Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2002/03

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Esercizi di Analisi Matematica

Dott. Paolo Baiti

Esercizi del 15 Ottobre 2002

1. Risolvere le seguenti disequazioni frazionarie

$$\frac{4-x}{x-2}>0,\qquad \frac{2x-3}{x-4}>0,\qquad \frac{x^2+25}{x^2-4x}<0,$$
$$\frac{x^2+2x-5}{x^2-6x+8}<0,\qquad \frac{x(x-1)^3}{x^4-81}\geq 0,\qquad \frac{2}{x-1}+\frac{x}{x+2}-\frac{6}{x^2+x-2}>0,$$
$$\frac{2x}{3+x}<\frac{4-x}{x+2},\qquad \frac{7x-4}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}<\frac{7}{x+2},\qquad \frac{x(x-1)(x^2-3)}{(x+1)(x-4)}\leq 0.$$

2. Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} x^2+x-6\leq 0\\ 5x-6>0\end{cases}\qquad \begin{cases} \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{4-3x}{12}>0\\ 7-x-2(x-4)<3(x+5)-x\end{cases}$$
$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}(1-2x)+\dfrac{5}{6}>-2x\\ 14x-5(x-2)<-\dfrac{1}{2}\end{cases}\qquad \begin{cases} x+2-\dfrac{x-7}{3}+5x<4\\ \dfrac{2-x}{4}+3x<\dfrac{x}{2}-5\end{cases}$$
$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}x^2-4x(x-1)+(2x+1)^2<4\\ \dfrac{x-1}{2}-x(x+3)>x^2-x\end{cases}\qquad \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-2}<1\\ 4x^2-1>2x+1\end{cases}$$
$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{3}+5-x<7-2x\\ 4-x<3(x-4)-5x\\ 3x+4>2x-7(x+20)\end{cases}$$

3. Risolvere le seguenti equazioni irrazionali

$$\sqrt{x^2-x}=\sqrt{2},\qquad \sqrt{3+x}=-x-7,\qquad \sqrt{x^2+x+1}=2x+3,$$
$$\sqrt{4-x}=\sqrt{x-3},\qquad \sqrt{x+2}=x+3,\qquad \sqrt{x^2+x+1}=3-x,$$
$$\sqrt[3]{x-x^3}=1-x,\qquad \sqrt{x+2}=\sqrt{3-x}-\sqrt{x},\qquad \sqrt{x-1}+\sqrt{2+3x}=4.$$

4. Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali

$$\sqrt{x^2+x+1}<4, \qquad 2x-3<\sqrt{x-1} \qquad x+1<\sqrt{2x-5},$$
$$x+7\le\sqrt{9-x^2}, \qquad \sqrt[3]{x^3-2x}\ge 1, \qquad \sqrt[3]{x^3-1}<x+3,$$
$$\frac{\sqrt{x-1}}{4x^2+25}>0, \qquad \frac{x-4+\sqrt{x+2}}{1-x^2}, \qquad \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}>3,$$
$$\frac{x+1-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}>0, \qquad \frac{\sqrt{8x-3}-2x+1}{\sqrt{x-2}}\le 0, \qquad \frac{3x+5}{\sqrt{4x-1}-3}>2.$$

5. Determinare il dominio delle seguenti funzioni

$$f_1(x)=\sqrt{x^2-3x-5}, \qquad f_2(x)=\log(x^2-x+6) \qquad f_3(x)=\sqrt{4-x-x^2}$$
$$f_4(x)=\log\Big(\frac{x^2-2}{2x-3}-1\Big) \qquad f_5(x)=\sqrt{x-1-\sqrt{x+1}}$$
$$f_6(x)=\log\big(x+2-\sqrt{3-2x}\big) \qquad f_7(x)=\sqrt{x^2+6x+5}-5\sqrt{x-1+\sqrt{4-2x}}$$

6. Dato l'insieme
$$A=\Big\{\frac{4n+1}{n}\ :\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\Big\}$$
verificare che 4 è l'estremo inferiore di A. È anche il minimo ?

7. Dato l'insieme
$$A=\Big\{\frac{1-n}{1+n}\ :\ n\in\mathbb{N}\Big\}$$
verificare che -1 è l'estremo inferiore di A e 1 è il massimo di A.

Esercizi del 29 ottobre 2002

8. Utilizzando il Principio d'Induzione, dimostrare le seguenti affermazioni:

a) Per ogni $n\ge 1$ valgono

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\ldots=\Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2$$
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=1+3+5+7+\ldots=n^2$$
$$2n\le 2^n$$
$$(2n)!\ge 2^n(n!)^2$$

b) Per ogni $n\ge 2$ vale
$$2^n+4^n\le 5^n$$

9. Usando il fatto che $(n+1)^2/n^2 \leq 2$, dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 4$ vale $n^2 \leq 2^n$.

10. Definiamo i numeri a_n $(n \geq 0)$ per ricorrenza nel seguente modo:

$$\begin{cases} a_0 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 0$ vale $a_n \leq 2$.

11. (Avanzato) Sia $M \in]0,1[$ un numero fissato. Definiamo i numeri a_n $(n \geq 0)$ per ricorrenza nel seguente modo:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(M - a_n^2) \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 0$ valgono

a) $a_n \leq \sqrt{M}$

b) $a_n \geq 0$ (si usi anche il punto a))

Esercizi del 12 novembre 2002

12. Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \sqrt{2x^2+1}, \qquad f_2(x) = \sqrt{-x^2-3}, \qquad f_3(x) = \log(\log x),$$

$$f_4(x) = \sqrt{\frac{x-3}{2x+5}}, \qquad f_5(x) = \log(x - 1 - \sqrt{x^2-4}), \qquad f_6(x) = \sqrt{1 - x + \sqrt{25 - x^2}}.$$

13. Verificare, usando la definizione, la validità dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 1} 3^{2x-2} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} 2^{3x-2} = \frac{1}{4},$$

$$\lim_{x\to 2} \log(3x-5) = 0, \qquad \lim_{x\to 1}(x^2+2x) = 3,$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

14. Utilizzando il Teorema sul limite della somma/prodotto/quoziente di funzioni, calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 1}(2x^3 - 2x + 1), \qquad \lim_{y\to -1}\left((y-1)e^{1-2y}\right), \qquad \lim_{z\to 0} \frac{2z^2 - 3z - 5}{z - 6},$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{1}{(1+2x)^2}, \qquad \lim_{w\to 0} \frac{w \operatorname{sen} w}{w^2+1}, \qquad \lim_{y\to 0} \frac{1 + \sqrt{(y-1)y}}{3 + \sqrt{(2+y)y}}.$$

Esercizi del 19 novembre 2002

15. Calcolare il valore dei seguenti limiti (di funzioni continue):

$$\lim_{x\to -1} \frac{2^{3-x}-5}{x^2-7x+1}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}(\pi x)}}{5-\cos x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\tan(x))}{x^2 3^x - 1}.$$

16. Calcolare, ove possibile, il valore dei seguenti limiti di polinomi:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^7-5x+-9), \qquad \lim_{x\to+\infty}(7-x^3+5x), \qquad \lim_{x\to-\infty}(2x^3-1),$$
$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-x^4), \qquad \lim_{x\to-\infty}(x^3+3x^2-x^5+1), \qquad \lim_{x\to+\infty}(2x^3-x+2x^3+5).$$

17. Calcolare, ove possibile, il valore dei seguenti limiti di funzioni razionali (forma indeterminata ∞/∞):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x+1}{3x^2-12}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{7x^2+3}{x^2-x^3+2}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-3}{2x^2-5x+1},$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-x^2+1}{2x^2+3}, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3-19x-7}{3-2x}, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^5+2x^2-3}{5x^2-1}.$$

18. Trovare il valore del parametro $b\in\mathbb{R}$ affinché risulti continua la seguente funzione:

$$f(z) := \begin{cases} bz-5, & \text{se } z<1,\\ 3bz^2-bz+3, & \text{se } z\geq 1.\end{cases}$$

19. Trovare i valori del parametro $a\in\mathbb{R}$ affinché risulti continua la seguente funzione:

$$f(x) := \begin{cases} \operatorname{sen}(ax)+a^2+1, & \text{se } x<0,\\ x^2+3a\cos x-1, & \text{se } x\geq 0.\end{cases}$$

20. Trovare i valori dei parametri $a,b\in\mathbb{R}$ affinché risulti continua la seguente funzione:

$$f_{a,b}(y) := \begin{cases} a^2y+2ay+1, & \text{se } y<1,\\ ay^2-4b^2y+a+2, & \text{se } y\geq 1.\end{cases}$$

Disegnare il luogo geometrico descritto da tali coppie nel piano, ovvero rappresentare l'insieme

$$C := \{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \ :\ f_{a,b} \text{ è continua }\}.$$

Esercizi del 26 novembre 2002

21. Calcolare, ove possibile, il valore dei seguenti limiti di funzioni irrazionali (forma indeterminata ∞-∞):

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{7x^2-x-5}+\sqrt{3x^3+2}\right),\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1-x^2}-\sqrt{3x+2}\right),$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x-2}\right),\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3-2x-1}-\sqrt{x^3+2}\right),$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{2x-3}\right),\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x+1}-\sqrt{2x^2-1}\right).$$

22. Calcolare i seguenti limiti, utilizzando un cambiamento di variabile:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{2x-\pi},\qquad \lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi},\qquad \lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}.$$

23. Calcolare ove possibile il valore dei seguenti limiti (forma $\frac{L}{\infty}$, oppure $\frac{L}{0}$):

$$\lim_{x\to0}\frac{x+3}{5x^2},\qquad \lim_{x\to-1}\frac{x^2-2}{(x+1)^3},\qquad \lim_{x\to0}\frac{1-23x^7}{\operatorname{sen} x},\qquad \lim_{x\to0}\frac{1}{\operatorname{sen} x(1-\cos x)}.$$

24. Calcolare, utilizzando il teorema dei due carabinieri, il seguente limite:

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right).$$

25. Calcolare i seguenti limiti (forma $0\cdot\{$funz. limitata$\}$):

$$\lim_{x\to\pi}\left(\operatorname{sen} x\left(2+\operatorname{sen}\frac{1}{\pi-x}\right)\right),\qquad \lim_{x\to+\infty}\left((5-4\operatorname{sen}(e^x))\left(\frac{1}{5}\right)^x\right).$$

26. Calcolare i seguenti limiti (di funzioni trigonometriche):

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(4x)\operatorname{sen}(3x)}{7x},\qquad \lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x-1}{5x^2},\qquad \lim_{x\to0}\frac{x\tan(2x)}{\operatorname{sen}^2(3x)}.$$

27. Di ricapitolazione

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x},\qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^3},\qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^4},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot3^x+x^2}{3\cdot2^x+x^3},\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{2\cdot3^x+x^2}{3\cdot2^x+x^3},\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(3^x\operatorname{sen}(x^{10}+1)\right),$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x^2-\operatorname{sen} x\right),\qquad \lim_{x\to+\infty}\left((3-\operatorname{sen} x)e^x\right),\qquad \lim_{x\to0}\frac{3x-2\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x-4x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x-4x},\qquad \lim_{x\to0^+}\left(x(5\operatorname{sen} x-2\log x)\right),\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2/3}-3x^{3/2}+1}{x^{5/4}+2x+5},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^3)+2x}{x^2+1},\qquad \lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x^2-4x^4}}{x^2},\qquad \lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x^2+x^3}-\cos x}{x\operatorname{sen} x}$$

Esercizi del 21 gennaio 2003

28. Calcolare il valore dei seguenti limiti.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-e^{x^2}}{x\,\mathrm{sen}(2x)},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log\big(1+\mathrm{sen}(2x)\big)}{\tan x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-e^{5x}}{\tan x}.$$

29. Calcolare il valore dei seguenti limiti (ove utile, si ricordi anche il limite fondamentale $\lim_{x\to\pm\infty}(1+1/x)^x = e$).

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(1-\frac{1}{2x}\Big)^x,\qquad \lim_{z\to 0}\big(1-5z\big)^{\frac{2}{z}},\qquad \lim_{y\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{3y+2}\Big)^{y^2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{2x+3}{4x-1}\Big)^x,\qquad \lim_{y\to+\infty}\Big(\frac{4y+3}{3y+1}\Big)^{2y},\qquad \lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^2+3x-1}{x^2+x+4}\Big)^x,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(1+\frac{x+1}{2x^3+x-2}\Big)^x,\qquad \lim_{y\to+\infty}\Big(1+\frac{3y-2}{y^2+3}\Big)^y,\qquad \lim_{x\to 0^+}(1+\mathrm{sen}(2x))^{\frac{1}{3\,\mathrm{arcsen}\,x}}.$$

30. Calcolare i seguenti limiti di forme esponenziali.

$$\lim_{x\to 1}\big(x-1\big)^{1/x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{x-2}{1-2x}\Big)^x,\qquad \lim_{z\to 0^+}(\tan z)^{\log z},$$

$$\lim_{y\to-\infty}\Big(1-\cos\frac{1}{y}\Big)^y\qquad \lim_{w\to+\infty}\Big(\frac{w^2+2}{5w-3}\Big)^{-\log w}\qquad \lim_{x\to 0^+}\Big(\frac{x}{\log^2 x}\Big)^{\log x}.$$

31. Calcolare i seguenti limiti di forme esponenziali.

$$\lim_{z\to+\infty}\big(1+x\big)^{1/x},\qquad \lim_{x\to 0^+}\big(\cos x\big)^{1/x},\qquad \lim_{x\to 0^+}\big(\cos x\big)^{1/x^2},$$

$$\lim_{x\to 0^+}(e^{3x}-e^{2x})^{1/\log x},\qquad \lim_{x\to 0^+}(e^{3x}-e^{2x})^{1/(x\log x)},\qquad \lim_{y\to 0^+}\big(\tan y^2\big)^{1/\log(1-\cos y)},$$

$$\lim_{z\to 0^+}\big(\cos z+z^2\big)^{1/z},\qquad \lim_{x\to 0^+}x^{1/\log(7x)},\qquad \lim_{x\to 0^+}\big(e^x-x^x\big)^x.$$

Esercizi del 28 gennaio 2003

32. Date le seguenti coppie di funzioni, dire se $f=o(g)$, $g=o(f)$, $f=O(g)$ oppure $g=O(f)$.

$$\begin{cases} f(x)=x-\mathrm{sen}\,x \\ g(x)=x \end{cases}\ \text{in } x_0=0,\qquad \begin{cases} f(x)=x-\mathrm{sen}\,x \\ g(x)=x^2 \end{cases}\ \text{in } x_0=0,$$

$$\begin{cases} f(x)=x-\mathrm{sen}\,x \\ g(x)=x^3 \end{cases}\ \text{in } x_0=0,\qquad \begin{cases} f(x)=3^x+5x-1 \\ g(x)=x^2+3x-1 \end{cases}\ \text{a } +\infty,$$

$$\begin{cases} f(x)=3x \\ g(x)=1-\cos\sqrt{x} \end{cases}\ \text{in } x_0=0,\qquad \begin{cases} f(x)=\tan x^2 \\ g(x)=\log(1+5x) \end{cases}\ \text{in } x_0=0,$$

$$\begin{cases} f(x)=x \\ g(x)=\cos x-1 \end{cases}\ \text{in } x_0=0,\qquad \begin{cases} f(x)=x^x \\ g(x)=e^{x^2} \end{cases}\ \text{a } +\infty.$$

33. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\Big(\lim_{x\to+\infty} f(x)\Big) \cdot \Big(\lim_{x\to-\infty} f(x)\Big) < 0$$

Allora f ammette uno zero.

34. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Allora f ammette uno zero.

35. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L^-, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = L^+$$

con $L^-, L^+ \in \mathbb{R}$, allora f ammette almeno un punto fisso (ovvero un $\bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{x}$.) (Suggerimento: utilizzare opportunamente l'esercizio precedente) alla funzione $g(x) = x - f(x)$.)

36. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\,,$$

e tale che assuma valori di segno opposto, ovvero esistano a, b tale che $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Dimostrare che f possiede minimo e massimo assoluti su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizi del 12 febbraio 2003

37. Calcolare la derivata delle seguenti somme di funzioni, specificando su quale dominio sia definita:

$$f_1(x) = \operatorname{sen} x + 3^x - \arctan x, \qquad f_2(x) = x^4 + \operatorname{arcsen} x, \qquad f_3(x) = \log x - \cos x + \sqrt{x}\,.$$

38. Calcolare la derivata dei seguenti prodotti di funzioni, specificando su quale dominio sia definita:

$$f_4(x) = x^{3/2}\log x, \qquad f_5(x) = \operatorname{sen} x \cos x, \qquad f_6(x) = e^x\,\sqrt[3]{x},$$
$$f_7(x) = 3x^{-1}\operatorname{sen} x\,\log x, \qquad f_8(x) = x^2\log x\,\arctan x, \qquad f_9(x) = 5^x\operatorname{arcsen} x\,\cos x.$$

39. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni, specificando su quale dominio sia definita:

$$f_{10}(x) = \frac{1}{x^3}, \qquad f_{11}(x) = \frac{1}{\operatorname{arcsen} x}, \qquad f_{12}(x) = \frac{1}{x^2 + \cos x}\,.$$

40. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni razionali, specificando su quale dominio sia definita:

$$f_{13}(x) = \frac{x+7}{12x-5}, \qquad f_{14}(x) = \frac{x^2+3x-5}{x^2+x-1}, \qquad f_{15}(x) = \frac{5x^2+3x-1}{2-x}.$$
$$f_{16}(x) = \frac{1-2x^2+2x}{x^2-x+1}, \qquad f_{17}(x) = \frac{2-3x+4x^4+x^7-x^{12}}{1-3x+4x^4+x^7-x^{12}}.$$

41. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni composte, specificando su quale dominio sia definita:

$$f_{18}(x) = (3x+1)^2, \qquad f_{19}(x) = \sqrt{x^2+1}, \qquad f_{20}(x) = \log(2-3x^2),$$
$$f_{21}(x) = (5\log x)^3, \qquad f_{22}(x) = \frac{1}{\arctan(e^x+1)} \qquad f_{23}(x) = 2^{3x+\operatorname{sen} x},$$
$$f_{24}(x) = \operatorname{arcsen}(x^3-1), \qquad f_{25}(x) = \operatorname{sen}(\log(3x+5)), \qquad f_{26}(x) = \frac{e^{3x+1}}{\operatorname{sen}^2 x+4}.$$

42. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni (forma esponenziale), specificando su quale dominio sia definita:

$$f_{27}(x) = x^{\arctan x}, \quad f_{28}(x) = (3x+5)^{\operatorname{sen} x},$$
$$f_{29}(x) = \left(\frac{x+1}{2x+3}\right)^x, \quad f_{30}(x) = \big(\log(\arctan x)\big)^{1/x}.$$

Esercizi del 25 febbraio 2003

43. Mediante l'uso del Teorema dell'Hôpital (dopo avere verificato la validità delle ipotesi del Teorema medesimo), calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi-2\arctan x}{3^{-x}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-\cos x-2x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}-e^{4x}-1}{x\operatorname{sen} x},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-\arctan x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{2x}-e^x}{\tan(7x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{3x-\operatorname{sen}(5x)}{x^2\operatorname{sen} x},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(3x)}{\operatorname{arcsen}(5x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} 3x-2x}{x^3}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x-5x}{3^x+7x},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)^{1/2}-(1+3x)^{1/3}}{\log(1+2x)-\log(1+3x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x-5x}{3^x+7x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(5+4^x)}{\log(3+x^7)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{(\operatorname{sen} x)^x-1}{x}.$$

44. Dimostrare che per ogni $x \in [-1, 0]$ vale la relazione

$$\arccos x = \pi - \operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}\,.$$

Esercizi del 4 marzo 2003

45. Studiare il grafico delle seguenti funzioni:

$$x^3-3x^2, \qquad x^2(x^2-2), \qquad (x^2-6x+5)^4, \qquad x^3+x^2-x+1\,,$$
$$\frac{3-2x}{3x+4}, \qquad \frac{2x-1}{x^2+2}, \qquad \frac{x^3+1}{x^2-4}, \qquad \frac{x-4}{x^2-3x+2}\,,$$
$$x-\sqrt{x^2-1}, \qquad x\,e^{-2x}, \qquad \frac{e^x+3}{e^x-1}, \qquad x|x-2|\,,$$
$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}, \qquad x\log x, \qquad \log(\log x), \qquad x^2\log x\,,$$
$$x^2e^x, \qquad \frac{x-2}{e^x}, \qquad x\sqrt{1-x^2}, \qquad e^{\frac{x-1}{x}}\,.$$

Esercizi dell'11 marzo 2003

46. Studiare il grafico delle seguenti funzioni:

$$x^5-5x^4+5x^3+1, \qquad x^4-4x+5,$$
$$x^2-5x+\log|x-1|, \qquad \log(e^x-x),$$
$$\arctan x-\frac{x}{1+x^2}, \qquad x\log(1+x^2)+2\arctan x-x.$$

47. Calcolare i polinomi di Taylor

a) di ordine 4 della funzione $f_3(x)=\cos x$ nel punto $x_0=\pi$;
b) di ordine 4 della funzione $f_1(x)=e^{3x}$ nel punto $x_0=1$;
c) di ordine 4 della funzione $f_4(x)=\cos(x-2x^2)$ nel punto $x_0=0$;
d) di ordine 4 della funzione $f_2(x)=\log(1+3\,\mathrm{sen}(2x))$ nel punto $x_0=0$.

48. Calcolare i seguenti limiti utilizzando opportuni sviluppi di Taylor delle relative funzioni:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}, \qquad \lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-\cos x-2x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to0}\frac{2e^{2x}-e^{4x}-1}{x\,\mathrm{sen}\,x},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)-\arctan x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{2x}-e^x}{\tan(7x)}, \qquad \lim_{x\to0}\frac{3x-\mathrm{sen}(5x)}{x^2\,\mathrm{sen}\,x},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-2+e^{-3x}}{x}, \qquad \lim_{x\to0}\frac{2e^x-2x-x^2-2}{x^3}, \qquad \lim_{x\to0}\frac{2xe^x-\mathrm{sen}\,x}{\log(1+x)}\,,$$
$$\lim_{x\to0}\frac{2\log(1+x)-2x+x^2}{x^3}, \qquad \lim_{x\to0}\frac{6\,\mathrm{sen}\,x-6x+x^3}{x(1-\cos(x^2))}, \qquad \lim_{x\to0}\frac{\mathrm{arcsen}\,3x-2x}{x^3}\,.$$

Esercizi del 29 aprile 2003

49. Trovare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = 7x^3 - 5x^2 + 3x + 2, \qquad f_2(x) = 7 - 2x - 5x^7, \qquad f_3(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x - 13\cos x,$$
$$f_4(x) = \frac{3x^2 - 2x + 5}{2x^2}, \qquad f_5(x) = \frac{5}{1+x^2} - \frac{2}{\cos^2 x}, \qquad f_6(x) = \frac{5x^3\sqrt[3]{x}}{7x\sqrt[4]{x}},$$
$$f_7(x) = \frac{4}{\sqrt[3]{x}} - 3^x + x^2, \qquad f_8(x) = \frac{5\cos^2 x - 3}{\cos^2 x}, \qquad f_9(x) = 5\cos x + x\sqrt{x} - 5,$$
$$f_{10}(x) = 2^x + 4x^2 - 12\,\mathrm{sen}\,x, \qquad f_{11}(x) = \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2, \qquad f_{12}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{7}{x}.$$

50. Trovare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni:

$$f_{13}(x) = (2x-1)^2, \qquad f_{14}(x) = \cos(3x+4), \qquad f_{15}(x) = 5e^{1-5x},$$
$$f_{16}(x) = 3\,\mathrm{sen}\,x\cos^3 x, \qquad f_{17}(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}, \qquad f_{18}(x) = \frac{1}{7x+9},$$
$$f_{19}(x) = \frac{2}{\cos^2(2x-1)}, \qquad f_{20}(x) = \sqrt{3-4x}, \qquad f_{21}(x) = \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x},$$
$$f_{22}(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}, \qquad f_{23}(x) = \frac{5}{1+9x^2}, \qquad f_{24}(x) = \frac{2\arctan^3 x}{1+x^2}.$$

51. Trovare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni utilizzando il metodo per parti:

$$f_{25}(x) = x^2 e^x, \qquad f_{26}(x) = x\log(4x), \qquad f_{27}(x) = xe^{-2x},$$
$$f_{28}(x) = e^x\,\mathrm{sen}(2x), \qquad f_{29}(x) = \arctan x, \qquad f_{30}(x) = (3x^2 - 2x + 1)\cos x,$$
$$f_{31}(x) = x\log^2 x, \qquad f_{32}(x) = (2x^2 - x)\log x, \qquad f_{33}(x) = e^{-3x}\,\mathrm{sen}\,x.$$

52. Calcolare i seguenti integrali utilizzando la sostituzione suggerita:

$$I_{34}(x) = \int \frac{1}{\sqrt{16x - 4x^2 - 15}}\,dx, \qquad x = \frac{t}{2} + 2,$$
$$I_{35}(x) = \int \frac{1}{9x^2 - 12x + 5}\,dx, \qquad x = \frac{t}{3} + \frac{2}{3},$$
$$I_{36}(x) = \int x\sqrt[3]{1+x}\,dx, \qquad x = t^3 - 1.$$

Esercizi del 30 aprile 2003

53. Trovare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni razionali:

$$f_1(x) = \frac{3}{5x-1}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{7-2x}, \qquad f_3(x) = \frac{12x-1}{4x+3}, \qquad f_4(x) = \frac{3-x}{2x+1},$$

$$f_5(x) = \frac{x^2}{x+2}, \qquad f_6(x) = \frac{1}{x^2-6x+5}, \qquad f_7(x) = \frac{1}{4x^2-4x+1},$$
$$f_8(x) = \frac{1}{x^2+x+1}, \qquad f_9(x) = \frac{1}{2x^2-3x+1}, \qquad f_{10}(x) = \frac{1}{x^2+2x+5},$$
$$f_{11}(x) = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}, \qquad f_{12}(x) = \frac{3x+1}{(x+2)^2}, \qquad f_{13}(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1},$$
$$f_{11}(x) = \frac{x^2}{x^2-5x+4}, \qquad f_{12}(x) = \frac{2x^2-x+1}{x^2+2x+3}, \qquad f_{13}(x) = \frac{x^3}{x^2-1}.$$

54. Ricordando le formule

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

utilizzare la sostituzione

$$x = 2\,\arctan t, \quad \text{ovvero} \quad t = \tan\frac{x}{2},$$

per calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni:

$$f_{14}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \qquad f_{15}(x) = \frac{1}{2\operatorname{sen} x - 5\operatorname{sen} x + 1}, \qquad f_{16}(x) = \frac{1}{\cos x + 2\operatorname{sen} x + 1}.$$

55. Calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni mediante la sostituzione $t = e^x$

$$f_{17}(x) = \frac{3e^x}{e^{2x}-3e^x+2}, \qquad f_{18}(x) = \frac{2e^{2x}+e^x}{e^{2x}+1}.$$

56. Ricordando le formule

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x},$$

utilizzare la sostituzione

$$x = \arctan t, \quad \text{ovvero} \quad t = \tan x,$$

per calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni:

$$f_{17}(x) = \frac{1}{2+\operatorname{sen}^2 x}, \qquad f_{18}(x) = \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x - 4\cos^2 x - 1}.$$

Esercizi del 14 maggio 2003

57. Studiare la convergenza delle seguenti serie e, quando possibile, calcolarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5}{4^n} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{5n+1} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} 4^{-n} \qquad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3}{2^{2n-3}}$$

58. Studiare la convergenza delle seguenti serie utilizzando i criteri di asintoticità e il criterio necessario ($a_n \to 0$):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\log n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3}{n^3-5n-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n-1}{1-2n^2+n^4} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{7/6}+n^{1/15}+n^{8/5}+1}{1+n^{3/2}+n^2+\sqrt{n^{13/3}+2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-3}{n^2+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\log n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3-7n+3}{2n+9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{2n^5+n+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{n}-\ln n+1}{5n^2-3n+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3\sqrt{n}-1}{3n^{3/2}-2n+3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n}$$

Esercizi del 21 maggio 2003

59. Studiare la convergenza delle seguenti serie utilizzando il criterio del confronto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \operatorname{sen}^2 n - 1}{3^n+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$$

60. Studiare la convergenza delle seguenti serie utilizzando il criterio di asintoticità:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcsen}\frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^4 \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt[4]{\operatorname{sen}\frac{1}{n^7}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{5^n+n^2+2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\operatorname{arcsen}\frac{1}{n}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}-\cos(1/n)}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \tan^{2/5}\frac{1}{n^2}$$

61. Studiare la convergenza delle seguenti serie utilizzando i criteri della radice e/o del rapporto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{4n-1}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+7}{4n+1}\right)^{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{3n+2}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3+2}{2n^3+1}\right)^{3n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{n!}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

62. Studiare la convergenza semplice ed assoluta delle seguenti serie. Per la prima utilizzare, qualora necessario e possibile, il criterio di Leibniz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^3+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{5n^4+2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log(n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\log n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(2\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{n}}+3\operatorname{arcsen}\frac{1}{n}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}+2}$$

Esercizi del 28 maggio 2003

63. Trovare il dominio delle seguenti funzioni di due variabili e disegnarlo sul piano cartesiano. Rappresentare le linee di livello delle funzioni $f_1,\ldots,f_7$.

$$f_1(x,y)=\frac{2x+2y-1}{x-2y+3}, \qquad f_2(x,y)=\frac{1}{x^2-y^2}, \qquad f_3(x,y)=\log\big((x+2)^2+(y-3)^2\big),$$

$$f_4(x,y)=\frac{2x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \qquad f_5(x,y)=\log\big(x^2+y^2-7\big), \qquad f_6(x,y)=\sqrt{3x^2+y^2-2},$$

$$f_7(x,y)=\sqrt{e^{x-y+1}-1}, \qquad f_8(x,y)=\sqrt{x+y-10}+\log(9-x^3-y^2),$$

$$f_9(x,y)=\sqrt{(4-x^2-y^2)(y-x^2-1)}.$$

64. Trovare il dominio e calcolare le derivate parziali prime e seconde delle seguenti funzioni:

$$g_1(x,y)=5x^3-7x^3y^2+3x^2-yx^8+1, \qquad g_2(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}, \qquad g_3(x,y)=\frac{x-3y+1}{2x+y-3},$$

$$g_4(x,y)=e^{x/y}, \qquad g_5(x,y)=2x\cos y-3y^2e^{2x+y}, \qquad g_6(x,y)=\sqrt{-7-2x^2-4y^2},$$

$$g_7(x,y)=e^{3x^2-y}, \qquad g_8(x,y)=\tan(xy), \qquad g_9(x,y)=\sqrt{\log(3x-2y)},$$

$$g_{10}(x,y)=x\arctan y, \qquad g_{11}(x,y)=\frac{2x^2-y^2}{3y+1}, \qquad g_{12}(x,y)=e^{\cos x\cos y}.$$

65. Trovare i punti stazionari delle seguenti funzioni e dire se sono punti di massimo/minimo relativo o di sella.

$$k_1(x,y)=2y^2-x^2+2xy+2x+1, \qquad k_2(x,y)=\frac{1}{x^2-2x+y^2+2},$$

$$k_3(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}, \qquad k_4(x,y)=2x^3+2y^3-3x^2y-3y+5.$$