Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2003/04

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Esercizi di Analisi Matematica

Esercizi dell'8 Ottobre 2003

1. Dimostrare che se $a, b, c > 0$ allora $a/(b+c) < a/b < (a+c)/b$. Cioè se si parte da una frazione positiva, questa aumenta se si aumenta il numeratore, ma cala se si aumenta il denominatore.

2. Da $a^2 < b^2$ segue che $a < b$? Segue che $|a| < |b|$?

3. Dimostrare che $x/(1+x^2) \leq x$ quando $x \geq 0$.

4. Risolvere le disequazioni razionali seguenti:

$$\frac{1}{3+4x} < -1\,, \qquad \frac{6+3x}{6x+1} - \frac{3}{x+5} > 0\,, \qquad \frac{x}{3x+4} \geq \frac{5+6x}{3x+4}\,,$$
$$\frac{x-1}{2-x} + \frac{6}{x} \leq 0\,, \qquad \frac{x^2+2x-3}{x^2+1} < 0\,, \qquad \frac{2-3x}{1+x} \leq \frac{1+x}{5-x}\,.$$

5. Risolvere le disequazioni con valori assoluti seguenti:

$$|5+3x| < 1\,, \qquad |2-x| \geq 4\,, \qquad |1+4x| - x < 0\,, \qquad |x-3| \geq x+1\,,$$
$$-\frac{1}{2}|-2x-6| < 0\,, \qquad \frac{|5+3x|}{3x+6} < 0\,, \qquad \frac{|6x+1|}{4x+1} > 0\,,$$
$$|-1-3x| - 4 \cdot |x| \leq 2x\,, \qquad 5|x| > -1-2x\,, \qquad \frac{|5x+3|}{2x+5} > \frac{5x+2}{|1+2x|}\,.$$

6. Studiare il segno delle espressioni seguenti:

$$(1-x)(2x^2+x-3)\,, \qquad \frac{1}{3} + \frac{3}{8x+16} - \frac{11}{24(3x-2)}\,, \qquad \frac{4x^2+7x-2}{(5-x)^3}\,,$$
$$1-|x-3|\,, \qquad 1+|x+3|-3|x|\,, \qquad \frac{|3x+1|}{x+4} + \frac{4x+4}{|6+x|}\,.$$

7. Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} 1+x > 0 \\ 2-3x < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x^2+x-1 < 0 \\ x^2 < 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{5+6x}{2x+1} \leq \dfrac{3x+2}{6x+6} \\ \dfrac{x}{x+1} < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \geq |4x+4| - 6 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (4x-3)|5x+6| < 0 \\ \dfrac{1}{x+2} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5(x-4) < 0 \\ |3x+3| \geq 6+5x \\ |x^2+x-1| < 1 \end{cases}$$

Esercizi del 16 Ottobre 2003

8. Dimostrare che la disuguaglianza $n! \geq 3^{n-2}$ è ereditaria almeno per $n \geq 2$. Per quali n è vera?

9. Dimostrare che $4 \cdot 5^n \geq 5 \cdot 4^n$ per $n \geq 1$. Verificato poi che $2^n + 4 \cdot 5^n > 4 \cdot 5^n \geq 5 \cdot 4^n > 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n$, dimostrare che

$$2^n + 5^n \geq 3^n + 4^n \qquad \forall n \geq 1.$$

(Per il passo induttivo sommare membro a membro con $2^n + 4 \cdot 5^n \geq 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 4^n$).

10. Dimostrare che $(2n)! > 4^{n-1} n!(n-1)!$ per $n \geq 1$.

11. Dimostrare che $5^n \geq 2^n n^2$ per $n \geq 1$.
(Moltiplicare membro a membro per $5 \geq 2(n+1)^2/n^2$, che è vera per...).

12. Dimostrare che per $n \geq 1$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

13. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n2^n = 2 + (n-1)2^{n+1}.$$

14. (Esercizio avanzato) Trovare delle condizioni sui coefficienti a, b, c (che possono dipendere da x ma non da n) in modo che la formula $P(n)$ seguente

$$1 \cdot x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n = a + (bn + c)x^{n+1}$$

sia ereditaria rispetto a n (cioè $P(n) \Rightarrow P(n+1)$) per $n \geq 1$. Trovare per quali coefficienti $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

15. (Esercizio avanzato) Trovare delle condizioni sui coefficienti a, b, c, d (indipendenti da n) in modo tale che la formula $P(n)$ seguente

$$1^2 \cdot 2^1 + 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + \cdots + n^2 2^n = a + (bn^2 + cn + d)2^{n+1}$$

sia ereditaria rispetto a n (cioè $P(n) \Rightarrow P(n+1)$) per $n \geq 1$. Trovare per quali coefficienti $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

Esercizi del 24 Ottobre 2003

16. Trovare massimo e minimo dei seguenti insiemi finiti di numeri reali:

$$\left\{\frac{2}{17}, -\frac{14}{19}, \frac{1}{13}, \frac{16}{9}, -\frac{13}{8}, -\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{4}, \sqrt{2}-1, \frac{1}{\sqrt{2}+1}, -\pi\right\},$$
$$\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}, \pi, \sqrt[3]{2}-1, \sqrt{2}\right\}.$$

17. Trovare massimo, minimo (se ci sono) ed estremo inferiore e superiore degli insiemi di numeri reali seguenti:

$$\mathbb{Q}, \quad \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}, \quad \{1/n^2 \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}, \quad [-5, +\infty[,$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0, x^2 < 2\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x(x-1)(x+1) \geq 0\}, \quad \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x-2}{x-1} \leq 0\right\},$$
$$\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x-1}{x^2-x} \leq -1\right\}, \quad \left\{\frac{n}{n-1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, n \geq 2\right\}.$$

18. Dimostrare che le seguenti uguaglianze sono vere per ogni $x \in \mathbb{R}$, disegnando anche un grafico dei due membri:

$$\max\{x, -x\} = |x|, \quad \max\{x, 0\} = \frac{x+|x|}{2}, \quad \min\{x, 1\} = \frac{x+1-|x-1|}{2},$$
$$\max\{x-1, 2-x\} = \left|x - \frac{3}{2}\right| + \frac{1}{2}, \quad \min\{\max\{x, 0\}, 1\} = \frac{2+x+|x| - \big|x-2+|x|\big|}{4}.$$
$$\max\Big\{x-1, -x-1, \min\{1-x, 1+x\}\Big\} = \big||x|-1\big|.$$

19. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\max\{x, 2\} < 2x, \quad \max\{x, 2x\} > 1-x, \quad \min\{x-1, 1-x\} \geq 0,$$
$$\min\{x, -2x\} < \max\{1+2x, -1\}, \quad \min\{x, 3|x-1|\} < \frac{x}{2}.$$

Esercizi del 3 Novembre 2003

20. Dimostrare le disuguaglianze seguenti per via simbolica:

$$\sqrt{5} < 1+\sqrt{2}, \quad \sqrt{2}+\sqrt{4} < 2\sqrt{3}, \quad \sqrt[3]{3} > \sqrt{2},$$
$$\sqrt{1+\sqrt{2}} > \sqrt[3]{2}, \quad 1-\sqrt{3} < \sqrt{5}-\sqrt{2}.$$

21. Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:

$$2x+1<\sqrt{x+2},\quad x+4\le\sqrt{x+1},\quad x+4\le\sqrt{2x+7},\quad 1-2x>\sqrt{x+1},$$
$$x+3<\sqrt{2x^2+20},\quad 4-x>\sqrt{x^2-1},\quad (2-x)\big(\sqrt{x^2-1}-1\big)<0,$$
$$\sqrt{\frac{x^3-2}{x-1}}<x,\quad 4-\sqrt{x}\ge\sqrt{x-8},$$
$$\begin{cases} x+1\ge\sqrt{x^2-8} \\ 2x<7 \end{cases}\qquad \begin{cases} 2x-1\ge\sqrt{3x^2-1} \\ \dfrac{2x+1}{x-1}\ge 0 \end{cases}$$

Esercizi del 7 Novembre 2003

22. Vero o falso?

$$2^{\log_2 3}=3,\quad 3^{\log_2 3}=2,\quad \log_2 4=2,\quad \log_3(-3)^2=-3,\quad 3^{\sqrt{2}}<\sqrt{27},\quad \sqrt{2^x}=2^{x/2},$$
$$\log_2\sqrt[3]{2}=\frac{1}{3},\quad 5^{\log_2 3}<5^{\log_2 5},\quad 6^{\log_2 a}=a3^{\log_2 a},\quad 3^{1/x}=\frac{1}{3^x},$$
$$\log_2\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}>\frac{1}{2}\log_2 6,\quad \log_a\big(\sqrt{2}+\sqrt{3}\big)=\frac{1}{2}\log_a 2+\log\big(1+\sqrt{3/2}\big),$$
$$|\operatorname{sen}x|=\sqrt{1-\cos^2 x},\quad \operatorname{sen}(x+\pi)=\operatorname{sen}x,\quad \operatorname{sen}(2\pi-x)=-\operatorname{sen}x,$$
$$\big(\forall x\in[-1,1]\ \operatorname{sen}\operatorname{arcsen}x=x\big),\quad \big(\forall x\in[0,1]\ \arccos x=\operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}\big),$$
$$\big(\forall x\in[-1,1]\ \arccos x=\operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}\big).$$

23. Trovare l'insieme di definizione delle formule seguenti (quando per i logaritmi non è indicata la base vuol dire che non ha importanza):

$$2^{1/x},\quad \log|x|,\quad \log\big(x+\sqrt{x-1}\big),\quad \log x-\log(1-x),\quad \log\frac{x}{1-x},$$
$$\frac{1}{2-3^x},\quad \log(2-3^x),\quad \frac{1}{\log(2-3^x)},\quad \operatorname{sen}(1/x),\quad \log\big((\log_2 x)^2-1\big),\quad \frac{1}{\operatorname{arcsen}x}$$
$$\operatorname{arcsen}(\log_2 x),\quad \arctan(1+x),\quad \arccos\frac{1}{1+x^2},$$
$$\log\big(1-2x+\sqrt{1+x}\big),\quad \sqrt{x^2+x-6}-\operatorname{arcsen}(3x),\quad \sqrt{x+2-\sqrt{x+1}},$$
$$\log\big(\min\{x-1,2-x\}\big),\quad \frac{1}{1-\sqrt[3]{x^2-1}},\quad \log\big(2+\operatorname{sen}(1/x)\big),\quad \operatorname{arcsen}2^{-x}.$$

Esercizi del 13 Novembre 2003

24. Verificare che la definizione di limite $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in\operatorname{dom}f:\ 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di δ:

$$\lim_{x\to 2}(x-1)=1\quad \text{con } \delta=\varepsilon,$$

$$\lim_{x\to -1}(2x+1) = -1 \quad \text{con } \delta = \varepsilon/2,$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2x}{x-1} = 2 \quad \text{con } \delta = \varepsilon/2,$$

$$\lim_{x\to 0} 2^x = 1 \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \log_2(1+\varepsilon) & \text{se } \varepsilon \ge 1, \\ \min\bigl\{\log_2(1+\varepsilon), -\log_2(1-\varepsilon)\bigr\} & \text{se } 0 < \varepsilon < 1. \end{cases}$$

25. Verificare che la definizione di limite $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall x \in \operatorname{dom} f :\ x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di N:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0 \quad \text{con } N = 1/\varepsilon,$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+1}{2x} = \frac{1}{2} \quad \text{con } N = 1/(2\varepsilon),$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-1}{2x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{con } N = 1/\sqrt{2\varepsilon},$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{2^x} = 0 \quad \text{con } N = -\log_2 \varepsilon.$$

26. Verificare che la definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, cioè $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \operatorname{dom} f :\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$ resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di δ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^2} = +\infty \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M \le 0, \\ \sqrt{2/M} & \text{se } M > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2} = +\infty \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M \le 0, \\ 1/\sqrt{M} & \text{se } M > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{1}{|x+1|} = +\infty \quad \text{con } \delta = \begin{cases} \text{positivo, non importa quanto,} & \text{se } M \le 0, \\ 1/M & \text{se } M > 0 \end{cases}$$

27. Verificare che la definizione di $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, cioè $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall x \in \operatorname{dom} f :\ x > N \Rightarrow f(x) > M$, resta soddisfatta nei seguenti casi con le date scelte di N:

$$\lim_{x\to +\infty} x = +\infty \quad \text{con } N = M$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{con } N = \begin{cases} \text{non importa quanto,} & \text{se } M < 0, \\ \sqrt{M} & \text{se } M \ge 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} 2^x = +\infty \quad \text{con } N = \begin{cases} \text{non importa quanto,} & \text{se } M \le 0, \\ \log_2 M & \text{se } M > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{2x+1} = +\infty \quad \text{con } N = \begin{cases} -1/2 & \text{se } M \le 0, \\ M + \sqrt{M+M^2} & \text{se } M > 0 \end{cases}$$

28. Trovare δ o N appropriati per la definizione di limite nei seguenti casi:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 2}|x+1| = 3, \qquad \lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x} = 0, \qquad \lim_{x\to -1}\max\{x, 1-x\} = 2.$$

Esercizi del 21 Novembre 2003

29. Sapendo che le funzioni costanti sono continue, e che la funzione $x \mapsto x$ è continua, tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$, e usando le regole su somma, prodotto e quoziente dei limiti, calcolare i limiti seguenti

$$\lim_{x\to 0} 2x, \quad \lim_{x\to 1}(x-1), \quad \lim_{x\to -2}(x^2-1), \quad \lim_{x\to+\infty} -x, \quad \lim_{x\to -1}\frac{x}{x-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3, \quad \lim_{x\to-\infty}(2x-4), \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2+x},$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\Big(1-\frac{1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to+\infty}(x^2-x), \quad \lim_{x\to-\infty} x^3\Big(1+\frac{1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to-\infty}(x^3+x^2),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(1-\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2})}{x(\frac{1}{x}-1)}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+2}{1-x},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x(2+\frac{1}{x})}{(\frac{2}{x}+3)x^2}, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{2x+3x^2}, \quad \lim_{x\to+\infty}\Big(x-\frac{x^2-1}{x}\Big), \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{x^2-x}{x+2}+\frac{x^3+x^2+1}{1-x^2}\Big),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)}{2x(1-2x)}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{2x-4x^2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2(x+3)}{x(1-x)}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x^2}{x-x^2},$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-x}{1+x}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(1-x)(1+x)}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{1-x^2}, \quad \lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)},$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x^3+1}, \quad \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-2)}, \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}, \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x},$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2}, \quad \lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x-1}, \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1},$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}, \quad \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{(x-2)^2}, \quad \lim_{x\to 2^+}\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)^2}, \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}.$$

Esercizi del 28 Novembre 2003

30. Sapendo che la radice quadrata è continua e che $\sqrt{x}$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x^3-3x}, \quad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}, \quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x+\sqrt{x}}{x-1},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\big), \quad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}\big), \quad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{2x-2}-\sqrt{x+1}\big),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(2+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}\sqrt{2-\frac{1}{x}}}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{2x-1}}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x\big(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\big)}{x\big(1-\frac{1}{x}\big)}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{x-1},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}\Big(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\Big)},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-2x}\big),\quad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}\big),$$

$$\lim_{x\to-\infty}\big(\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-3x}\big),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

31. Ricordando che seno e coseno sono sempre compresi fra -1 e 1, e usando il teorema del confronto, calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-\cos x),\quad \lim_{x\to-\infty}(x+\operatorname{sen}x-\cos x),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\operatorname{sen}x}{x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x-1)}{x^2},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\cos(x-1)}{\sqrt{x^4+1}},\quad \lim_{x\to0}\Big(\frac{1}{x^2}+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\Big),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^2+x}{x-2}+\cos(x^3-2^x)\Big),\quad \lim_{x\to-\infty}(x+1)\big(2+\operatorname{sen}\sqrt{x^2-1}\big).$$

32. Ricordando che seno e coseno sono continui, che $(\operatorname{sen}x)/x\to1$ e $(1-\cos x)/x^2\to1/2$ per $x\to0$, (più la regola del cambio di variabile, prodotti notevoli, scomposizioni in fattori…), calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x},\quad \lim_{x\to0}\frac{x^2-x}{\operatorname{sen}x},\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(2x-x^2)}{x},\quad \lim_{x\to1}\frac{x-x^2}{\operatorname{sen}(x-1)},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x},\quad \lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen}x}{x-1},\quad \lim_{x\to+\infty}x\operatorname{sen}\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}x\operatorname{sen}\frac{x-1}{x^2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{x-1}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2},\quad \lim_{x\to0}\frac{(\cos2x)-1}{x^2},\quad \lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^3},\quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^3},$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x(x-2)},\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}^2x}{1-\cos x},\quad \lim_{x\to0}\frac{x\operatorname{sen}x}{1-\cos^3x},\quad \lim_{x\to0}\frac{\cos^2x+\cos x-2}{x^3-2x}.$$

33. Ricordando la continuità e i limiti agli estremi delle funzioni esponenziali e logaritmiche, e i limiti di a^x/x^n e $(\log_a x)/x$ per $x\to+\infty$, oltre alle regole già viste prima, calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}(3^x-x),\quad \lim_{x\to-\infty}2^{x-1},\quad \lim_{x\to+\infty}(5^x-x4^x),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x\log_2x}{3^x},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{sen}2^x}{3^x},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3^x+1}{x^3-2x+2^x},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3^x-1}{x^2+x-3^x},$$

$$\lim_{x\to0^+}3^{1/x},\quad \lim_{x\to0^-}2^{2/x},\quad \lim_{x\to+\infty}2^x3^{-x+1},\quad \lim_{x\to0}2^{(x-1)/x^2},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_2(x^2-1), \quad \lim_{x\to+\infty} \log_3(3^x-2^x), \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log_2 x}{x},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \log_2 \frac{1+x}{x-1}, \quad \lim_{x\to+\infty} \big(\log_2(x+1)-\log_2 x\big), \quad \lim_{x\to 0^+} 2^{-\log_2 x},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2 \sqrt{x}}{\log_2 x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2 \sqrt{x}}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_2 x)^2}{x},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_2(x^2)-\log_2 x}{\log_2 x}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log_2 x}{1/x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_3(3^x-2^x).$$

34. Esercizi di ricapitolazione:

$$\lim_{x\to+\infty} \big(\sqrt{2^x+x}-\sqrt{2^x-x}\big), \quad \lim_{x\to 1} 2^{1/(x-1)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2^{1/x}}{2^{1/x}},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \big(x^2-\log_2 x+2^{x-1}\big), \quad \lim_{x\to-\infty} 3^x(1-\cos 3^{-x}), \quad \lim_{x\to+\infty} 2^{x+\operatorname{sen} x},$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2+\operatorname{sen}^2 x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\operatorname{sen} x)}{1-\cos x},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{2x-\operatorname{sen} x}{x^2-2x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-x^2-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}, \quad \lim_{x\to+\infty} (x^4-2^x+\cos x),$$
$$\lim_{x\to+\infty} \Big(2x-x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to 0} \frac{2x-\operatorname{sen} x\cos x}{1-\cos x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_3(3^x-2^x+x)}{\log_2 x},$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+1-\cos\sqrt{x}}{\operatorname{sen} x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1-\operatorname{sen} x)(1-\cos x)}{\operatorname{sen} x}.$$

Esercizi del 22 gennaio 2004

Dare per noti i limiti di $(1+1/x)^x$ per $x\to\pm\infty$; di $(1+x)^{1/x}$, $(\ln(1+x))/x$, $(e^x-1)/x$ per $x\to 0$; di $n!$, $\sqrt[n]{n!}$, $n!/a^n$ per $n\to+\infty$.

35. Giustificare le disuguaglianze

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{3}\cdot\dots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n} \geq n\cdot 1\cdot 1\cdots 1 = n,$$

e dedurne che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty,$$

cioè che n^n va all'infinito più velocemente del fattoriale.

36. (Avanzato) Con una variante del metodo dell'esercizio precedente, dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)!} = +\infty\,.$$

37. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n^2+2n+2}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!+\ln n}{n^n}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+e^n}{n!}.$$

38. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n+1]{n}, \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2}, \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n^3-3n+1}, \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n-n},$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n+2^n}, \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!-e^n}, \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[(n^2)]{e^n+3}.$$

39. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to0}(1+\operatorname{sen} x)^{1/x}, \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{n+2}\Big)^{n-1}, \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{n+1}{2n^2+1}\Big)^{n},$$
$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{2n+3}{n^2+1}\Big)^{n/2}, \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{2n^2+3}{n^2+1}\Big)^{n/2}, \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n^2+3}{n^2+1}\Big)^{n/2},$$
$$\lim_{x\to0}\big(\ln(e+x)\big)^{1/x}, \quad \lim_{x\to0}\ln\big((e+x)^{1/x}\big), \quad \lim_{x\to0}\big(1+x+x^2\big)^{1/x},$$
$$\lim_{x\to0}\big(\cos x\big)^{1/x}, \quad \lim_{x\to0}\big(\cos x\big)^{1/x^2}, \quad \lim_{x\to0}\big(\cos x-\operatorname{sen} x\big)^{1/x},$$
$$\lim_{x\to0}\big(e^x+e^{2x}-1\big)^{1/\operatorname{sen} x}, \quad \lim_{x\to0}\big(2^x+3^x-1\big)^{1/\ln(1+x)}, \quad \lim_{x\to0}\big(e^x+\operatorname{sen} x\big)^{1/x}.$$

Esercizi del 30 gennaio 2004

40. (Avanzato) Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} x\big(x-1-\sqrt{x^2-2x}\big), \qquad \lim_{x\to+\infty}\big(x-\sqrt{x^2-2x}\big)^x.$$

41. (Avanzato) Calcolare i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} x\big(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}-1\big), \qquad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\big)^x.$$

42. (Avanzato) Sia $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x)>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, e supponiamo che $f(x)\to0$ sia per $x\to-\infty$ che per $x\to+\infty$. Dimostrare che esiste almeno un punto di massimo globale per f.

43. (Avanzato) Sia $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua per la quale i limiti per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$ esistono finiti e coincidono. Dimostrare che almeno uno fra il $\sup_{\mathbb{R}} f$ e l'$\inf_{\mathbb{R}} f$ è un valore assunto da f.

44. (Avanzato) Sia $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua tale che $xf(x)\to+\infty$ sia per $x\to-\infty$ che per $x\to+\infty$. Dimostrare che f ha almeno uno zero.

45. (Avanzato) Sia $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x)\to+\infty$ sia per $x\to+\infty$ che per $x\to-\infty$. Dimostrare che esiste almeno un punto di minimo globale per f e che ogni valore maggiore del valore minimo viene assunto in almeno due punti distinti.

Esercizi dell'8 febbraio 2004

46. (Avanzato) Verificare la disuguaglianza

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(\frac{3}{4}b^2 + \left(a + \frac{b}{2}\right)^2\right).$$

Dedurne che la funzione $f(x) := x^3 + x$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$. Mostrare anche che $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, che f è invertibile, e che l'inversa è continua.

47. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := x^2 - 2x$ nel punto generico x_0, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = -1$.

48. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt{x}$ nel punto generico $x_0 > 0$, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

49. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \log(3x-1)$ nel punto generico $x_0 > 1/3$, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

50. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt[3]{x}$ nel punto generico x_0, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 2$. (Ricordare il prodotto notevole $(a-b)(a^2+ab+b^2) = \ldots$).

51. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}$ nel punto generico x_0 per il quale $\operatorname{sen} x_0 \neq 0$, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = \pi/3$.

52. (Avanzato) Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x + x^2}$ nel punto generico x_0, usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. La f ha derivata nel punto $x_0 = 0$? È derivabile in $x_0 = 0$? Scrivere poi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

Esercizi del 13 febbraio 2004

53. Calcolare la derivata delle seguenti somme di funzioni, specificando su quale dominio siano definite:

$$f_1(x) = \operatorname{sen} x + 3^x - \arctan x, \qquad f_2(x) = x^4 + \operatorname{arcsen} x, \qquad f_3(x) = \log x - \cos x + \sqrt{x}\,.$$

54. Calcolare la derivata dei seguenti prodotti di funzioni, specificando su quale dominio siano definite:

$$f_4(x) = x^{3/2} \log x, \qquad f_5(x) = \operatorname{sen} x \cos x, \qquad f_6(x) = e^x \sqrt[3]{x},$$
$$f_7(x) = 3x^{-1} \operatorname{sen} x \, \log x, \qquad f_8(x) = x^2 \log x \, \arctan x, \qquad f_9(x) = 5^x \operatorname{arcsen} x \, \cos x.$$

55. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni, specificando su quale dominio siano definite:

$$f_{10}(x) = \frac{1}{x^3}, \qquad f_{11}(x) = \frac{1}{\operatorname{arcsen} x}, \qquad f_{12}(x) = \frac{1}{x^2 + \cos x}.$$

56. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni razionali, specificando su quale dominio siano definite:

$$f_{13}(x) = \frac{x+7}{12x-5}, \qquad f_{14}(x) = \frac{x^2+3x-5}{x^2+x-1}, \qquad f_{15}(x) = \frac{5x^2+3x-1}{2-x}.$$
$$f_{16}(x) = \frac{1-2x^2+2x}{x^2-x+1}, \qquad f_{17}(x) = \frac{2-3x+4x^4+x^7-x^{12}}{1-3x+4x^4+x^7-x^{12}}.$$

57. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni composte, specificando su quale dominio siano definite:

$$f_{18}(x) = (3x+1)^2, \qquad f_{19}(x) = \sqrt{x^2+1}, \qquad f_{20}(x) = \log(2-3x^2),$$
$$f_{21}(x) = (5\log x)^3, \qquad f_{22}(x) = \frac{1}{\arctan(e^x+1)} \qquad f_{23}(x) = 2^{3x+\operatorname{sen} x},$$
$$f_{24}(x) = \operatorname{arcsen}(x^3-1), \qquad f_{25}(x) = \operatorname{sen}(\log(3x+5)), \qquad f_{26}(x) = \frac{e^{3x+1}}{\operatorname{sen}^2 x + 4}.$$

58. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni (forma esponenziale), specificando su quale dominio siano definite:

$$f_{27}(x) = x^{\arctan x}, \quad f_{28}(x) = (3x+5)^{\operatorname{sen} x},$$
$$f_{29}(x) = \left(\frac{x+1}{2x+3}\right)^x, \quad f_{30}(x) = \big(\log(\arctan x)\big)^{1/x}.$$

Esercizi del 23 febbraio 2004

59. Delle seguenti funizioni trovare il dominio di definizione, studiare il segno della derivata, e dedurne gli intervalli di crescenza/decrescenza e i punti di massimo/minimo locali e globali:

$$2x^2-3x+4, \qquad x^3-2x^2+x, \qquad \frac{x-1}{x+1}, \qquad \frac{2x-1}{x^2+4x}, \qquad \frac{2-x-x^2}{x+x^2},$$
$$x + \frac{x^2-1}{2x+4}, \qquad 2x^2+\log(x-1), \qquad \log(x^2+x-1)-3x,$$
$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}, \qquad \sqrt{x^2+x+1}-\frac{x}{2}+1, \qquad \sqrt{x-2}-\log(2x+1),$$
$$\log(x+2)-\arctan(x+1), \qquad x - \operatorname{arcsen} x, \qquad \arctan x - \operatorname{arcsen} x,$$
$$2\sqrt{x+1}-\arccos x, \qquad \sqrt{\arctan x}, \qquad \log(\log x), \qquad e^{x^2-2x+3}.$$

Esercizi del 29 febbraio 2004

60. Calcolare i seguenti limiti, usando eventualmente la regola de L'Hôpital se ritenuto opportuno:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x)-\log x}{\pi-2\arctan x},\qquad \lim_{x\to1^-}\frac{\pi-2\operatorname{arcsen}x}{1-x},\qquad \lim_{x\to1^-}\frac{\pi-2\operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x}},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-2\operatorname{sen}x-1}{x^2},\qquad \lim_{x\to0}\frac{3x+\log(1+x^3)-3\tan x}{1-\cos x},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{e^x+x-1-\operatorname{sen}2x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x)}{\log(1+x^2)},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(9^x+x^2)}{1+\log(e^{2x}+x)},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e(1-x)^{1/x}-1}{x},\qquad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x-\tan x}{5-e^{2x}-4\cos x+2\operatorname{sen}x},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{2-2\sqrt{1+x}+\operatorname{sen}x}{\operatorname{arcsen}x+2\sqrt{1-x}-2},\qquad \lim_{x\to0}\frac{2e^x+9\sqrt[3]{1-x}+\operatorname{sen}x-11}{\log(1-x)-\log(1+x)+2\sqrt{1+x}-2\sqrt{1-x}},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+12\sqrt{x^2-x+1}+5\operatorname{sen}(x-x^2)-13}{(1+\operatorname{sen}x)x},\qquad \lim_{x\to0}\frac{x^2-2+2\cos(\operatorname{sen}x)}{1-\cos(x^2)}.$$

61. Delle seguenti funzioni studiare il segno della derivata seconda, e dedurne gli intervalli di convessità/concavità e i punti di flesso:

$$2x^2-3x+4,\qquad x^3-2x^2+x,\qquad \frac{x-1}{x+1},\qquad \frac{2-x-x^2}{x+x^2},$$
$$x+\frac{x^2-1}{2x+4},\qquad 2x^2+\log(x-1),\qquad \log(x^2+x-1)-3x,$$
$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2},\qquad \sqrt{x^2+x+1}-\frac{x}{2}+1,\qquad \sqrt{x-2}-\log(2x+1),$$
$$x-\operatorname{arcsen}x,\qquad \arctan x-\operatorname{arcsen}x,$$
$$\log(\log x),\qquad e^{x^2-2x+3}.$$

Esercizi del 21 aprile 2004

62. Trovare i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni centrati nei punti x_0 e degli ordini n specificati:

$$e^x,\quad x_0=1,\quad n=3;\qquad \operatorname{sen}x,\quad x_0=\pi/6,\quad n=2;$$
$$\frac{x}{1-x},\quad x_0=0,\quad n=3;\qquad \frac{\operatorname{sen}x}{x},\quad x_0=0,\quad n=4;$$
$$(x-1)e^x,\quad x_0=0,\quad n=4;\qquad \log(1-x),\quad x_0=0,\quad n=3;$$
$$x^2\cos x,\quad x_0=0,\quad n=5;\qquad \cos(x-x^2),\quad x_0=0,\quad n=3;$$
$$e^x\operatorname{sen}x,\quad x_0=0,\quad n=3;\qquad \sqrt{1+x},\quad x_0=0,\quad n=3.$$

63. Calcolare i seguenti limiti usando i polinomi di Taylor:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-e^x-\cos x}{\operatorname{sen} x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1+2x-\cos x-2\operatorname{sen} x}{2-x^2-2\cos x},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-x^2-2\cos x-2\operatorname{sen} x}{1-\cos x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x^2-\cos x-\operatorname{sen} x}{x^3}.$$

64. Data la funzione $f(x)=\log(1+x)$, dimostrare che la derivata n-esima per $n\geq 1$ è

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n(n-1)!}{(1-x)^n}.$$

Dedurne che il polinomio di MacLaurin di f di ordine n è

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n}x^n\,.$$

65. Data la funzione $f(x)=1/(1-x)^2$, dimostrare che la derivata n-esima per $n\geq 0$ è

$$f^{(n)}(x)=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}.$$

Dedurne che il polinomio di MacLaurin di f di ordine n è

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots+(n+1)x^n\,.$$

66. Scrivere la formula di Taylor col resto di Lagrange per la funzione $\operatorname{sen} x$ centrata in $x_0=0$ e di ordine $n=3$ e di ordine $n=4$. Dedurne che

$$\left|\operatorname{sen}\frac{1}{2}-\frac{23}{48}\right|\leq\frac{1}{5!\cdot 2^5}=\frac{1}{3840}.$$

67. (Avanzato). Dimostrare che $\cos 1$ è irrazionale. (Adattare la dimostrazione che e è irrazionale).

Esercizi dell'11 maggio 2004

68. Trovare primitive delle seguenti funzioni:

$$f_1(x)=7x^3-5x^2+3x+2,\qquad f_2(x)=7-2x-5x^7,\qquad f_3(x)=2\operatorname{sen} x-13\cos x,$$
$$f_4(x)=\frac{3x^2-2x+5}{2x^2},\qquad f_5(x)=\frac{5}{1+x^2}-\frac{2}{\cos^2 x},\qquad f_6(x)=\frac{5x^3\sqrt[3]{x}}{7x\sqrt[4]{x}},$$
$$f_7(x)=\frac{4}{\sqrt[3]{x}}-3^x+x^2,\qquad f_8(x)=\frac{5\cos^2 x-3}{\cos^2 x},\qquad f_9(x)=5\cos x+x\sqrt{x}-5,$$
$$f_{10}(x)=2^x+4x^2-12\operatorname{sen} x,\qquad f_{11}(x)=\left(3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2,\qquad f_{12}(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{7}{x}.$$

69. Trovare primitive delle seguenti funzioni:

$$f_{13}(x) = (2x-1)^2, \qquad f_{14}(x) = \cos(3x+4), \qquad f_{15}(x) = 5e^{1-5x},$$
$$f_{16}(x) = 3\operatorname{sen} x\cos^3 x, \qquad f_{17}(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}, \qquad f_{18}(x) = \frac{1}{7x+9},$$
$$f_{19}(x) = \frac{2}{\cos^2(2x-1)}, \qquad f_{20}(x) = \sqrt{3-4x}, \qquad f_{21}(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$
$$f_{22}(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}, \qquad f_{23}(x) = \frac{5}{1+9x^2}, \qquad f_{24}(x) = \frac{2\arctan^3 x}{1+x^2}.$$

70. Trovare primitive delle seguenti funzioni utilizzando il metodo per parti:

$$f_{25}(x) = x^2e^x, \qquad f_{26}(x) = x\log(4x), \qquad f_{27}(x) = xe^{-2x},$$
$$f_{28}(x) = e^x\operatorname{sen}(2x), \qquad f_{29}(x) = \arctan x, \qquad f_{30}(x) = (3x^2-2x+1)\cos x,$$
$$f_{31}(x) = x\log^2 x, \qquad f_{32}(x) = (2x^2-x)\log x, \qquad f_{33}(x) = e^{-3x}\operatorname{sen} x.$$

71. Calcolare i seguenti integrali utilizzando la sostituzione suggerita:

$$\int \frac{1}{\sqrt{16x-4x^2-15}}\,dx, \qquad x = \frac{t}{2}+2,$$
$$\int \frac{1}{9x^2-12x+5}\,dx, \qquad x = \frac{t}{3}+\frac{2}{3},$$
$$\int x\sqrt[3]{1+x}\,dx, \qquad x = t^3-1.$$
$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx, \qquad x = \log t,$$
$$\int (\operatorname{arcsen} x)^2 dx, \qquad x = \operatorname{sen} t.$$

Esercizi del 18 maggio 2004

72. Trovare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni razionali:

$$f_1(x) = \frac{3}{5x-1}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{7-2x}, \qquad f_3(x) = \frac{12x-1}{4x+3}, \qquad f_4(x) = \frac{3-x}{2x+1},$$
$$f_5(x) = \frac{x^2}{x+2}, \qquad f_6(x) = \frac{1}{x^2-6x+5}, \qquad f_7(x) = \frac{1}{4x^2-4x+1},$$
$$f_8(x) = \frac{1}{x^2+x+1}, \qquad f_9(x) = \frac{1}{2x^2-3x+1}, \qquad f_{10}(x) = \frac{1}{x^2+2x+5},$$
$$f_{11}(x) = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}, \qquad f_{12}(x) = \frac{3x+1}{(x+2)^2}, \qquad f_{13}(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1},$$
$$f_{11}(x) = \frac{x^2}{x^2-5x+4}, \qquad f_{12}(x) = \frac{2x^2-x+1}{x^2+2x+3}, \qquad f_{13}(x) = \frac{x^3}{x^2-1}.$$

73. Ricordando le formule

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

utilizzare la sostituzione

$$x = 2\arctan t, \quad \text{ovvero} \quad t = \tan\frac{x}{2},$$

per calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni:

$$f_{14}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \qquad f_{15}(x) = \frac{1}{2\operatorname{sen} x - 5\cos x + 1}, \qquad f_{16}(x) = \frac{1}{\cos x + 2\operatorname{sen} x + 1}.$$

74. Calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni mediante la sostituzione $t = e^x$

$$f_{17}(x) = \frac{3e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2}, \qquad f_{18}(x) = \frac{2e^{2x} + e^x}{e^{2x} + 1}.$$

75. Ricordando le formule

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x},$$

utilizzare la sostituzione

$$x = \arctan t, \quad \text{ovvero} \quad t = \tan x,$$

per calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni:

$$f_{17}(x) = \frac{1}{2+\operatorname{sen}^2 x}, \qquad f_{18}(x) = \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x - 4\cos^2 x - 1}.$$

Esercizi del 22 maggio 2004

76. Studiare la convergenza delle seguenti serie (riconducibili alla serie geometrica) e calcolarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{5^n} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{3n+1} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} 5^{-n} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{3^{3n-2}}$$

77. Studiare la convergenza delle seguenti serie utilizzando il criterio del confronto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \operatorname{sen}^2 n + 1}{3^n + 1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$$

78. Studiare la convergenza delle seguenti serie utilizzando i criteri della radice e/o del rapporto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{4n-1}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+7}{4n+1}\right)^{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{3n+2}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3+2}{2n^3+1}\right)^{3n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{n!}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Esercizi del 1 giugno 2004

79. Studiare la convergenza delle seguenti serie utilizzando il criterio di asintoticità:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcsen}\frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}^4\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt[4]{\operatorname{sen}\frac{1}{n^7}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{5^n+n^2+2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\operatorname{arcsen}\frac{1}{n}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}-\cos(1/n)}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\tan^{2/5}\frac{1}{n^2}$$

80. Studiare la convergenza semplice ed assoluta delle seguenti serie. Per la convergenza semplice usare, qualora lecito e utile, il criterio di Leibniz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^3+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{5n^4+2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log(n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\log n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(2\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{n}}+3\operatorname{arcsen}\frac{1}{n}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}+2}$$

Esercizi del 9 giugno 2004

81. Trovare il dominio delle seguenti funzioni di due variabili e disegnarlo sul piano cartesiano. Rappresentare le linee di livello delle funzioni $f_1,\dots,f_7$.

$$f_1(x,y)=\frac{2x+2y-1}{x-2y+3}, \qquad f_2(x,y)=\frac{1}{x^2-y^2}, \qquad f_3(x,y)=\log\big((x+2)^2+(y-3)^2\big),$$

$$f_4(x,y)=\frac{2x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \qquad f_5(x,y)=\log\big(x^2+y^2-7\big), \qquad f_6(x,y)=\sqrt{3x^2+y^2-2},$$

$$f_7(x,y)=\sqrt{e^{x-y+1}-1}, \qquad f_8(x,y)=\sqrt{x+y-10}+\log(9-x^3-y^2),$$

$$f_9(x,y)=\sqrt{(4-x^2-y^2)(y-x^2-1)}.$$

82. Trovare il dominio e calcolare le derivate parziali prime e seconde delle seguenti funzioni:

$$g_1(x,y) = 5x^3 - 7x^3y^2 + 3x^2 - yx^8 + 1, \qquad g_2(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}, \qquad g_3(x,y) = \frac{x - 3y + 1}{2x + y - 3},$$
$$g_4(x,y) = e^{x/y}, \qquad g_5(x,y) = 2x\cos y - 3y^2 e^{2x+y}, \qquad g_6(x,y) = \sqrt{-7 - 2x^2 - 4y^2},$$
$$g_7(x,y) = e^{3x^2 - y}, \qquad g_8(x,y) = \tan(xy), \qquad g_9(x,y) = \sqrt{\log(3x - 2y)},$$
$$g_{10}(x,y) = x \arctan y, \qquad g_{11}(x,y) = \frac{2x^2 - y^2}{3y + 1}, \qquad g_{12}(x,y) = e^{\cos x \cos y}.$$

83. Trovare i punti stazionari delle seguenti funzioni e dire se sono punti di massimo/minimo relativo o di sella.

$$k_1(x,y) = 2y^2 - x^2 + 2xy + 2x + 1, \qquad k_2(x,y) = \frac{1}{x^2 - 2x + y^2 + 2},$$
$$k_3(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}, \qquad k_4(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 3x^2y - 3y + 5.$$