stabilizzazione delle cifre decimali della successione $r_n := a_{n+1}/a_n$, dove a_n è definito da $a_1 := 1$, $a_2 := 2$, $a_{n+2} := 3a_{n+1} - a_n$.

Ripasso su esponenziali, logaritmi e funzioni trigonometriche

Per le disuguaglianze, usare il fatto che quando $a > 1$ valgono le equivalenze $x < y \iff a^x < a^y \iff \log_a x < \log_a y$.

23. Vero o falso?

$$2^{\log_2 3} = 3, \quad 3^{\log_2 3} = 2, \quad \log_2 4 = 2, \quad \log_3(-3)^2 = -3, \quad 3^{\sqrt{2}} < \sqrt{27}, \quad \sqrt{2^x} = 2^{x/2},$$

$$\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}, \quad 5^{\log_2 3} < 5^{\log_2 5}, \quad 6^{\log_2 a} = a 3^{\log_2 a}, \quad 3^{1/x} = \frac{1}{3^x},$$

$$\log_2 \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2} \log_2 6, \quad \log_a(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \frac{1}{2} \log_a 2 + \log(1 + \sqrt{3/2}).$$

24. Trovare l'insieme di definizione delle formule seguenti (quando per i logaritmi non è indicata la base vuol dire che non ha importanza):

$$2^{1/x}, \quad \log|x|, \quad \log(x + \sqrt{x-1}), \quad \log x - \log(1-x), \quad \log \frac{x}{1-x},$$

$$\frac{1}{2-3^x}, \quad \log(2-3^x), \quad \frac{1}{\log(2-3^x)},$$

$$\log((\log_2 x)^2 - 1), \quad \log(1-2x + \sqrt{1+x}), \quad \sqrt{x+2 - \sqrt{x+1}},$$

$$\log(\min\{x-1, 2-x\}), \quad \frac{1}{1 - \sqrt[3]{x^2-1}}.$$

25. Vero o falso?

$$|\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x}, \quad \sin(x + \pi) = \sin x, \quad \sin(2\pi - x) = -\sin x,$$

$$\forall x \in [-1, 1]: \sin \arcsin x = x,$$

$$\forall x \in [0, 1]: \arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2},$$

$$\forall x \in [-1, 1]: \arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2}.$$

26. Trovare l'insieme di definizione delle formule seguenti (quando per i logaritmi non è indicata la base vuol dire che non ha importanza):

$$\sin(1/x), \quad \frac{1}{\arcsin x}, \quad \arcsin(\log_2 x), \quad \arctan(1+x), \quad \arccos \frac{1}{1+x^2},$$

$$\sqrt{x^2 + x - 6} - \arcsin(3x), \quad \log(2 + \sin(1/x)), \quad \arcsin 2^{-x}.$$

($\arcsin x$ e $\arccos x$ sono definiti quando $-1 \leq x \leq 1$; $\arctan x$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$).

Esercizi del 28 novembre 2008

27. Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:

$$2x + 1 < \sqrt{x + 2}, \quad x + 4 \leq \sqrt{x + 1}, \quad x + 4 \leq \sqrt{2x + 7}, \quad 1 - 2x > \sqrt{x + 1},$$

$$x + 3 < \sqrt{2x^2 + 20}, \quad 4 - x > \sqrt{x^2 - 1}, \quad (2 - x)(\sqrt{x^2 - 1} - 1) < 0,$$

$$\sqrt{\frac{x^3 - 2}{x - 1}} < x, \quad 4 - \sqrt{x} \geq \sqrt{x - 8},$$

$$\begin{cases} x + 1 \geq \sqrt{x^2 - 8} \\ 2x < 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 1 \geq \sqrt{3x^2 - 1} \\ \frac{2x + 1}{x - 1} \geq 0 \end{cases}$$

28. Verificare che la definizione di limite $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \text{dom } f : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di δ :

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 1 \quad \text{con } \delta = \varepsilon,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x + 1) = -1 \quad \text{con } \delta = \varepsilon/2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = 2 \quad \text{con } \delta = \varepsilon/2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2^x = 1 \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \log_2(1 + \varepsilon) & \text{se } \varepsilon \geq 1, \\ \min\{\log_2(1 + \varepsilon), -\log_2(1 - \varepsilon)\} & \text{se } 0 < \varepsilon < 1. \end{cases}$$

29. Verificare che la definizione di limite $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} \forall x \in \text{dom } f : x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di N :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{con } N = 1/\varepsilon,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{2x} = \frac{1}{2} \quad \text{con } N = 1/(2\varepsilon),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{con } N = 1/\sqrt{2\varepsilon},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^x} = 0 \quad \text{con } N = -\log_2 \varepsilon.$$

30. Verificare che la definizione di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, cioè $\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in \text{dom } f : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di δ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} = +\infty \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M \leq 0, \\ \sqrt{2/M} & \text{se } M > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2} = +\infty \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M \leq 0, \\ 1/\sqrt{M} & \text{se } M > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{|x + 1|} = +\infty \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M \leq 0, \\ 1/M & \text{se } M > 0 \end{cases}$$

- 31.** Verificare che la definizione di $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, cioè $\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{R} \forall x \in \text{dom } f : x > N \Rightarrow f(x) > M$, resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di N :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x &= +\infty \quad \text{con } N = M \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 &= +\infty \quad \text{con } N = \begin{cases} \text{non importa quanto,} & \text{se } M < 0, \\ \sqrt{M} & \text{se } M \geq 0 \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x &= +\infty \quad \text{con } N = \begin{cases} \text{non importa quanto,} & \text{se } M \leq 0, \\ \log_2 M & \text{se } M > 0 \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x+1} &= +\infty \quad \text{con } N = \begin{cases} -1/2 & \text{se } M \leq 0, \\ M + \sqrt{M + M^2} & \text{se } M > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 32.** Trovare δ o N appropriati per la definizione di limite nei seguenti casi:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 2} |x+1| &= 3, & \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} &= 0, & \lim_{x \rightarrow -1} \max\{x, 1-x\} &= 2. \end{aligned}$$

- 33.** Sapendo che le funzioni costanti sono continue, e che la funzione $x \mapsto x$ è continua, tende a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$ e tende a $-\infty$ per $x \rightarrow -\infty$, e usando le regole su somma, prodotto e quoziente dei limiti, calcolare i limiti seguenti

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} 2x, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x-1), \quad \lim_{x \rightarrow -2} (x^2-1), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} \\ &\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-4), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2+x}, \\ &\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3+x^2), \\ &\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2})}{x(\frac{1}{x}-1)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x+2}{1-x}, \\ &\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2+\frac{1}{x})}{(\frac{2}{x}+3)x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{2x+3x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x^2-1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-x}{x+2} + \frac{x^3+x^2+1}{1-x^2}\right), \\ &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+x)}{2x(1-2x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2}{2x-4x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x+3)}{x(1-x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+3x^2}{x-x^2}, \\ &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x}{1+x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(1-x)(1+x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{1-x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}, \\ &\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x}{x^3+1}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-2)}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x}, \\ &\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1}, \\ &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(x-2)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}. \end{aligned}$$

Esercizi del 16 dicembre 2008

- 34.** Sapendo che la radice quadrata è continua e che \sqrt{x} tende a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$, calcolare i limiti seguenti:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^3 - 3x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt{x}}{x-1}, \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x+1}), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x-2} - \sqrt{x+1}), \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 + \frac{1}{x})}{\sqrt{x}\sqrt{2 - \frac{1}{x}}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})}{x(1 - \frac{1}{x})}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x-1}, \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2 - \frac{1}{x}})}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-1}}, \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x}), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + x}), \\ & \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - 3x}), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \\ & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

- 35.** Ricordando che seno e coseno sono sempre compresi fra -1 e 1 , e usando il teorema del confronto, calcolare i limiti seguenti:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \cos x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sin x - \cos x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sin x}{x}, \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x-1)}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + \cos(x-1)}{\sqrt{x^4 + 1}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} + \sin \frac{1}{x} \right), \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x}{x-2} + \cos(x^3 - 2x) \right), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)(2 + \sin \sqrt{x^2 - 1}). \end{aligned}$$

- 36.** Ricordando che seno e coseno sono continui, che $(\sin x)/x \rightarrow 1$ e $(1 - \cos x)/x^2 \rightarrow 1/2$ per $x \rightarrow 0$, (più la regola del cambio di variabile, prodotti notevoli, scomposizioni in fattori...), calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x - x^2)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^2}{\sin(x-1)}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{x-1}{x^2}, \\ & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{x-1} \sin \frac{1}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos 2x) - 1}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^3}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x(x-2)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos^3 x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x + \cos x - 2}{x^3 - 2x}. \end{aligned}$$

- 37.** Ricordando la continuità e i limiti agli estremi delle funzioni esponenziali e logaritmiche, e i limiti di a^x/x^n e $(\log_a x)/x$ per $x \rightarrow +\infty$, oltre alle regole già viste prima, calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x - x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x - x4^x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \log_2 x}{3^x}, \\ & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{sen} 2^x}{3^x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3^x + 1}{x^3 - 2x + 2^x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3^x - 1}{x^2 + x - 3^x}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0^+} 3^{1/x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{2/x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x 3^{-x+1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} 2^{(x-1)/x^2}, \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2(x^2 - 1), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_3(3^x - 2^x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_2 x}{x}, \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 \frac{1+x}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_2(x+1) - \log_2 x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{-\log_2 x}, \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 \sqrt{x}}{\log_2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 \sqrt{x}}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_2 x)^2}{x}, \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(x^2) - \log_2 x}{\log_2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_2 x}{1/x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_3(3^x - 2^x). \end{aligned}$$

- 38.** Esercizi di ricapitolazione:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2^x + x} - \sqrt{2^x - x}), \quad \lim_{x \rightarrow 1} 2^{1/(x-1)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2^{1/x}}{2^{1/x}}, \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \log_2 x + 2^{x-1}), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x (1 - \cos 3^{-x}), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{x+\operatorname{sen} x}, \\ & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2 + \operatorname{sen}^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\operatorname{sen} x)}{1 - \cos x}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \operatorname{sen} x}{x^2 - 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 2^x + \cos x), \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \operatorname{sen} x \cos x}{1 - \cos x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_3(3^x - 2^x + x)}{\log_2 x}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 1 - \cos \sqrt{x}}{\operatorname{sen} x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \operatorname{sen} x)(1 - \cos x)}{\operatorname{sen} x}. \end{aligned}$$

- 39.** Dimostrare che la somma di due funzioni (strettamente o debolmente) crescenti è crescente. E la somma di due funzioni decrescenti? E la somma di una funzione crescente con una decrescente?
- 40.** Dimostrare che il prodotto di due funzioni positive crescenti è crescente. E il prodotto di due funzioni negative crescenti? Lo stesso per due funzioni positive decrescenti, o negative decrescenti. E il prodotto di due funzioni crescenti che cambiano segno?
- 41.** Verificare che per ogni $x, y \geq 0$ con $x \neq y$ si ha $\sqrt{x} - \sqrt{y} = (x - y)/(\sqrt{x} + \sqrt{y})$. Dedurre che la funzione $f(x) := \sqrt{x}$ è strettamente crescente su $[0, +\infty]$.

42. Consideriamo la funzione $f(x) := x^3/(1+x^2)$. Verificare che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(x) - f(y) = \frac{x^2 + y^2 + (x+y)^2 + 2x^2y^2}{2(1+x^2)(1+y^2)}(x-y).$$

Dedurre che la funzione f è strettamente crescente su \mathbb{R} .

43. Dando per noto che la successione $a_n := (1+1/n)^n$ è crescente e tende ad e , dimostrare che anche $c_n := (1 + \frac{1}{2n})^n$ è crescente e trovarne il limite (osservare che $c_n = \sqrt{a_{2n}}$). Similmente per $d_n := (1 + \frac{1}{3n})^{2n}$.
44. (Avanzato). Ricalcando la dimostrazione che la successione $a_n := (1+1/n)^n$ è crescente, dimostrare che anche $c_n := (1 + 2/n)^n$ è crescente. Dimostrare poi che c_n tende a e^2 . (Per il calcolo del limite osservare che $c_{2n} = a_n^2$).

Esercizi del 19 marzo 2009

Dare per noti la continuità di esponenziale e logaritmo, nonché i limiti di $(1+1/x)^x$ per $x \rightarrow \pm\infty$; di $(1+x)^{1/x}$, $(\ln(1+x))/x$, $(e^x - 1)/x$ per $x \rightarrow 0$; di $n!$, $\sqrt[n]{n!}$, $n!/a^n$ per $n \rightarrow +\infty$.

45. Giustificare le disuguaglianze

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{3} \cdots \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n} \geq n \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = n,$$

e dedurre che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty,$$

cioè che n^n va all'infinito più velocemente del fattoriale.

46. (Avanzato) Con una variante del metodo dell'esercizio precedente, dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n+1)!} = +\infty.$$

47. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n^2 + 2n + 2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! + \ln n}{n^n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + e^n}{n!}.$$

48. Calcolare i seguenti limiti, usando fra l'altro per esempio il fatto che se $0 < f(x) \rightarrow a$ e $g(x) \rightarrow b$ allora $f(x)^{g(x)} \rightarrow a^b$, se non si è nei casi indeterminati 1^∞ , ∞^0 e 0^0 :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} {}^{n+1}\sqrt{n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2n^3 - 3n + 1}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n - n}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n! - e^n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n^2]{e^n + 3}. \end{aligned}$$

49. Calcolare i seguenti limiti, usando per esempio la formula $a^b = e^{b \ln a}$:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/x}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n-1}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n+1}{2n^2+1}\right)^n, \\ & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+3}{n^2+1}\right)^{n/2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n^2+3}{n^2+1}\right)^{n/2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{n/2}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e+x))^{1/x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln((e+x)^{1/x}), \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x+x^2)^{1/x}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - \sin x)^{1/x}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{2x} - 1)^{1/\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (2^x + 3^x - 1)^{1/\ln(1+x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \sin x)^{1/x}. \end{aligned}$$

50. (Avanzato) Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x-1-\sqrt{x^2-2x}), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-\sqrt{x^2-2x})^x.$$

51. (Avanzato) Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(-1 + \sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+x}), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+x})^x.$$

52. (Avanzato) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni $x_0 \in [a, b]$ il $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ esista e abbia valore finito oppure $-\infty$. Dimostrare che f è limitata superiormente. (Ritoccare la dimostrazione del teorema di limitatezza).

53. (Avanzato) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che per ogni $x_0 \in [a, b]$ esista $\delta > 0$ tale che la f è debolmente crescente su $[a, b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Dimostrare che f è debolmente crescente su tutto $[a, b]$.

54. (Avanzato) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che è continua a sinistra in ogni punto, cioè $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ per ogni x_0 . La f è necessariamente limitata? (Cosa succede per $x_0 = a$?). E se si aggiunge l'ipotesi che f sia continua in $x_0 = a$?

55. (Avanzato) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che esistano finiti $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Dimostrare che f è limitata. Ha necessariamente punti di massimo o minimo globale?

56. (Avanzato) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e supponiamo che $f(x) \rightarrow 0$ sia per $x \rightarrow -\infty$ che per $x \rightarrow +\infty$. Dimostrare che esiste almeno un punto di massimo globale per f .

57. (Avanzato) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $xf(x) \rightarrow +\infty$ sia per $x \rightarrow -\infty$ che per $x \rightarrow +\infty$. Dimostrare che f ha almeno uno zero.

- 58.** (Avanzato) Considerare la funzione $f(x) := 3x - 1$ su $[a, b] = [0, 1]$ e siano $[a_n, b_n]$ gli intervallini prodotti dal metodo di bisezione del teorema dell'esistenza degli zeri. Calcolare esplicitamente a_n, b_n per n da 1 a 3. Mostrare (per induzione) che a_n e b_n sono tutte frazioni con denominatore una potenza di 2. Dedurre che la bisezione non termina in un numero finito di passi.
- 59.** (Avanzato) Considerare la funzione $\cos x$ sull'intervallo $[0, 3\pi]$. Siano $[a_n, b_n]$ gli intervallini prodotti dal metodo di bisezione del teorema dell'esistenza degli zeri. A cosa tendono a_n e b_n per $n \rightarrow +\infty$?
- 60.** (Avanzato) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua per la quale i limiti per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow -\infty$ esistono finiti e coincidono. Dimostrare che almeno uno fra il $\sup_{\mathbb{R}} f$ e l' $\inf_{\mathbb{R}} f$ è un valore assunto da f .
- 61.** (Avanzato) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) \rightarrow +\infty$ sia per $x \rightarrow +\infty$ che per $x \rightarrow -\infty$. Dimostrare che esiste almeno un punto di minimo globale per f e che ogni valore maggiore del valore minimo viene assunto in almeno due punti distinti.
- 62.** (Avanzato) Verificare che vale l'uguaglianza

$$a^3 - b^3 = (a - b) \left(\frac{3}{4}b^2 + \left(a + \frac{b}{2} \right)^2 \right).$$

Dedurre che $a^3 - b^3$ e $a - b$ hanno sempre lo stesso segno. Dimostrare quindi che la funzione $f(x) := x^3 + x$ è strettamente crescente su tutto \mathbb{R} . Mostrare anche che $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, che f è invertibile, e che l'inversa è continua. (Usare il teorema dei valori intermedi e il teorema sull'invertibilità).

- 63.** Calcolare la derivata della funzione $f(x) := x^2 - 2x$ nel punto generico x_0 , usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = -1$.
- 64.** Calcolare la derivata della funzione $f(x) := (x - 1)/(x^2 + 1)$ nel punto $x_0 = 1$ usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Lo stesso per la derivata nel punto generico x_0 . Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto $x_0 = 1$.
- 65.** Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt{x}$ nel punto generico $x_0 > 0$, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2$.
- 66.** Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \log(3x - 1)$ nel punto generico $x_0 > 1/3$, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.
- 67.** Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt[3]{x}$ nel punto generico x_0 , usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? (Si ricordi che si parla di funzione "derivabile" quando la derivata esiste *finita*). Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2$. (Ricordare il prodotto notevole $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = \dots$).

- 68.** Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt[3]{\sin x}$ nel punto generico x_0 per il quale $\sin x_0 \neq 0$, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = \pi/3$.
- 69.** (Avanzato) Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+x^2}$ nel punto generico x_0 , usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

Esercizi del 15 aprile 2009

- 70.** Calcolare le derivate nel punto generico x delle funzioni seguenti:

$$\begin{aligned}
 & 3x + 8, \quad 2 + x - \sin x, \quad 5x^2 + 2x - 9, \quad e^x + \cos x, \quad -5x^7 + 3x^5 - 6x + 1, \\
 & x \cos x, \quad (\ln x) \sin x, \quad (2-x) \ln x, \quad e^x (\cos x + \sin x), \quad (x + \sin x) \ln x, \\
 & \frac{x+7}{2x-5}, \quad \frac{1}{x^2+3x}, \quad \frac{3x+1}{2x^2-4x-3}, \quad \frac{(x-1) \cos x}{e^x}, \quad \frac{2x + \sin x}{5 - \cos x} - \frac{5}{x+1}, \\
 & \cos(2x - \pi), \quad \tan(1 - x^2), \quad (x + e^x)^5, \quad (\sin 2x - \cos 3x)^2, \quad \sin^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2, \\
 & \frac{e^{1-x} + \ln x}{(x+1)^2}, \quad \frac{\tan(1+x)}{x^2 + (1-x)^2}, \quad \frac{1 - (\ln x)^2}{(2-x)^2}, \quad \left(\sin x + \frac{e^x + e^{-x}}{1 + \sin^2 x}\right)^2.
 \end{aligned}$$

- 71.** Calcolare la derivata delle seguenti somme di funzioni, specificando su quale dominio siano definite:

$$f_1(x) = \sin x + 3^x - \arctan x, \quad f_2(x) = x^4 + \arcsin x, \quad f_3(x) = \log x - \cos x + \sqrt{x}.$$

- 72.** Calcolare la derivata dei seguenti prodotti di funzioni, specificando su quale dominio siano definite:

$$\begin{aligned}
 f_4(x) &= x^{3/2} \log x, & f_5(x) &= \sin x \cos x, & f_6(x) &= e^x \sqrt[3]{x}, \\
 f_7(x) &= 3x^{-1} \sin x \log x, & f_8(x) &= x^2 \log x \arctan x, & f_9(x) &= 5^x \arcsin x \cos x.
 \end{aligned}$$

- 73.** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni, specificando su quale dominio siano definite:

$$f_{10}(x) = \frac{1}{x^3}, \quad f_{11}(x) = \frac{1}{\arcsin x}, \quad f_{12}(x) = \frac{1}{x^2 + \cos x}.$$

- 74.** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni razionali, specificando (dove fattibile) su quale dominio siano definite:

$$\begin{aligned}
 f_{13}(x) &= \frac{x+7}{12x-5}, & f_{14}(x) &= \frac{x^2+3x-5}{x^2+x-1}, & f_{15}(x) &= \frac{5x^2+3x-1}{2-x}, \\
 f_{16}(x) &= \frac{1-2x^2+2x}{x^2-x+1}, & f_{17}(x) &= \frac{2-4x^3+6x^6-4x^9+x^{12}}{1-4x^3+6x^6-4x^9+x^{12}}.
 \end{aligned}$$

- 75.** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni composte, specificando su quale dominio siano definite:

$$\begin{aligned}
 f_{18}(x) &= (3x + 1)^2, & f_{19}(x) &= \sqrt{x^2 + 1}, & f_{20}(x) &= \log(2 - 3x^2), \\
 f_{21}(x) &= (5 \log x)^3, & f_{22}(x) &= \frac{1}{\arctan(e^x + 1)}, & f_{23}(x) &= 2^{3x + \operatorname{sen} x}, \\
 f_{24}(x) &= \operatorname{arcsen}(x^3 - 1), & f_{25}(x) &= \operatorname{sen}(\log(3x + 5)), & f_{26}(x) &= \frac{e^{3x+1}}{\operatorname{sen}^2 x + 4}.
 \end{aligned}$$

- 76.** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni (forma esponenziale), specificando su quale dominio siano definite:

$$\begin{aligned}
 f_{27}(x) &= x^{\arctan x}, & f_{28}(x) &= (3x + 5)^{\operatorname{sen} x}, \\
 f_{29}(x) &= \left(\frac{x + 1}{2x + 3}\right)^x, & f_{30}(x) &= (\log(\arctan x))^{1/x}.
 \end{aligned}$$

- 77.** (Avanzato). Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, e supponiamo che $f'(a)$ ed $f'(b)$ siano di segno opposto. Dimostrare che esiste $c \in [a, b]$ tale che $f'(c) = 0$. (Applicare il teorema del massimo/minimo di Weierstrass).

- 78.** (Avanzato). Sia I un intervallo e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non monotona. Dimostrare che in I esistono tre punti $x_1 < x_2 < x_3$ tali che $f(x_2)$ non è compreso fra $f(x_1)$ e $f(x_3)$ (cioè è maggiore o minore di entrambi). Dimostrare poi che se f è anche derivabile, allora la derivata si annulla in almeno un punto.

- 79.** Delle seguenti funzioni trovare il dominio di definizione, studiare il segno della derivata, e dedurre gli intervalli di crescita/decrecenza e i punti di massimo/minimo locali e globali:

$$\begin{aligned}
 &2x^2 - 3x + 4, & x^3 - 2x^2 + x, & \frac{x - 1}{x + 1}, & \frac{2x - 1}{x^2 + 4x}, & \frac{2 - x - x^2}{x + x^2}, \\
 &x + \frac{x^2 - 1}{2x + 4}, & 2x^2 + \log(x - 1), & \log(x^2 + x - 1) - 3x, \\
 &\sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 2}, & \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{x}{2} + 1, & \sqrt{x - 2} - \log(2x + 1), \\
 &\log(x + 2) - \arctan(x + 1), & x - \operatorname{arcsen} x, & \arctan x - \operatorname{arcsen} x, \\
 &2\sqrt{x + 1} - \arccos x, & \sqrt{\arctan x}, & \log(\log x), & e^{x^2 - 2x + 3}.
 \end{aligned}$$

- 80.** Calcolare i seguenti limiti, usando eventualmente la regola de L'Hôpital se ritenuto lecito e opportuno:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + x) - \log x}{\pi - 2 \arctan x}, & \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi - 2 \operatorname{arcsen} x}{1 - x}, & \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi - 2 \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x}}, \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2 \operatorname{sen} x - 1}{x^2}, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \log(1 + x^3) - 3 \tan x}{1 - \cos x},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x + x - 1 - \operatorname{sen} 2x}, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+x)}{\log(1+x^2)}, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(9^x + x^2)}{1 + \log(e^{2x} + x)}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(1-x)^{1/x} - 1}{x}, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - \tan x}{5 - e^{2x} - 4 \cos x + 2 \operatorname{sen} x}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\sqrt{1+x} + \operatorname{sen} x}{\operatorname{arcsen} x + 2\sqrt{1-x} - 2}, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x + 9\sqrt[3]{1-x} + \operatorname{sen} x - 11}{\log(1-x) - \log(1+x) + 2\sqrt{1+x} - 2\sqrt{1-x}}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 12\sqrt{x^2 - x + 1} + 5 \operatorname{sen}(x - x^2) - 13}{(1 + \operatorname{sen} x)x}, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2 \cos(\operatorname{sen} x)}{1 - \cos(x^2)}. \end{aligned}$$

81. Consideriamo il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{e^{-2x} - e^{-x}}.$$

È una forma indeterminata? Applicando la regola de L'Hôpital ripetutamente più volte si arriva prima o poi a una forma non indeterminata? C'è un'altra via per calcolare il limite?

82. Delle seguenti funzioni studiare il segno della derivata seconda, e dedurne gli intervalli di convessità/concavità e i punti di flesso:

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 3x + 4, & x^3 - 2x^2 + x, & \frac{x-1}{x+1}, & \frac{2-x-x^2}{x+x^2}, \\ & x + \frac{x^2-1}{2x+4}, & 2x^2 + \log(x-1), & \log(x^2+x-1) - 3x, \\ & \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}, & \sqrt{x^2+x+1} - \frac{x}{2} + 1, & \sqrt{x-2} - \log(2x+1), \\ & & x - \operatorname{arcsen} x, & \arctan x - \operatorname{arcsen} x, \\ & & \log(\log x), & e^{x^2-2x+3}. \end{aligned}$$

83. Studiare le seguenti funzioni (dagli appelli estivi 2004 e 2005):

$$\begin{aligned} & \frac{x-x^2}{x^2-4x+1}, & \frac{x^2-1}{\sqrt{|5-2x^2|}}, & \frac{3x^2+1}{x(x^2+3)}, & (2+\sqrt{2})x + \ln \left| \frac{(x-1)^2}{1-x\sqrt{2}} \right|, \\ & x + \log \left| \frac{x-3}{3x+3} \right|, & \frac{(x-1)^3}{x^2-3x+1}, & \frac{(x-1)(x+1)^2}{x^2+x+1}. \end{aligned}$$

Esercizi del 14 maggio 2009

84. Trovare i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni centrati nei punti x_0 e degli ordini n specificati:

$$\begin{aligned} & e^x, & x_0 = 1, & n = 3; & \operatorname{sen} x, & x_0 = \pi/6, & n = 2; \\ & \frac{x}{1-x}, & x_0 = 0, & n = 3; & \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & x_0 = 0, & n = 4; \\ & (x-1)e^x, & x_0 = 0, & n = 4; & \log(1-x), & x_0 = 0, & n = 3; \\ & x^2 \cos x, & x_0 = 0, & n = 5; & \cos(x-x^2), & x_0 = 0, & n = 3; \\ & e^x \operatorname{sen} x, & x_0 = 0, & n = 3; & \sqrt{1+x}, & x_0 = 0, & n = 3. \end{aligned}$$

85. Calcolare i seguenti limiti usando i polinomi di Taylor:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - e^x - \cos x}{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2x - \cos x - 2 \sin x}{2 - x^2 - 2 \cos x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2 \cos x - 2 \sin x}{1 - \cos x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x^2 - \cos x - \sin x}{x^3}.$$

86. Data la funzione $f(x) = (1-x) \log(1-x)$, dimostrare che la derivata n -esima per $n \geq 2$ è

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-2)!}{(1-x)^{n-1}}.$$

Dedurre che il polinomio di MacLaurin di f di ordine n è

$$-x + \frac{x^2}{2 \cdot 1} + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \frac{x^5}{5 \cdot 4} + \cdots + \frac{x^n}{n(n-1)}.$$

87. Data la funzione $f(x) = 1/(1-x)^2$, dimostrare che la derivata n -esima per $n \geq 0$ è

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}.$$

Dedurre che il polinomio di MacLaurin di f di ordine n è

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots + (n+1)x^n.$$

88. (Avanzato) Siano f, g due funzioni derivabili n volte, e siano F, G i loro polinomi di MacLaurin di ordine n . Sia poi H il polinomio ottenuto cancellando nel prodotto $F \cdot G$ tutti i monomi di grado $> n$. Dimostrare che H è il polinomio di MacLaurin del prodotto $f \cdot g$.

Esercizi del 4 giugno 2009

89. (Avanzato). Siano $f(x) := x^2$, $F(x) := x^3/3$ per $x \in [0, 1]$, e sia $0 < \varepsilon \leq 1$. Mostrare che

$$\delta(\bar{x}) := \frac{\varepsilon}{1 + \bar{x}}$$

è un calibro che fa tornare i conti nella dimostrazione del teorema fondamentale, ossia è tale che

$$0 < |h| \leq \delta(\bar{x}) \text{ e } x+h \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad F'(\bar{x}) - \varepsilon \leq \frac{F(\bar{x}+h) - F(\bar{x})}{h} \leq F'(\bar{x}) + \varepsilon.$$

Dedurre per esempio che se Π è una suddivisione di $[0, 1]$ di ampiezza minore di $\varepsilon/2$ allora $|S(f, \Pi) - 1/3| < \varepsilon$.

90. Trovare primitive delle seguenti funzioni, cioè funzioni le cui derivate siano le funzioni date:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= 7x^3 - 5x^2 + 3x + 2, & f_2(x) &= 7 - 2x - 5x^7, & f_3(x) &= 2 \operatorname{sen} x - 13 \cos x, \\
 f_4(x) &= \frac{3x^2 - 2x + 5}{2x^2}, & f_5(x) &= \frac{5}{1 + x^2} - \frac{2}{\cos^2 x}, & f_6(x) &= \frac{5x^3 \sqrt[3]{x}}{7x \sqrt[4]{x}}, \\
 f_7(x) &= \frac{4}{\sqrt[3]{x}} - 3^x + x^2, & f_8(x) &= \frac{5 \cos^2 x - 3}{\cos^2 x}, & f_9(x) &= 5 \cos x + x\sqrt{x} - 5, \\
 f_{10}(x) &= 2^x + 4x^2 - 12 \operatorname{sen} x, & f_{11}(x) &= \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2, & f_{12}(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{7}{x}.
 \end{aligned}$$

91. Trovare primitive delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
 f_{13}(x) &= (2x - 1)^2, & f_{14}(x) &= \cos(3x + 4), & f_{15}(x) &= 5e^{1-5x}, \\
 f_{16}(x) &= 3 \operatorname{sen} x \cos^3 x, & f_{17}(x) &= \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 1}, & f_{18}(x) &= \frac{1}{7x + 9}, \\
 f_{19}(x) &= \frac{2}{\cos^2(2x - 1)}, & f_{20}(x) &= \sqrt{3 - 4x}, & f_{21}(x) &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \\
 f_{22}(x) &= \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}, & f_{23}(x) &= \frac{5}{1 + 9x^2}, & f_{24}(x) &= \frac{2 \arctan^3 x}{1 + x^2}.
 \end{aligned}$$

92. Trovare primitive delle seguenti funzioni utilizzando il metodo per parti:

$$\begin{aligned}
 f_{25}(x) &= x^2 e^x, & f_{26}(x) &= x \log(4x), & f_{27}(x) &= x e^{-2x}, \\
 f_{28}(x) &= e^x \operatorname{sen}(2x), & f_{29}(x) &= \arctan x, & f_{30}(x) &= (3x^2 - 2x + 1) \cos x, \\
 f_{31}(x) &= x \log^2 x, & f_{32}(x) &= (2x^2 - x) \log x, & f_{33}(x) &= e^{-3x} \operatorname{sen} x.
 \end{aligned}$$

93. Calcolare i seguenti integrali utilizzando la sostituzione suggerita:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{16x - 4x^2 - 15}} dx, & \quad x = \frac{t}{2} + 2, \\
 \int \frac{1}{9x^2 - 12x + 5} dx, & \quad x = \frac{t}{3} + \frac{2}{3}, \\
 \int x \sqrt[3]{1+x} dx, & \quad x = t^3 - 1. \\
 \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx, & \quad x = \log t, \\
 \int (\operatorname{arcsen} x)^2 dx, & \quad x = \operatorname{sen} t.
 \end{aligned}$$

94. Trovare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni razionali:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \frac{3}{5x-1}, & f_2(x) &= \frac{1}{7-2x}, & f_3(x) &= \frac{12x-1}{4x+3}, & f_4(x) &= \frac{3-x}{2x+1}, \\
 f_5(x) &= \frac{x^2}{x+2}, & f_6(x) &= \frac{1}{x^2-6x+5}, & f_7(x) &= \frac{1}{4x^2-4x+1}, \\
 f_8(x) &= \frac{1}{x^2+x+1}, & f_9(x) &= \frac{1}{2x^2-3x+1}, & f_{10}(x) &= \frac{1}{x^2+2x+5}, \\
 f_{11}(x) &= \frac{2x-1}{x^2-3x+2}, & f_{12}(x) &= \frac{3x+1}{(x+2)^2}, & f_{13}(x) &= \frac{x+1}{x^2+x+1}, \\
 f_{14}(x) &= \frac{x^2}{x^2-5x+4}, & f_{15}(x) &= \frac{2x^2-x+1}{x^2+2x+3}, & f_{16}(x) &= \frac{x^3}{x^2-1}.
 \end{aligned}$$

95. Ricordando le formule

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}},$$

utilizzare la sostituzione

$$x = 2 \arctan t, \quad \text{ovvero} \quad t = \tan \frac{x}{2},$$

per calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
 f_{14}(x) &= \frac{1}{\sin x}, & f_{15}(x) &= \frac{1}{2 \sin x - 5 \cos x + 1}, \\
 f_{16}(x) &= \frac{1}{\cos x + 2 \sin x + 1}.
 \end{aligned}$$

96. Calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni mediante la sostituzione $t = e^x$

$$f_{17}(x) = \frac{3e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2}, \quad f_{18}(x) = \frac{2e^{2x} + e^x}{e^{2x} + 1}.$$

97. Ricordando le formule

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x},$$

utilizzare la sostituzione

$$x = \arctan t, \quad \text{ovvero} \quad t = \tan x,$$

per calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni:

$$f_{17}(x) = \frac{1}{2 + \sin^2 x}, \quad f_{18}(x) = \frac{1}{2 \sin^2 x - 4 \cos^2 x - 1}.$$