Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2000/01

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Esercizi di Analisi Matematica

Dott. Paolo Baiti

Esercizi del 7 novembre 2000

1. (Vedi esercizio del Libro di Testo n. 3.3-3) Provare che ogni numero naturale ≥ 2 è punto di accumulazione per l'insieme

$$A = \left\{ \frac{n}{m} + p\frac{m}{n} \ : \ n, m, p \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. (Vedi esercizio del Libro di Testo n. 3.3-4) Determinare tutti i punti di accumulazione (finiti o infiniti) dei seguenti insiemi:

$$A_1 = \left\{ (-1)^n \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad A_2 = \left\{ (-1)^n \frac{n+1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$A_3 = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad A_4 = \left\{ n(-1)^n + \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3. Determinare tutti i punti di accumulazione (finiti o infiniti) del dominio delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad f_2(x) = \sqrt{x^2-1}, \qquad f_3(x) = \sqrt{x^2(x-1)},$$

$$f_4(x) = \log \cos x, \qquad f_5(x) = \log |\cos x| \, .$$

4. Verificare, usando la definizione, la validità dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} e^{2x+1} = e, \qquad \lim_{x\to -1/3} \frac{1}{(3x+1)^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -1} \log(2+x) = 0, \qquad \lim_{x\to 1} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 1 \, .$$

Esercizi del 22 novembre 2000

5. Calcolare il valore dei seguenti limiti (di funzioni continue):

$$\lim_{x\to\pi} \frac{2+\operatorname{sen} x}{3\cos x}, \qquad \lim_{x\to 1} \left(2x^2 + 3 - e^{x+1}\right), \qquad \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+x+2}}{1+x}.$$

6. Calcolare i seguenti limiti, utilizzando un cambiamento di variabile:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{(\pi-x)^2}, \qquad \lim_{x\to\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(2x-\pi)}{x-\pi/2}.$$

7. Calcolare ove possibile il valore dei seguenti limiti (forma L/∞, oppure $L/0$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{1-\cos x}.$$

8. Calcolare ove possibile il valore dei seguenti limiti (forma indeterminata $+\infty-\infty$):

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+3}-\sqrt{x}), \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^4+2x+1}-\sqrt{x^4-1}\right),$$
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^3+2x-5}\right), \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^4-3x^2+1}-\sqrt{x^4+1}\right).$$

9. Calcolare ove possibile il valore dei seguenti limiti (forma indeterminata ∞/∞):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-4x+7}{2x^2+1}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-2}{1-x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x^5-10x^3-1},$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3-x^2}{x^3+7x^2+1}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1+2x^2}{3x^2-1}.$$

10. Calcolare, riconducendoli a limiti notevoli, i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+\operatorname{sen} x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{sen} x+2\cos x-2}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^4 x}{x^2}.$$

11. Calcolare, utilizzando il Teorema dei due carabinieri, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right).$$

12. Calcolare i seguenti limiti (forma $0\cdot$(funz. limitata)):

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \operatorname{sen}(5x), \qquad \lim_{x\to 1} (x^2-1)\left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{x-1}\right).$$

13. Di ricapitolazione. I limiti sono ordinati per difficoltà crescente.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{e^{3x-4}}{\operatorname{sen}(\pi/2x)}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cot x$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{(\operatorname{sen} x)/x}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$, (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^3}$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^4}$,

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(x+\operatorname{sen} x\big)$, (h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2(2-\operatorname{sen} x)$, (i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}(1/x)\cos(x^{1000}+1)$,

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+2\operatorname{sen}x}{3x+2\operatorname{sen}x}$, (m) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x+2\operatorname{sen}x}{3x+2\operatorname{sen}x}$, (n) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+2x\operatorname{sen}x-1}{x+7}$,

(o) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\operatorname{sen}x}{x^3}$, (p) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2+3x)}{x\operatorname{sen}x}$, (q) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2\operatorname{sen}x}-x\right)$,

(r) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2-x^3}$, (s) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{3^x-10x}{2^x+5x}$, (t) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^{3/2}-x+1}{x^2-2\sqrt{x}+4}$.

14. Trovare il valore del parametro $a\in\mathbb{R}$ affinché risulti continua la seguente funzione:

$$f(x) := \begin{cases} 3ax-1 & \text{se } x<1,\\ 2+3x^2 & \text{se } x\geq 1.\end{cases}$$

15. Trovare i valori del parametro $a\in\mathbb{R}$ affinché risulti continua la seguente funzione:

$$f(x) := \begin{cases} 2ax-1 & \text{se } x<1,\\ 2+2(1-a)x-a^2x^2 & \text{se } x\geq 1.\end{cases}$$

16. Trovare i valori dei parametri $a,b\in\mathbb{R}$ affinché risulti continua la seguente funzione:

$$f(x) := \begin{cases} 2ax^2-(b+a) & \text{se } x<1,\\ 0 & \text{se } x=1,\\ 2x+a+b & \text{se } x>1.\end{cases}$$

Fac-simile di preparazione al primo compitino

17. Calcolare, ove possibile, i seguenti limiti:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\cos(\pi/2-x)}{x-\pi}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{1-5x^2+2x}{3x^2-20x-17}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3-1}{5x^2+4x+7}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}(2x)}{x^3}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(\operatorname{sen}x+2\cos x)e^{-x}$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+2}{x-2}$,

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^3-x^2-x+1}$, (h) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{e^{\operatorname{sen}(\pi/(2x))}}{\sqrt{x^2+1}}$,

(i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$, (l) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4-2e^x}{x^4+e^x}$,

(m) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2-}\frac{\tan(\pi+x)}{2x-\pi}$, (n) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}x^3(2+e^x)$.

18. Trovare i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ affinché risulti continua la seguente funzione:

$$f(x) := \begin{cases} a^2x + 2 & \text{se } x < 1, \\ 3 & \text{se } x = 1, \\ x^2 + 3ax - a^2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Esercizi del 19 Gennaio 2001

19. Ricordando il limite fondamentale $\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = e$, calcolare il valore dei seguenti limiti.

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{x+2}\Big)^x, \qquad \lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big)^{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{x+2}{3x+4}\Big)^x, \qquad \lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{3-x}{4x+5}\Big)^x, \qquad \lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^2+1}{x^2+3x+5}\Big)^x,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0^+}(1-x)^{\log x}, \qquad \lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Svolgimento.

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{x+2}\Big)^x = \lim_{x\to+\infty}\Big(\Big(1+\frac{1}{x+2}\Big)^{x+2}\Big)^{\frac{x}{x+2}} = e^1 = e.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big)^{x^2} = e.$$

$$\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x\to 0}\Big((1+5x)^{\frac{1}{5x}}\Big)^{15} = e^{15}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{x+2}{3x+4}\Big)^x = \Big[(4/3)^{+\infty}\Big] = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{3-x}{4x+5}\Big)^x = \Big[(3/4)^{+\infty}\Big] = 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^2+1}{x^2+3x+5}\Big)^x = \lim_{x\to+\infty}\Big(\Big(1-\frac{3x+4}{x^2+3x+5}\Big)^{-\frac{x^2+3x+5}{3x+4}}\Big)^{-x\frac{3x+4}{x^2+3x+5}} = e^{-3}.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\Big(\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x\Big)^x == \big[e^{-\infty}\big] = 0.$$

Poiché

$$\lim_{x\to 0}\big(\log x \log(1-x)\big) = \lim_{x\to 0}\Big((-x\log x)\cdot\frac{\log(1-x)}{-x}\Big) = [0\cdot 1] = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\log x} = e^0 = 1.$$

$$\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e\Big(\Big(1+\frac{x}{e^x}\Big)^{\frac{e^x}{x}}\Big)^{1/e^x} = [e\cdot e^1] = e^2.$$

20. Calcolare il valore dei seguenti limiti.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-\cos x)}{\log(\operatorname{sen} x)}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^4)}{(1-\cos x)^2}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \big(\log(1+2e^x)-x\big).$$

Svolgimento.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-\cos x)}{\log(\operatorname{sen} x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\frac{1-\cos x}{x^2})+2\log x}{\log(\frac{\operatorname{sen} x}{x})+\log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\frac{1-\cos x}{x^2})/\log x+2}{\log(\frac{\operatorname{sen} x}{x})/\log x+1} = 2.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^4)}{(1-\cos x)^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^4)}{x^4}\cdot\Big(\frac{x^2}{1-\cos x}\Big)^2 = 4.$$

$$\lim_{x\to +\infty} \big(\log(1+2e^x)-x\big) = \lim_{x\to +\infty} \big(\log(1+2e^x)-\log(e^x)\big) = \lim_{x\to +\infty} \log\Big(\frac{1+2e^x}{e^x}\Big) = \log 2.$$

21. Calcolare i seguenti limiti di forme esponenziali.

$$\lim_{x\to 0^+} \big(x^x\big)^x, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)}, \qquad \lim_{x\to 0^+} (1-x^x)^x,$$

$$\lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{sen} 5x)^{\frac{\cos x}{2x}}, \qquad \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x^2)^{\frac{1}{\log_3(x^2)}}, \qquad \lim_{x\to +\infty} x^{\operatorname{sen}(1/x)}.$$

Svolgimento. Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \big(x\log(x^x)\big) = \lim_{x\to 0^+} \big(x^2\log x\big) = 0\,,$$

segue che

$$\lim_{x\to 0^+} \big(x^x\big)^x = e^0 = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^{\left(x^x\right)} = [0^1] = 0.$$

Poiché

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \big(x\log(1-x^x)\big) &= \lim_{x\to 0^+} \big(x\log(1-e^{x\log x})\big) = \\
&= \lim_{x\to 0^+} \Big(x\Big(\log\Big(\frac{1-e^{x\log x}}{-x\log x}\Big)+\log(-x\log x)\Big)\Big) = \\
&= \lim_{x\to 0^+} \big(x\log(-x\log x)\big) = \\
&= \lim_{x\to 0^+} \big(x\log x + x\log|\log x|\big) = 0+0 = 0,
\end{aligned}$$

si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \big(1-x^x\big)^x = e^0 = 1.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \big(1+\operatorname{sen} 5x\big)^{\frac{\cos x}{2x}} = \lim_{x\to 0^+} \Big(\big(1+\operatorname{sen} 5x\big)^{\frac{1}{\operatorname{sen} 5x}}\Big)^{\cos x\,\frac{\operatorname{sen} 5x}{2x}} = \big[e^{5/2}\big] = e^{5/2}.$$

Siccome

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\big(\operatorname{sen} x^2\big)}{\log_3(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \log 3 \cdot \frac{\log\Big(\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}\Big) + 2\log x}{2\log x} = \log 3\,,$$

allora

$$\lim_{x\to 0^+} \big(\operatorname{sen} x^2\big)^{\frac{1}{\log_3(x^2)}} = e^{\log 3} = 3\,.$$

Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \big(\operatorname{sen}(1/x)\log x\big) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} \cdot \frac{\log x}{x}\right) = [1\cdot 0] = 0$$

allora

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\operatorname{sen}(1/x)} = e^0 = 1\,.$$

22. (Avanzato) Calcolare il valore dei seguenti limiti.

$$\lim_{x\to+\infty} \big(\sqrt{x^2+2x} - x\big)^x, \qquad \lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{\frac{1}{\log(\log(1+x))}}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x^3)^{1/x} - \cos x}{x^2}.$$

Svolgimento. Si osservi innanzitutto che

$$\lim_{x\to+\infty} \big(\sqrt{x^2+2x} - x\big) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+2/x}+1} = 1\,,$$

per cui il limite cercato è nella forma indeterminata $[1^\infty]$. Inoltre

$$\sqrt{x^2+2x} - x = 1 + \frac{1-\sqrt{1+2/x}}{1+\sqrt{1+2/x}}\,.$$

Detta allora $f(x) = \frac{1-\sqrt{1+2/x}}{1+\sqrt{1+2/x}}$ si ha che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ perciò

$$\lim_{x\to+\infty} \big(\sqrt{x^2+2x} - x\big)^x = \lim_{x\to+\infty} \Big(\big(1+f(x)\big)^{1/f(x)}\Big)^{xf(x)} = \big[e^{\lim_{x\to+\infty}(xf(x))}\big]\,,$$

e ci si è ricondotti a calcolare il $\lim_{x\to+\infty}(xf(x))$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} (xf(x)) = \lim_{x\to+\infty} \left(x \frac{-2/x}{(1+\sqrt{1+2/x})^2}\right) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}\,.$$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \big(\sqrt{x^2+2x} - x\big)^x = e^{-1/2}\,.$$

Si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\tan x)}{\log(\log(1+x))} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\Big(\frac{\tan x}{x}\Big) + \log x}{\log\Big(\frac{\log(1+x)}{x}\Big) + \log x} = 1\,,$$

perciò

$$\lim_{x\to 0^+} \big(\tan x\big)^{\frac{1}{\log(\log(1+x))}} = e^1 = e\,.$$

Siccome

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\big(1+x^3\big)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(x^2 \cdot \frac{\log\big(1+x^3\big)}{x^3}\right) = 0\cdot 1 = 0\,,$$

si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\big(1+x^3\big)^{1/x} - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^{\frac{\log\left(1+x^3\right)}{x}} - 1}{\frac{\log\left(1+x^3\right)}{x}} \cdot \frac{\log\big(1+x^3\big)}{x^3} + \frac{1-\cos x}{x^2} \right) =$$

$$= 1\cdot 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,.$$

23. Siano $a \in (0,1)$ e $\bar{y} \in [0, \sqrt{a}]$. Dimostrare che la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(a - y_n^2) \\ y_0 = \bar{y} \end{cases}$$

converge a $\sqrt{a}$ per $n \to \infty$ (questo è un modo alternativo di calcolare il valore approssimato della radice quadrata di a). (Suggerimento: provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ valgono le due relazioni $0 \le y_n \le \sqrt{a}$ e $y_n \le y_{n+1}$).

Svolgimento. Proviamo innanzitutto per induzione che $y_n \le \sqrt{a}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per ipotesi $y_0 \le \sqrt{a}$. Supponiamo ora la tesi vera per n e proviamola per $n+1$. Si ha

$$\sqrt{a} - y_{n+1} = \sqrt{a} - y_n - \frac{1}{2}\big(a - y_n^2\big) = \big(\sqrt{a} - y_n\big)\left(1 - \frac{1}{2}\big(\sqrt{a} + y_n\big)\right) \ge 0\,,$$

per l'ipotesi induttiva e poiché $y_n + \sqrt{a} \le 2\sqrt{a} \le 2$. Per il principio d'induzione si ha che $y_n \le \sqrt{a}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Da questo segue (sempre per induzione) che

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\big(a - y_n^2\big) \ge 0, \qquad y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2}\big(a - y_n^2\big) \ge 0\,,$$

ovvero $y_{n+1} \ge y_n$ per ogni n. Per la monotonia della successione y_n deve allora esistere il limite $L = \lim_{n\to\infty} y_n$ e deve valere $0 \le L \le \sqrt{a}$. Passando al limite nella regola ricorsiva otteniamo che L deve soddisfare la relazione

$$L = L + \frac{1}{2}(a - L^2)\,,$$

dalla quale segue facilmente che $L = \sqrt{a}$. Quindi $x_n \to \sqrt{a}$.
Per quanto riguarda l'errore, si ha

$$e_{n+1} = \big|y_n - \sqrt{a}\big| = \sqrt{a} - y_n = \big(\sqrt{a} - y_n\big)\left(1 - \frac{1}{2}\big(\sqrt{a} + y_n\big)\right) \le e_n(1 - \sqrt{a}/2)\,.$$

L'errore quindi decresce in maniera lineare. Ci aspettiamo dunque che la convergenza del metodo dato a lezione sia più veloce di quella del metodo appena presentato.
Calcolare come varia l'errore $e_n = |y_n - \sqrt{a}|$ al variare di n, ovvero la relazione che intercorre tra e_{n+1} ed e_n.

Provare ad implementare il calcolo su un computer per entrambi i metodi proposti usando il valore comune $a = 1/2$. Scegliere $y_0 = 0$ e $x_0 = 1$: in tal modo l'errore iniziale per entrambi è uguale a 1/2. Quale dei due metodi sembra più efficiente?

24. Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

e tale che esiste un punto x_0 tale che $f(x_0) < 0$. Dimostrare che f possiede minimo su tutto $\mathbb{R}$. Il risultato è ancora valido se non si chiede l'esistenza di tale x_0?

Svolgimento. In relazione a $k = 0$, per il primo limite esisterà un $L < 0$ tale che $f(x) > k = 0$ per ogni $x \in (-\infty, L)$. Per il secondo limite, in corrispondenza di $\varepsilon = -f(x_0) > 0$, esisterà un $M > 0$ tale che per ogni $x \in (M, +\infty)$ valga

$$|f(x) - 0| < \varepsilon = -f(x_0), \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) > f(x_0)\,.$$

Ne consegue che per tutti gli x in valore assoluto sufficientemente grande il valore della funzione è maggiore del valore della stessa calcolata nel punto x_0. Si può concludere allora che

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \inf_{x\in[L,M]} f(x)\,,$$

ed il secondo estremo inferiore è effettivamente un minimo per la funzione grazie al Teorema di Weierstrass.
Se infine togliamo l'ipotesi di esistenza di un tale punto x_0 il risultato non vale più, come mostra l'esempio $f(x) = e^{-x}$.

25. Sia $f : [0,1] \to [0,1]$ una funzione continua. Dimostrare che f ammette un punto fisso, ovvero che esiste un $x_0 \in [0,1]$ tale che $f(x_0) = x_0$. (Suggerimento: provare ad usare il Teorema degli zeri applicato alla funzione $g(x) = f(x) - x$).

Svolgimento. Definiamo $g(x) = f(x) - x$. La funzione g è continua su $[0,1]$. Si osserva che i punti fissi di f corrispondono agli zeri di g. Basta allora fare vedere che g ammette zeri.
Ci sono due casi: se $f(0) = 0$ oppure $f(1) = 1$ allora f ammette punto fisso rispettivamente in $x = 0$ oppure $x = 1$. Altrimenti $f(0) \neq 0$ e $f(1) \neq 1$ e siccome per ipotesi l'immagine di f è contenuta in $[0,1]$ si deve avere più precisamente $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$ il che equivale a dire che $g(0) > 0$ e $g(1) < 0$. In questo caso si può allora utilizzare il Teorema degli Zeri e concludere che g ammette una zero in $[0,1]$ e quindi f ammette ivi un punto fisso.

Esercizi del 26 Gennaio 2001

26. Calcolare la derivata delle seguenti somme di funzioni, specificando su quale dominio sia definita:

$$f_1(x) = \log x + e^x + \tan x, \qquad f_2(x) = x + \arccos x, \qquad f_3(x) = \cos x + \sqrt[3]{x}.$$

27. Calcolare la derivata dei seguenti prodotti di funzioni, specificando su quale dominio sia definita:

$$f_4(x) = e^x \operatorname{sen} x, \qquad f_5(x) = x^{2/3} \arctan x, \qquad f_6(x) = x^2 \log x.$$
$$f_7(x) = e^x \cos x \log x, \qquad f_8(x) = 3x^2 \operatorname{arcsen} x \arccos x, \qquad f_9(x) = 4e^x \arctan x \log x.$$

28. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni, specificando su quale dominio sia definita:

$$f_{10}(x) = \frac{1}{\cos x}, \qquad f_{11}(x) = \frac{1}{\log x}, \qquad f_{12}(x) = \frac{1}{\arccos x}.$$

29. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni razionali, specificando su quale dominio sia definita:

$$f_{13}(x) = \frac{x^2 + 3x - 7}{x^2 + 1}, \qquad f_{14}(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - x - 6}, \qquad f_{15}(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x + 4}.$$
$$f_{16}(x) = \frac{1 - 2x^2 + 4x}{x^2 + 2x + 5}, \qquad f_{17}(x) = \frac{2 + 4x^2 + 7x^4 + 9x^8}{1 + 4x^2 + 7x^4 + 9x^8}$$

30. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni composte, specificando su quale dominio sia definita:

$$f_{18}(x) = \cos(x^2 + 1) \qquad f_{19}(x) = e^{x^3 - 1} \qquad f_{20}(x) = (\log x)^{3/4}$$
$$f_{21}(x) = \operatorname{sen}(\log(x^4 + 3x^2 + 1)), \qquad f_{22}(x) = \log(e^x + 1), \qquad f_{23}(x) = \arctan \sqrt{x^2 - 1}.$$
$$f_{24}(x) = \frac{1}{1 + \tan^2 x}, \qquad f_{25}(x) = \cos(\operatorname{arcsen} x), \qquad f_{26}(x) = e^{\frac{1}{2x^2 + 5x + 3}}$$

31. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni, specificando su quale dominio sia definita:

$$f_{27}(x) = \cos^2(\operatorname{sen} x), \qquad f_{28}(x) = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}, \qquad f_{29}(x) = \log\bigl(x + \sqrt{1 + x^2}\bigr) + x\sqrt{1 + x^2}.$$
$$f_{30}(x) = \sqrt[3]{2 + x^2 - x^{2/3}}, \qquad f_{31}(x) = \frac{\log\bigl(1 + \sqrt{x^2 + 1}\bigr)}{\operatorname{sen} 3x - 5}, \qquad f_{32}(x) = \frac{\operatorname{sen} e^x + 2}{3 + \cos(1/x)}.$$

32. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni (forma esponenziale):

$$f_{33}(x) = (\log x)^x, \qquad f_{34}(x) = (\cos x + \sqrt{x})^{x^3 + \log x}, \qquad f_{35}(x) = (\cos x + 1)^{\operatorname{sen} x}.$$

33. Trovare i valori $a, b \in \mathbb{R}$ affinché la seguente funzione sia derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{se } x \leq 0, \\ ax^2 + b, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

34. Trovare l'insieme di continuità e l'insieme di derivabilità della funzione

$$f(x) := \begin{cases} 1 + x - x^2, & \text{se } x \leq 0, \\ \operatorname{sen}\bigl(1 - |1-x|\bigr), & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Esercizi del 2 Febbraio 2001

35. Calcolare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log|x| & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

36. Studiare la derivabilità della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \log \frac{1}{1+x} & \text{se } x \geq 0, \\ \sqrt{x^2 - x^3} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

37. Determinare il più grande intervallo sul quale vale la seguente relazione:

$$2 \arctan x = \operatorname{arcsen} \frac{2x}{1+x^2}.$$

38. Dimostrare che la funzione $f(x) = 2x^3 + 4x + 3$ è invertibile su tutto $\mathbb{R}$ e calcolare $(f^{-1})'(3)$.

39. Dopo aver verificato che valgono le ipotesi del Teorema di Weierstrass, determinare i punti di massimo/minimo relativi ed assoluti delle seguenti funzioni sui rispettivi intervalli di definizione:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2, \quad \text{su } [0,2]$$

$$g(x) = \begin{cases} (x^2)^x & \text{se } x \in [-e, 1],\ x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x^2+1}, \quad \text{su } [-1,1].$$

Esercizi del 9 Febbraio 2001

40. Mediante l'uso del Teorema dell'Hôpital (dopo avere verificato la validità delle ipotesi del Teorema medesimo), calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{7/5} - 1}{\operatorname{sen} x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2x - \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^3 x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2x-x^2-2}{x^3},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(4+e^{5x})}{\sqrt[3]{x^3+2}},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x\log x+2}{\log(1+x^x)},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^{\operatorname{sen} x}-1}{x}.$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x\tan x)^{\frac{1}{\log(1+\operatorname{sen}^2 x)}},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-e}{x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x^2)}{\log(1+3^x)},$$

$$\lim_{x\to 0^+}\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{\log(1+x)}\Big),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-\log(1+\operatorname{sen} x)}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1-\cos x)}{\log(\operatorname{sen} x)}.$$

41. Verificare che per i seguenti limiti

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\operatorname{sen} x}{2x-\cos x},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x+\operatorname{sen} x}{x-\cos 2x},$$

non si può applicare il Teorema dell'Hôpital. Quali ipotesi vengono a mancare? Verificare che tuttavia i limiti esistono e calcolarli.

42. Provare ad usare ripetutamente il Teorema dell'Hôpital al seguente limite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{e^x+1}}{\sqrt{e^x-1}},$$

dopo avere verificato la validità delle ipotesi. Cosa accade? Calcolare il limite senza usare il Teorema dell'Hôpital.

43. Studiare le seguenti funzioni:

$$f(x)=\frac{2x^2-11}{x-2},\qquad g(x)=\frac{2x^2-2x+5}{(x-1)^2},$$

$$h(x)=\sqrt{2e^x-e^{2x}},\qquad k(x)=x^2\sqrt[3]{\log x}.$$

Esercizi del 16 Febbraio 2001

44. Studiare il grafico delle seguenti funzioni:

$$f_1(x)=|x|e^{-x^2},\qquad f_2(x)=x\,e^{\frac{1}{x-1}},$$

$$f_3(x)=\frac{1}{\log^2 x}-\frac{2}{\log x}+1,\qquad f_4(x)=x+\frac{1}{4}\sqrt[3]{1-x^3},$$

$$f_5(x)=\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen} x,\qquad f_6(x)=2\arctan\frac{1}{x}-\log|x-2|,$$

$$f_7(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{1-2\sqrt[3]{x}}+\frac{4}{3},\qquad f_8(x)=1-\operatorname{arcsen}|e^{2x}-1|,$$

$$f_9(x)=\log(x-1)+\log(x+1)-6\sqrt{x^2-1}.$$

Esercizi del 23 Febbraio 2001

45. Trovare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = 3x^2 - 5x + x^2 + 7, \qquad f_2(x) = \frac{1+3x-5x^3}{x^2}, \qquad f_3(x) = \frac{x^2\sqrt[5]{x}}{3\sqrt[3]{x}},$$
$$f_4(x) = \frac{3}{\sqrt[4]{x}} + 7x^2, \qquad f_5(x) = \Big(2x + \frac{1}{x}\Big)^2, \qquad f_6(x) = 3e^x - \frac{7}{1+x^2}$$

46. Trovare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni:

$$f_7(x) = \frac{\tan x}{\cos x}, \qquad f_8(x) = \frac{\operatorname{sen} x + 3\cos x}{\operatorname{sen} x}, \qquad f_9(x) = \cos^2 x \operatorname{sen} x,$$
$$f_{10}(x) = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}, \qquad f_{11}(x) = \frac{2e^{2x} - 3x^2}{e^{2x} - x^3}, \qquad f_{12}(x) = \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}.$$

47. Trovare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni utilizzando il metodo per parti:

$$f_{13}(x) = x^2 \log x, \qquad f_{14}(x) = x^2 \operatorname{sen} 2x, \qquad f_{15}(x) = e^{2x} \operatorname{sen} 3x,$$
$$f_{16}(x) = x \arctan x, \qquad f_{17}(x) = \frac{x}{\cos^2 x}.$$

48. Calcolare i seguenti integrali definiti utilizzando la sostituzione suggerita:

$$I_{18}(x) = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x(6-x)}}\,dx, \qquad t = x/3 - 1,$$
$$I_{19}(x) = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}\,dx, \qquad t = \sqrt{1+e^x},$$
$$I_{20}(x) = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x^2+1}\,dx, \qquad t = \sqrt{x^2+1} - x.$$

Esercizi del 26 Febbraio 2001

49. Trovare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni razionali:

$$f_1(x) = \frac{1}{2-x}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{4x+7}, \qquad f_3(x) = \frac{1}{x^2-1}, \qquad f_4(x) = \frac{2x+1}{3x+4},$$
$$f_5(x) = \frac{x-1}{2x+1}, \qquad f_6(x) = \frac{1}{2x^2+4x+3}, \qquad f_7(x) = \frac{1}{x^2+3x+3},$$
$$f_8(x) = \frac{1}{4x^2+5x+1}, \qquad f_9(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}, \qquad f_{10}(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}.$$

50. Ricordando le formule

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

utilizzare la sostituzione

$$x = 2 \arctan t, \quad \text{ovvero} \quad t = \tan \frac{x}{2},$$

per calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni:

$$f_{11}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \qquad f_{12}(x) = \frac{1}{2 \operatorname{sen} x + \cos x + 2}, \qquad f_{13}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x + 1}.$$

51. Ricordando le formule

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x},$$

utilizzare la sostituzione

$$x = \arctan t, \quad \text{ovvero} \quad t = \tan x,$$

per calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni:

$$f_{14}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x}, \qquad f_{14}(x) = \frac{1}{1 + \cos^2 x}.$$

Fac-simile di preparazione al secondo compitino

52. Calcolare utilizzando (ove possibile) il Teorema de L'Hôpital i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}, \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{(2+x)^{1/2} - 1}{\operatorname{sen} x}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(e^x + 5)}{\sqrt{3x^2 - 1}},$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - \sqrt{1+x}}{x}, \qquad \lim_{x \to 1} \frac{e^{-\frac{1}{\log^2 x}} - \operatorname{sen}(x-1)}{x^3}.$$

53. Studiare e rappresentare il grafico delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \frac{x-1}{x^2},$$

$$f_2(x) := x - \frac{2}{3} \log |x| + \frac{1}{3} \log |x^2 - 3|.$$

54. Calcolare gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni

$$g_1(x) = x - 2x^3 + \frac{2}{x}, \quad g_2(x) = \frac{1}{2 - 3x}, \quad g_3(x) = \frac{x-2}{x^2+1}.$$

55. Calcolare per parti l'integrale indefinito della funzione $g_4(x) = x^2 e^{3x}$.

56. Calcolare l'integrale indefinito della funzione

$$g_5(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 1}$$

mediante la sostituzione $t = e^x$.

Esercizi dell'11 aprile 2001

57. Studiare la convergenza dei seguenti integrali generalizzati e, quando possibile, calcolarli:

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{[3]x^5}}\,dx \qquad \int_1^{+\infty} x^3\,dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x+1}\,dx \qquad \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx\,.$$

58. Studiare la convergenza dei seguenti integrali generalizzati utilizzando il criterio di asintoticità:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3x^5+x+7}}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x^5}{1+x^3}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+5}\,dx\,.$$

59. Studiare la convergenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx \qquad \int_2^3 \frac{1}{(3-x)^2}\,dx \qquad \int_1^2 \frac{x^2}{(x-1)^{2/3}}\,dx\,.$$

60. (Avanzato) Studiare la convergenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{sen}\sqrt{x}}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{1-\cos\sqrt[3]{x}}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{x-\arctan x}\,dx\,.$$

61. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche e, quando possibile, calcolarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{5-3n} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} 3\cdot 4^{-n/2} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{n/3} \qquad \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{2^n}\,.$$

Esercizi del 27 aprile 2001

62. Studiare la convergenza delle seguenti serie utilizzando i criteri del confronto, di asintoticità e il criterio necessario ($a_n \to 0$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n-2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-2n}{5n-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-n+5}{3n^3+5n^2+2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^5+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{-2/n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n)\sqrt{n}}\,.$$

63. Studiare la convergenza delle seguenti serie utilizzando il criterio di asintoticità:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1-\cos\frac{1}{n}\Big)^{1/2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,\operatorname{sen}\frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}-\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$

64. Studiare la convergenza delle seguenti serie utilizzando i criteri della radice e/o del rapporto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n/2}}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}.$$

65. Studiare la convergenza semplice ed assoluta delle seguenti serie. Per la prima utilizzare, qualora necessario e possibile, il criterio di Leibniz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log(n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^3+4} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{sen}\frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^3-1}}.$$

66. (Avanzato) Dimostrare la convergenza e calcolare la somma delle seguenti serie telescopiche:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)(n+k+1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\big(\log n-2\log(n+1)+\log(n+2)\big)$$

dove k è un numero naturale fissato.

Esercizi del 9 maggio 2001

67. Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali:

$$y'=\frac{1}{1+x^2}+1, \qquad y'=\cos x, \qquad y'=1-x^2,$$
$$y'-7y=0, \qquad y'=3y, \qquad y'=-y+2,$$
$$y'+e^x y=0, \qquad y'+\cos x\cdot y=0, \qquad y'+(\operatorname{sen}x)\cdot y=\operatorname{sen}x.$$

68. Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$y''-2y'+2y=0, \qquad y''-5y'=0, \qquad y''+y'-2y=0.$$

69. Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$y''-2y'=e^x, \qquad y''+y'-2y=x^2, \qquad y''-3y=\cos x,$$
$$y''-y=e^x, \qquad y''-3y'+2y=xe^x, \qquad y''+y=\operatorname{sen}x.$$

70. Individuare per ogni equazione dell'esercizio precedente la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Esercizi del 18 maggio 2001

71. Trovare il dominio delle seguenti funzioni di due variabili e disegnarlo sul piano cartesiano. Rappresentare le linee di livello delle funzioni $f_1, \ldots, f_7$.

$$f_1(x,y) = \frac{3}{2+x^2+y^2}, \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}, \qquad f_3(x,y) = \log(3-x^2-y^2),$$
$$f_4(x,y) = \log(2x^2+2y^2-5), \qquad f_5(x,y) = \sqrt{x^2-y^2-1}, \qquad f_6(x,y) = \sqrt{-x^2-y^2},$$
$$f_7(x,y) = \frac{1}{\log(3x+y-3)}, \qquad f_8(x,y) = \sqrt{(x^2-y^2-1)(x^2-y^2)},$$
$$f_9(x,y) = \sqrt{(x^2-y^2-4)(1-x^2)}.$$

72. Trovare il dominio e calcolare le derivate parziali prime e seconde delle seguenti funzioni:

$$g_1(x,y) = 3x^3 - 2y^2 + 7xy - 2, \qquad g_2(x,y) = \operatorname{sen}(e^x), \qquad g_3(x,y) = \frac{2x^2-y^2}{x^2+y^2},$$
$$g_4(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad g_5(x,y) = \sqrt{xy}, \qquad g_6(x,y) = x\operatorname{sen}(xy) + y\cos(xy),$$
$$g_7(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \qquad g_8(x,y) = \log\frac{x}{y}, \qquad g_9(x,y) = \arctan\frac{x}{y},$$
$$g_{10}(x,y) = \arctan\frac{x+y}{1-xy}, \qquad g_{11}(x,y) = y^{\log x}, \qquad g_{12}(x,y) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^y.$$

73. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni nel punto indicato:

$$h_1(x,y) = x^3 + 2y^3 - 3x^2 + xy^3 + 2x + 1, \quad \text{nel punto } (0,1),$$
$$h_2(x,y) = \arctan(xy), \quad \text{nel punto } (1,1),$$
$$h_3(x,y) = \log(2x+y), \quad \text{nel punto } (0,1).$$

74. Trovare i punti stazionari delle seguenti funzioni e dire se sono punti di massimo/minimo relativo o di sella.

$$k_1(x,y) = 2y^2 - x^2 + 2xy + 2x + 1, \qquad k_2(x,y) = \frac{1}{x^2-2x+y^2+2},$$
$$k_3(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}, \qquad k_4(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 3x^2y - 3y + 5.$$

Fac-simile di preparazione al terzo compitino

75. Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\text{a)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^5+2}}\,dx, \qquad b) \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(x^2+1)}}\,dx.$$

76. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n^4+3}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)},$$

$$\text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4n}, \qquad \text{d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2n^3+1}.$$

77. Data l'equazione differenziale $y' + 2y = 4x^2$

a) trovare la soluzione generale dell'omogenea associata,

b) trovare la soluzione generale.

78. Data l'equazione differenziale $y'' - 6y' + 5y = xe^x$

a) trovare la soluzione generale dell'omogenea associata,

b) trovare la soluzione generale,

c) trovare la soluzione che inoltre verifica le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

79. Determinare e rappresentare sul piano cartesiano il dominio della funzione di due variabili $f(x, y) := 1/\operatorname{sen}(2x - y + 1)$. Rappresentare inoltre le linee di livello.

80. Determinare i punti critici della funzione $f(x, y) := 8x^3 + y^3 + 3xy^2 - 2x + 7$ e dire se sono massimi o minimi locali o punti di sella.