Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2001/02

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica e in TWM

Esercizi di Analisi Matematica

Dott. Paolo Baiti

Esercizi del 31 Ottobre 2001

1. (Vedi esercizio del Libro di Testo n. 3.3-3) Provare che ogni numero naturale ≥ 2 è punto di accumulazione per l'insieme

$$A = \left\{ \frac{n}{m} + p\frac{m}{n} \ : \ n, m, p \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. (Vedi esercizio del Libro di Testo n. 3.3-4) Determinare tutti i punti di accumulazione (finiti o infiniti) dei seguenti insiemi:

$$A_1 = \left\{ (-1)^n \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad A_2 = \left\{ (-1)^n \frac{n+1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\},$$
$$A_3 = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad A_4 = \left\{ n^2(-1)^n + \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$
$$A_5 = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3. Determinare tutti i punti di accumulazione (finiti o infiniti) del dominio delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \sqrt{4 - x^2}, \qquad f_2(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \qquad f_3(x) = \sqrt{(x-3)x^4}, \qquad f_4(x) = \log|\operatorname{sen} x|,$$
$$f_5(x) = \log(2 + \sqrt{x} - \sqrt{36 + x}), \qquad f_6(x) = \log(x + 4 - \sqrt{x^2 - 4}).$$

4. Verificare, usando la definizione, la validità dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} e^{1-7x} = e, \qquad \lim_{x \to 2} x^3 = 8,$$
$$\lim_{x \to 5} \log(6 - x) = 0, \qquad \lim_{x \to 2} \cos x = \cos 2.$$

Esercizi del 15 novembre 2001

5. Calcolare il valore dei seguenti limiti (di funzioni continue):

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\tan x - 3}{2\cos x - 5 \operatorname{sen} x + 7}, \qquad \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 7x + 2^x}{\operatorname{arcsen}(x/2)}, \qquad \lim_{x \to 2} \frac{4 + \sqrt{1+x}}{\sqrt{\cos(\pi x) + 1}}.$$

6. Calcolare, ove possibile, il valore dei seguenti limiti di polinomi:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^5-24x-128),\qquad \lim_{x\to+\infty}(2+3x^2-x^3),\qquad \lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2-x-5),$$
$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-3x-x^2+2),\qquad \lim_{x\to-\infty}(-2x^2+3x-9).$$

7. Calcolare, ove possibile, il valore dei seguenti limiti di funzioni razionali (forma indeterminata ∞/∞):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+x-5}{2x^3+1},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-5x-2}{2-x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^5-1}{12x^3+24x^2+7x-1},$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-x-3x^2}{4x^2-5x+1},\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1-2x^2}{x^5+1},\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-x+17}{5+7x-x^2}.$$

8. Trovare il valore del parametro $a\in\mathbb{R}$ affinché risulti continua la seguente funzione:

$$f(x) := \begin{cases} 7-3ax, & \text{se } x<2,\\ 2x^2-a+1, & \text{se } x\ge 2.\end{cases}$$

9. Trovare i valori del parametro $a\in\mathbb{R}$ affinché risulti continua la seguente funzione:

$$f(x) := \begin{cases} a^2x-ax^2+2a-3, & \text{se } x<1,\\ 2a^2x^2-5ax+2, & \text{se } x\ge 1.\end{cases}$$

10. Trovare i valori dei parametri $a,b\in\mathbb{R}$ affinché risulti continua la seguente funzione:

$$f_{a,b}(x) := \begin{cases} a^2x^2-3ax+3+2b, & \text{se } x<1,\\ ax^2-b^2x-1, & \text{se } x\ge 1.\end{cases}$$

Disegnare il luogo geometrico descritto da tali coppie nel piano, ovvero rappresentare l'insieme

$$C := \big\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \ :\ f_{a,b} \text{ è continua }\big\}.$$

Esercizi del 20 novembre 2001

11. Calcolare, ove possibile, il valore dei seguenti limiti di funzioni irrazionali (forma indeterminata $\infty-\infty$):

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}\big),\qquad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{2x^2+3x+1}-\sqrt{1-x^2}\big),$$
$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^4+3x-1}-\sqrt{x^4+1}\big),\qquad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x-5}\big),$$
$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^4-2x^2-1}-\sqrt{x^4-2}\big),\qquad \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{2x^2+x-1}-\sqrt{3x+7}\big).$$

12. Calcolare i seguenti limiti, utilizzando un cambiamento di variabile:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos(x-\pi/2)}{\pi-x}, \qquad \lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\operatorname{sen}x}{(2x-\pi)^2}.$$

13. Calcolare ove possibile il valore dei seguenti limiti (forma L/∞, oppure $L/0$):

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x-7}{x^4}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{7+2x}{x^3}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-x}}{4x^2}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{3x-2}{1-\cos x}.$$

14. Calcolare, utilizzando il teorema dei due carabinieri, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right).$$

15. Calcolare i seguenti limiti (forma $0\cdot\{\text{funz. limitata}\}$):

$$\lim_{x\to 2}(x^2-4)\left(\operatorname{sen}\frac{2x}{x-2}+3\right), \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x\cos e^{2x}.$$

16. Calcolare i seguenti limiti (di funzioni trigonometriche):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\tan(3x)}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-1}{5x^2}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x\cot x}{7x}.$$

17. Di ricapitolazione.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^4},$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+\cos x), \qquad \lim_{x\to+\infty}x(5-\cos x), \qquad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{sen}(e^{x+x^2})\tan(1/x^2),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x-\operatorname{sen}x}{2x+7\operatorname{sen}x}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{5x-\operatorname{sen}x}{2x+7\operatorname{sen}x}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-5x\operatorname{sen}x-2}{x^2+1},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\operatorname{sen}x}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x^2+2x^3}}{x\operatorname{sen}x}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\cos(5x)}-\sqrt{x+1}\right),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5}{2x^4-3x^5}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{5^x+7x}{3^x-2x}, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{5^x+7x}{3^x-2x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^{100}+1)}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(3x)+2}{\log(2x)+3}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{1/2}+5}{x^2+3x^{3/2}+1}.$$

Fac-simile del primo compitino del 5 dicembre 2001

18. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}(2x)}{x^3}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{3x^2+5}\right), \qquad \lim_{x\to-\infty}(x^2-1)\left(2^{-x}+1\right),$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x+2}{7x^2+1},\qquad \lim_{x\to+\infty}3^{-x}(1+\operatorname{sen}\cos x^2),\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-7x-12}{x^2-x^3+1},$$
$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-5x+2}{2x^3+x^2+3},\qquad \lim_{x\to1}\frac{1}{x^3-x^2-x+1},\qquad \lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan(3\pi/2-x)}{x-\pi/2},$$
$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-3x+5}{1-x},\qquad \lim_{x\to\pi/2-}\frac{\tan(\pi+x)}{2x-\pi},\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2-1}\right),$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{2-x}\right),\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x-5^x}{3^x+4^x},\qquad \lim_{x\to0^+}\frac{(1-\cos\sqrt{x})\sqrt{x}}{3x\operatorname{sen}\sqrt{x}+5x^3}.$$

19. Trovare i valori del parametro $a\in\mathbb{R}$ affinché risulti continua la seguente funzione:

$$f(x):=\begin{cases}\dfrac{a^2}{2}(x-1)^2+2a-3, & \text{se } x\le 0,\\[2mm] \dfrac{\cos(ax)-1+ax\operatorname{sen}x-2x^2}{x^2}, & \text{se } x>0.\end{cases}$$

Esercizi dell'11 gennaio 2002

20. Calcolare il valore dei seguenti limiti.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^{3x}}{x},\qquad \lim_{x\to0}\frac{e^{\operatorname{sen}x}-\cos\sqrt{x}}{x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\sqrt{x^2+1}}{\log\frac{x^3+1}{3x+5}},$$

21. Calcolare il valore dei seguenti limiti (si ricordi anche il limite fondamentale $\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x=e$):

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{3x},\qquad \lim_{x\to0}(1-3x)^{\frac{7}{x}},\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x^2-x},$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+x+2}\right)^x,\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1-x}{x+5}\right)^x,\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x-5}{x+3}\right)^x,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3x+1}{5x+4}\right)^x,\qquad \lim_{x\to0}(1+\operatorname{sen}(2x))^{\frac{1}{3\operatorname{arcsen}x}},\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2x}{x^2+1}\right)^x.$$

22. Calcolare i seguenti limiti di forme esponenziali:

$$\lim_{x\to1}(1-x)^{x^2},\qquad \lim_{x\to0^+}\left(1-2(x+1/2)^2-3x\right)^{1/x},\qquad \lim_{x\to0^+}\left(2e^x+\operatorname{sen}x\right)^{1/x},$$
$$\lim_{x\to0^+}\left(3e^x-2\cos x\right)^x,\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\arctan x}\right)^x,\qquad \lim_{x\to0^+}(\operatorname{sen}x)^{\log x}.$$

23. Calcolare i seguenti limiti di forme esponenziali

$$\lim_{x\to0^+}(1+\arctan x)^{1/x},\qquad \lim_{x\to0^+}\left(e^x-x^2\right)^{\log x},\qquad \lim_{x\to0^+}(x\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{\log(2x^2)}},$$
$$\lim_{x\to0}\left(\operatorname{sen}x^2+\cos x\right)^{1/x^2},\qquad \lim_{x\to0^+}(1+2\tan x)^{\frac{\sqrt{3+x}}{x}},\qquad \lim_{x\to0^+}\left(e^x-x^x\right)^x.$$

Esercizi del 18 gennaio 2002

24. Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Allora f ammette uno zero.

25. Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L^-, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = L^+$$

con $L^-, L^+ \in \mathbb{R}$, allora f ammette almeno un punto fisso (ovvero un $\bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{x}$.) (Suggerimento: utilizzare opportunamente l'esercizio 1) alla funzione $g(x) = x - f(x)$.)

26. Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\,,$$

e tale che assuma valori di segno opposto, ovvero esistano a, b tale che $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Dimostrare che f possiede minimo e massimo assoluti su tutto $\mathbb{R}$.

27. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty\,.$$

Allora vale

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Vale ancora il risultato se f non è supposta continua ?
(Suggerimento: per ipotesi, definitivamente per x sufficientemente grande si ha $|f(x)| \geq 1$. Mostrare che per gli stessi x la funzione $f(x)$ è sempre positiva oppure sempre negativa (dal che segue la tesi). A tal fine, ad esempio, si può ragionare per assurdo ed utilizzare opportunamente il teorema degli zeri.)

28. Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to0^+} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}}}{x}\,.$$

Esercizi del 25 gennaio 2002

29. Delle funzioni seguenti

$$g_1(x) := x^3 + x, \qquad g_2(x) := \frac{1}{x} - \log x$$

trovare il dominio, dire se sono strettamente monotone, trovare il dominio dell'eventuale inversa, e dire se questa è continua.

30. Calcolare la derivata delle seguenti somme di funzioni, specificando su quale dominio sia definita:

$$f_1(x) = \log x + e^x + \tan x, \qquad f_2(x) = x + \arccos x, \qquad f_3(x) = \cos x + \sqrt[3]{x}\,.$$

31. Usando le identità $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$, $\cos(\arccos x) = x$ verificare che

$$D \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

32. Verificare che

$$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

nei tre casi seguenti: (1) $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ (già fatto a lezione); (2) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{Z}$ (per $n < 0$ usare la regola della derivazione del reciproco); (3) $x > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ (scrivendo $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ e usando la regola della derivazione di funzioni composte).

33. Calcolare la derivata dei seguenti prodotti di funzioni, specificando su quale dominio sia definita:

$$f_4(x) = e^x \operatorname{sen} x, \qquad f_5(x) = x^{2/3} \arctan x, \qquad f_6(x) = x^2 \log x,$$
$$f_7(x) = e^x \cos x \log x, \qquad f_8(x) = 3x^2 (\operatorname{arcsen} x) \arccos x, \qquad f_9(x) = 4e^x (\arctan x) \log x.$$

34. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni, specificando su quale dominio sia definita:

$$f_{10}(x) = \frac{1}{\cos x}, \qquad f_{11}(x) = \frac{1}{\log x}, \qquad f_{12}(x) = \frac{1}{\arccos x}\,.$$

35. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni razionali, specificando su quale dominio sia definita:

$$f_{13}(x) = \frac{x^2+3x-7}{x^2+1}, \qquad f_{14}(x) = \frac{2x-3}{x^2-x-6}, \qquad f_{15}(x) = \frac{x^3+3x^2-2x+1}{x+4}.$$
$$f_{16}(x) = \frac{1-2x^2+4x}{x^2+2x+5}, \qquad f_{17}(x) = \frac{2+4x^2+7x^4+9x^8}{1+4x^2+7x^4+9x^8}$$

36. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni composte, specificando su quale dominio sia definita:

$$f_{18}(x) = \cos(x^2+1) \qquad f_{19}(x) = e^{x^3-1} \qquad f_{20}(x) = (\log x)^{3/4}$$
$$f_{21}(x) = \operatorname{sen}(\log(x^4+3x^2+1)), \qquad f_{22}(x) = \log(e^x+1), \qquad f_{23}(x) = \arctan\sqrt{x^2-1}.$$
$$f_{24}(x) = \frac{1}{1+\tan^2 x}, \qquad f_{25}(x) = \cos(\operatorname{arcsen} x), \qquad f_{26}(x) = e^{\frac{1}{2x^2+5x+3}}$$

37. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni, specificando su quale dominio sia definita:

$$f_{27}(x) = \cos^2(\operatorname{sen} x), \qquad f_{28}(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \qquad f_{29}(x) = \log\bigl(x + \sqrt{1+x^2}\bigr) + x\sqrt{1+x^2}.$$

$$f_{30}(x) = \sqrt[3]{2 + x^2 - x^{2/3}}, \qquad f_{31}(x) = \frac{\log\bigl(1+\sqrt{x^2+1}\bigr)}{\operatorname{sen} 3x - 5}, \qquad f_{32}(x) = \frac{\operatorname{sen} e^x + 2}{3 + \cos(1/x)}.$$

38. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni (forma esponenziale):

$$f_{33}(x) = (\log x)^x, \qquad f_{34}(x) = (\cos x + \sqrt{x})^{x^3 + \log x}, \qquad f_{35}(x) = (\cos x + 1)^{\operatorname{sen} x}.$$

Esercizi del 1^o febbraio 2002

39. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni (forma esponenziale) specificando dov'è definita:

$$f_1(x) = (1 + 1/x)^x, \qquad f_2(x) = (\operatorname{sen} x + 3)^{x \log x}, \qquad f_3(x) = \left(\frac{x^2+1}{3x^2+2x+1}\right)^x.$$

40. Studiare la derivabilità della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } x \geq 0, \\ 2x^2 - x + 2, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

41. Studiare la derivabilità della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(2x + 3x^2), & \text{se } x \leq 0, \\ \log\sqrt{1+4x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

42. Dimostrare che per $x \geq 0$ vale la seguente relazione

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan x\,.$$

43. Dimostrare che per $x \in [-1, 0]$ la quantità

$$\operatorname{arcsen}\sqrt{1+x^2} + \arccos x$$

è costante e calcolarne il valore.

44. Dopo aver verificato che valgono le ipotesi del Teorema di Weierstrass, determinare i punti di massimo/minimo relativo ed assoluto delle seguenti funzioni sui rispettivi intervalli indicati:

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 1, \quad \text{su } [-1, 2],$$
$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, \quad \text{su } [1/2, 2],$$
$$h(x) = |x - 1| - 2|x - 2|, \quad \text{su } [-2, 3].$$

Esercizi dell'8 febbraio 2002

45. Mediante l'uso del Teorema dell'Hôpital (dopo avere verificato la validità delle ipotesi del Teorema medesimo), calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\cos(3x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2xe^x - \operatorname{sen} x}{\log(1+x)}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2\arctan x - \pi}{\log\frac{1+x}{x}},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x - \operatorname{sen} x}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2\log(1+x) - 2x + x^2}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \cos\sqrt{x}}{x},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/5} - (1-x)^{2/7}}{e^{2x} - e^x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos\sqrt{2x}}{\operatorname{arcsen}(5x)},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{6\operatorname{sen} x - 6x + x^3}{x(1 - \cos(x^2))}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 2 + e^{-3x}}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x\log(e^x + 1)}{\sqrt{3x^4 + 1}},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\sqrt{3x^2 + 1}}{\log\sqrt[3]{2x^3 + 1}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{(\operatorname{sen} x)^x - 1}{x}.$$

46. Studiare le seguenti funzioni:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12, \quad g(x) = \frac{2x^2 - 3}{x + 1}, \quad h(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-1)^2}, \quad k(x) = x^2\sqrt[3]{\log x}\,.$$

Esercizi del 15 febbraio 2002

47. Studiare il grafico delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 1}, \qquad f_2(x) = x^2 e^{\frac{1}{\log x}},$$
$$f_3(x) = x\, e^{\frac{1}{x-1}}, \qquad f_4(x) = \operatorname{arcsen}\frac{2x}{1 + x^2},$$
$$f_5(x) = |2x^2 - 3x| e^{-1/x}, \qquad f_6(x) = x\operatorname{sen} x + \cos x,$$
$$f_7(x) = (x^2)^x, \qquad f_8(x) = |x|^{2/3}(x-2)^2,$$
$$f_9(x) = x - \log(2x^2 + 2x + 1) + \arctan\frac{x}{x+1}.$$

Esercizi del 22 febbraio 2002

48. Trovare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = 3\,\mathrm{sen}\,x - 5x^2 + 7x - 3e^x, \qquad f_2(x) = \frac{2\sqrt{x} - 3x^2 + 1}{5x}, \qquad f_3(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^3\sqrt[4]{x}},$$
$$f_4(x) = (2\sqrt{x} - 1)^2, \qquad f_5(x) = \frac{3}{5x^2} - \frac{1}{x^{2/3}} + 2^x, \qquad f_6(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}},$$

49. Trovare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni:

$$f_7(x) = 3e^{4x-1}, \qquad f_8(x) = \frac{2x-3}{2x^2 - 6x + 5}, \qquad f_9(x) = \mathrm{sen}^2\,x\,\cos x,$$
$$f_{10}(x) = \mathrm{sen}\,x\, e^{2\cos x + 3}, \qquad f_{11}(x) = \frac{\mathrm{sen}\,x - 3}{(3x + \cos x)^2}, \qquad f_{12}(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}.$$

50. Trovare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni utilizzando il metodo per parti:

$$f_{13}(x) = x \log 2x, \qquad f_{14}(x) = x^2 \cos 3x, \qquad f_{15}(x) = e^{-x}\,\mathrm{sen}\,2x,$$
$$f_{16}(x) = \arctan x, \qquad f_{17}(x) = x\sqrt[3]{1+x}, \qquad f_{18}(x) = x\,\mathrm{arcsen}\,x.$$

51. Calcolare i seguenti integrali utilizzando la sostituzione suggerita:

$$I_{19}(x) = \int \frac{1}{\sqrt{16x - 4x^2 - 15}}\,dx, \qquad x = \frac{t}{2} + 2,$$
$$I_{20}(x) = \int \frac{1}{9x^2 - 12x + 5}\,dx, \qquad x = \frac{t}{3} + \frac{2}{3},$$
$$I_{21}(x) = \int x\sqrt[3]{1+x}\,dx, \qquad x = t^3 - 1.$$

Esercizi del 27 febbraio 2002

52. Trovare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni razionali:

$$f_1(x) = \frac{5}{7x+3}, \qquad f_2(x) = \frac{2}{2-3x}, \qquad f_3(x) = \frac{2x-1}{3x+1}, \qquad f_4(x) = \frac{2-x}{4x+1},$$
$$f_5(x) = \frac{x^2}{x+1}, \qquad f_6(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}, \qquad f_7(x) = \frac{1}{2x^2 - x - 1},$$
$$f_8(x) = \frac{1}{9x^2 - 12x + 4}, \qquad f_9(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}, \qquad f_{10}(x) = \frac{1}{2x^2 - x + 1},$$
$$f_{11}(x) = \frac{3x+1}{x^2 - 5x + 6}, \qquad f_{12}(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}, \qquad f_{13}(x) = \frac{x^3}{x^2 + x - 2}.$$

53. Ricordando le formule

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

utilizzare la sostituzione

$$x = 2\,\arctan t, \quad \text{ovvero} \quad t = \tan\frac{x}{2},$$

per calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni:

$$f_{14}(x) = \frac{1}{\cos x}, \qquad f_{15}(x) = \frac{1}{5\cos x + 3\operatorname{sen} x + 3}, \qquad f_{16}(x) = \frac{1}{4\operatorname{sen} x - \cos x + -5}.$$

54. Ricordando le formule

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x},$$

utilizzare la sostituzione

$$x = \arctan t, \quad \text{ovvero} \quad t = \tan x,$$

per calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni:

$$f_{17}(x) = \frac{1}{2+\operatorname{sen}^2 x}, \qquad f_{18}(x) = \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x - 4\cos^2 x - 1}.$$

Esercizi dell'11 aprile 2002

55. Studiare la convergenza dei seguenti integrali generalizzati e, quando possibile, calcolarli:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}\,dx \qquad \int_{-3}^{+\infty} x^4\,dx \qquad \int_4^{+\infty} \frac{7}{3x-2}\,dx$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{5x+1}}\,dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x^2\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

56. Studiare la convergenza dei seguenti integrali generalizzati utilizzando il criterio di asintoticità:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^5+x+1}}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1-x^3}{5x^3+2x+2}\,dx \qquad \int_4^{+\infty} \frac{x^2+3x-2}{3x^3+1}\,dx$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+5}}\,dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x^2+5x+1}\,dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{e^x+1}{\sqrt{e^{3x}+2}}\,dx$$

57. Studiare la convergenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_0^2 \frac{1}{(2-x)^3}\,dx \qquad \int_{-1}^4 \frac{1}{\sqrt[4]{x+1}}\,dx \qquad \int_{1/2}^1 \frac{1}{(2x-1)}\,dx$$
$$\int_0^2 \frac{x^2}{(x-2)^{1/5}}\,dx \qquad \int_1^2 \frac{1}{(x-1)\sqrt{2-x}}\,dx \qquad \int_{-3}^1 \frac{\operatorname{sen} x+2}{x^2+3x-4}\,dx$$

58. (Avanzato) Studiare la convergenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_0^1 \frac{5}{\tan\sqrt[3]{x}}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{1-e^{\sqrt{x}}}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{x-\operatorname{sen} x}\,dx$$

Esercizi del 18 aprile 2002

59. Studiare la convergenza delle seguenti serie e, quando possibile, calcolarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^n} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{5} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{2n-1} \qquad \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{3n+2}}$$

60. Studiare la convergenza delle seguenti serie utilizzando i criteri del confronto, di asintoticità e il criterio necessario ($a_n \to 0$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{n+1}}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3-6n+1}{5n^2+n+3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4-1}{n^2+1+3n^7} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3+n^2+2n^3}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5n^3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+2n^{5/2}-1}{\sqrt[3]{n^7+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (3^n-2^n) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4/5}+n^{7/3}+n^{9/5}+1}{n+\sqrt{n^{15/2}+1}+n^{5/2}}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$$

61. Studiare la convergenza delle seguenti serie utilizzando il criterio di asintoticità:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^5 \frac{1}{n^4} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^{1/n^2}-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\tan\frac{1}{n^2}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n}}$$

62. Studiare la convergenza delle seguenti serie utilizzando i criteri della radice e/o del rapporto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{4n+5}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2}{n^2+1}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{5n+2}\right)^{n^2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n+3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n^2+1}{n^3+2}\right)^n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{4^n n!}$$

Esercizi del 15 maggio 2002

63. Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali:

$$y' + 9y = 0, \qquad y' = 5y, \qquad 2y' - 3y = 0,$$
$$y' + 3y = 2, \qquad y' = 2y - 1, \qquad y' - 7y = 7,$$
$$y' - y \operatorname{sen} t = 0, \qquad y' + (t^2 + 1)y = 0, \qquad y' + ty = 2t - 1.$$

64. Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$y'' - 3y' + y = 0, \qquad y'' + 2y' = 0, \qquad y'' + 3y = 0,$$
$$y'' - y' + 2y = 0, \qquad y'' + 6y' + 9y = 0, \qquad 2y'' - y = 0,$$
$$4y'' - 4y' + y = 0, \qquad y'' - 7y' + 10y = 0, \qquad y'' + 2y' + 5y = 0.$$

65. Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$y'' + y' + 4y = 3t, \qquad y'' - 3y' + 2y = e^{-t}, \qquad y'' + 2y = 3 \operatorname{sen} t,$$
$$y'' - y' - 2y = t^2 - t + 1, \qquad y'' - 6y' + 5y = 2 \operatorname{sen} t, \qquad y'' - 4y = e^{2t},$$
$$y'' + y = 2 \cos t, \qquad y'' - 2y' + y = 3e^t, \qquad y'' - 2y' - 3y = te^{-t}.$$

66. Individuare per ogni equazione dell'esercizio precedente la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Esercizi del 23 maggio 2002

67. Trovare il dominio delle seguenti funzioni di due variabili e disegnarlo sul piano cartesiano. Rappresentare le linee di livello delle funzioni $f_1, \ldots, f_6$.

$$f_1(x,y) = \frac{1 - 2x + 3y}{x - y + 2}, \qquad f_2(x,y) = \log(x^2 + (y-1)^2), \qquad f_3(x,y) = e^{\sqrt{2x-y}},$$
$$f_4(x,y) = \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{x - y}, \qquad f_5(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \sqrt{y - 3},$$
$$f_6(x,y) = \sqrt{x^2 + 2y^2 - 3}, \qquad f_7(x,y) = \operatorname{arcsen}(x - y) + \sqrt{x^2 + y^2 - 9}.$$

68. Trovare il dominio e calcolare le derivate parziali prime e seconde delle seguenti funzioni:

$$g_1(x,y) = 2x^2y - y^3 + 5xy^2 - 3xy + 7, \qquad g_2(x,y) = \sqrt{x^3 - y^3}, \qquad g_3(x,y) = \frac{x^2 + 2y^2}{x - y},$$
$$g_4(x,y) = 2y^3 + 3x^2y^2 + 7y - 1, \qquad g_5(x,y) = \sqrt{\frac{x}{y}}, \qquad g_6(x,y) = \sqrt{-1 - x^2 - y^2},$$
$$g_7(x,y) = e^{2x^2 - y^2}, \qquad g_8(x,y) = \cos x \, \cos y, \qquad g_9(x,y) = \arctan(x + y),$$
$$g_{10}(x,y) = \log \frac{x^2 + 1}{y^2 - 1}, \qquad g_{11}(x,y) = x^{y-x}, \qquad g_{12}(x,y) = e^{xy} \cos(xy).$$

69. Trovare i punti stazionari delle seguenti funzioni e dire se sono punti di massimo/minimo relativo o di sella.

$$k_1(x,y) = e^{x^2-y^2}, \qquad k_2(x,y) = \log(x^2+y^2+3),$$
$$k_3(x,y) = 3x^3+2y^3-9xy^2+4y+7, \qquad k_4(x,y) = \arctan(2x^2-3y^2+1).$$