Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 1997/98

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica I
Programma Dettagliato

Dott. **Lorenzo Freddi**, Prof. **Gianluca Gorni**

Testi di riferimento: **Giuseppe Anichini, Giuseppe Conti**, *Calcolo 1, Funzioni di una variabile*, Pitagora Editrice Bologna; dispense del Dott. **Freddi**; appunti delle lezioni. Materiale didattico attinente al corso è anche disponibile presso

http://www.dimi.uniud.it/~freddi e http://www.dimi.uniud.it/~gorni

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: Durante il corso si svolgono 3 **"compitini"**, ognuno con votazione data in trentesimi. Chi supera tutti i compitini con voto di almeno 12 è esonerato da altre prove scritte, e deve presentarsi per l'orale entro la sessione estiva.
Tutti gli altri studenti devono sostenere uno scritto e un orale. Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto deve presentarsi all'orale in un appello della stessa sessione (estiva, autunnale, straordinaria). Chi ha superato uno scritto può ritentare un altro scritto, ma il secondo scritto (se consegnato) annulla il precedente. Durante uno scritto si possono usare libri, appunti e calcolatori tascabili, e ci si può ritirare in qualsiasi momento.

1. Insiemi, numeri e funzioni

Il linguaggio della matematica. Proposizioni. Concetti primitivi, assiomi, deduzioni. Connettivi logici. Tabelle di verità, equivalenza logica. Doppia implicazione. Proposizioni sempre vere, regole di deduzione. Doppia implicazione ed equivalenza logica. Quantificatori.

Insiemi, relazioni e funzioni. Concetti primitivi. Insieme vuoto. Uguaglianza e inclusione. Rappresentazioni degli insiemi. Descrizione di un insieme, Paradosso di Russel. Insieme delle parti. Unione e intersezione. Proprietà distributive dell'unione e dell'intersezione. Complementare, differenza. Prodotto cartesiano. Relazioni binarie. Relazioni di ordine. Ordine totale. Funzioni. Immagine e controimmagine. Funzioni iniettive, suriettive, biiettive. Funzioni composte, restrizione. Funzione inversa e invertibilità.

Disuguaglianze e disequazioni. Disuguaglianze. Problema isoperimetrico. Disuguaglianze tra media armonica, geometrica e aritmetica. Disequazioni.

I numeri reali. Operazioni binarie. I numeri naturali. I numeri interi. I numeri razionali. Presentazione assiomatica di $\mathbb{R}$. Assioma della somma, assioma del prodotto, assioma dell'ordine totale, assioma di completezza. Costruzione di $\mathbb{R}$. Altre proprietà di $\mathbb{R}$. Definizione di estremo superiore e inferiore. *Esistenza ed unicità dell'estremo superiore (inferiore) di un insieme limitato superiormente (inferiormente)*. *Proprietà caratteristiche di sup e inf*. Radice n-esima aritmetica.

Le funzioni elementari. Funzioni reali di variabile reale. Funzioni periodiche. Funzioni monotone. Funzioni limitate. Proprietà di simmetria. Potenze ad esponente intero, polinomi e funzioni razionali. Potenze e radici, esponenziali e logaritmi. Potenza ad esponente razionale. La funzione esponenziale. Funzioni circolari. Le funzioni seno e coseno. Identità fondamentale. Grafici. Identità trigonometriche. Funzioni inverse delle funzioni circolari. Tangente e arcotangente. Funzioni iperboliche. Alcune proprietà del valore assoluto.

Il principio di induzione. Fattoriale di un numero naturale. Coefficienti binomiali. *Formula del binomio di Newton*.

Cardinalità. Equipotenza. Insiemi finiti o infiniti. Insiemi numerabili. *Il prodotto cartesiano di insiemi numerabili è numerabile*. *Cardinalità dell'insieme delle parti di un un insieme finito*. L'Ipotesi del Continuo. La cardinalità di $\mathbb{R}$. Rappresentazione decimale di un numero razionale. Rappresentazione decimale di $\mathbb{R}$. *$\mathbb{R}$ non è numerabile*. Densità di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Calcolo combinatorio. Disposizioni con ripetizione. Disposizioni senza ripetizione. Combinazioni senza ripetizione. Combinazioni con ripetizione.

Topologia della retta reale. Ampliamento di $\mathbb{R}$. Intorni. Punti Interni e Insiemi Aperti. Punti di Accumulazione e Insiemi Chiusi. Chiusura, parte interna e frontiera.

2. Limiti e continuità

Successioni e Limiti. Successioni. Successioni monotone e successioni limitate. Limite di una successione. *Le successioni convergenti sono limitate*. *Unicità del limite di una successione*. *Teorema sul limite di una successione monotona*. Operazioni con le successioni. Il numero e. Calcolo di limiti per confronto. Sottosuccessioni. *Teorema di caratterizzazione delle successioni convergenti con le sottosuccessioni*. *Il Teorema degli Intervalli di Cantor*. *Teorema di Bolzano e Weierstraß*. *Da ogni successione limitata si possono estrarre sottosuccessioni convergenti*. La successione delle medie. Il criterio della radice. Il criterio del rapporto. *Successioni di Cauchy*. Successioni definite per induzione. I conigli di Fibonacci.

Limiti di funzioni. Limiti per $x \to +\infty$. Limiti per $x \to -\infty$. Limiti per $x \to x_0$. Definizione generale di limite. Teorema di unicità del limite, teorema della permanenza del segno, teorema del confronto. Operazioni aritmetiche coi limiti (solo enunciato). Se $f \leq g$ allora il limite di f è $\leq$ del limite di g. Caratterizzazione del limite in variabile reale in termini di limiti di successioni. Definizione di limite destro e sinistro. Definizione di funzione debolmente o strettamente crescente o decrescente, e di funzione monotona. Limiti destri e sinistri delle funzioni monotone (senza dimostrazione).

Funzioni continue in singoli punti. Definizione di funzione continua in un punto e di funzione continua, in termini di limite e in termini di ε, δ. La funzione identità è continua. La disuguaglianza $|\operatorname{sen} \alpha| \leq |\alpha|$, giustificata geometricamente. Dimostrazione che la funzione seno è continua. Continuità destra e sinistra. Somma, prodotto e quoziente di funzioni continue. I polinomi sono continui, e le funzioni razionali sono continue nei punti in cui sono definite. Casistica di discontinuità: eliminabile, salto, limite unilaterale infinito, limite unilaterale non esistente. *Teorema della continuità della funzione composta*. Commenti al teorema della continuità della funzione composta. Continuità dell'esponenziale e del logaritmo. Limiti notevoli. Asintoti: verticale, orizzontale ed obliquo.

Funzioni continue globalmente. *Teorema dell'esistenza degli zeri*. Teorema dei valori intermedi. Esempi. Definizione di massimo e minimo globale di una funzione. Esempi. Caratterizzazione della continuità di una funzione in un punto tramite successioni. *Teorema del massimo e minimo di Weierstraß*. Teorema sull'inversa di una funzione continua e strettamente crescente su un intervallo.

3. Derivata

Definizione e calcolo della derivata. Introduzione al concetto di derivata: approccio numerico tramite tabelle di incrementi e approccio grafico. Calcolo di derivate usando la definizione: funzione costante, funzione lineare, funzione quadratica, valore assoluto. Teorema della continuità delle funzioni derivabili. La funzione segno non è derivabile nell'origine. Regole di derivazione di somma, prodotto e quoziente di funzioni derivabili. Approccio alla derivata usando la formula $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\omega(x)$ dove $\omega(x) \to 0$ per $x \to 0$. Regola della derivata della funzione composta. Retta tangente in un punto al grafico di una funzione derivabile. Teorema di derivabilità della funzione inversa. Interpretazione geometrica. Derivate delle funzioni elementari: seno, coseno, esponenziale, logaritmo, tangente, arcoseno, arcocoseno, arcotangente, potenza con esponente qualsiasi e base positiva, potenza con esponente intero e base qualsiasi, radice di indice dispari. Esercizi di calcolo di derivate. La derivata di una funzione vista come una nuova funzione. Derivate seconde, terze e successive.

Applicazioni della derivata. Definizione di massimi e minimi locali e confronto con i massimi e minimi globali. Derivate destre e sinistre. Teorema sui segni della derivata (eventualmente destra o sinistra) nei punti di massimo o minimo locale. Casistica sui problemi di massimo e minimo. *Teorema di Rolle* e interpretazione geometrica. *Teorema del valor medio di Lagrange*, con interpretazione geometrica. Teorema della derivata nulla. Su un intervallo due funzioni derivabili differiscono per una costante se e solo se hanno la stessa funzione derivata. *Teoremi sulla relazione fra monotonia debole o stretta su un intervallo e segno della derivata*. Convessità e concavità. Punti di flesso. Studio qualitativo del grafico di una funzione. Teorema del valor medio di Cauchy. *Regola de L'Hôpital*, enunciato generale e dimostrazione solo per il caso 0/0 in un punto finito con limite finito. Esempi di uso della regola de L'Hôpital.

Formula di Taylor. Polinomi di Taylor di grado 1, 2 e 3. Polinomi di Taylor di grado generale. *Formula di Taylor con resto di Peano* e con resto di Lagrange. Formula di Maclaurin per le funzioni esponenziale, seno e coseno. Polinomi di Taylor della somma, del prodotto, del quoziente e del prodotto di composizione.

Infinitesimi e infiniti. Definizione di infinitesimo. Infinitesimo di ordine superiore e di ordine inferiore, infinitesimi dello stesso ordine e infinitesimi non confrontabili. Ordine di un infinitesimo rispetto ad un infinitesimo campione. Principio di sostituzione degli infinitesimi. Infiniti.

4. Integrale

Introduzione e definizione di integrale. Alcune regole generali per l'area di una figura piana. *Calcolo dell'area di un segmento parabolico*. Formula per la somma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$. Suddivisioni di un intervallo. Somme integrali inferiori e superiori di una funzione rispetto a una suddivisione. Prime proprietà delle somme integrali. Definizione di integrabilità e di integrale secondo Riemann. La funzione $x \mapsto x^2$ è integrabile su $[0, b]$. La funzione di Dirichlet non è integrabile su $[0, 1]$.

Teoremi sugli integrali. *Teorema di integrabilità delle funzioni monotone* (con dimostrazione) e delle funzioni continue (senza dimostrazione). Calcolo degli integrali della funzione costante e della funzione identità usando le somme integrali. Definizione dell'integrale orientato. Prime proprietà dell'integrale (senza dimostrazione): additività sugli intervalli, linearità, monotonia, integrale del valore assoluto. Interpretazione geometrica dell'integrale nel caso di funzioni non positive e intervalli orientati. La funzione integrale di una funzione integrabile. *La funzione integrale è sempre continua*. Esempio: calcolo della funzione integrale per una funzione costante a tratti. *Teorema fondamentale del calcolo*. Definizione di primitiva di una funzione su un intervallo. *Formula fondamentale del calcolo*.

Tecniche di calcolo delle primitive. Proprietà delle primitive: primitiva del prodotto di una funzione per una costante, della somma, della traslazione, dell'omotetia. Integrazione per parti. Integrazione per sostituzione. Integrazione delle funzioni razionali fratte. Funzioni la cui integrazione si riconduce a quella di funzioni razionali.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale

Oltre alle dimostrazioni dei teoremi seguenti bisognerà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti sviluppati e gli **enunciati** delle proprietà di cui non si chiede la dimostrazione, e saper esibire, quando possibile, semplici **esempi** concreti in cui si applicano le definizioni e i teoremi.

1. Esistenza ed unicità dell'estremo superiore (inferiore) di un insieme limitato superiormente (inferiormente).
2. Proprietà caratteristiche degli estremi superiore e inferiore.

3. Formula del binomio di Newton.
4. Il prodotto cartesiano di insiemi numerabili è numerabile.
5. Cardinalità dell'insieme delle parti di un un insieme finito.
6. $\mathbb{R}$ non è numerabile.
7. Le successioni convergenti sono limitate.
8. Unicità del limite di una successione.
9. Teorema sul limite di una successione monotona.
10. Teorema di caratterizzazione delle successioni convergenti con le sottosuccessioni.
11. Teorema degli intervalli di Cantor.
12. Teorema di Bolzano e Weierstraß.
13. Da ogni successione limitata si possono estrarre sottosuccessioni convergenti.
14. Successioni convergenti e successioni di Cauchy.
15. Teorema della continuità della funzione composta.
16. Teorema dell'esistenza degli zeri.
17. Teorema del massimo e minimo di Weierstraß.
18. Teorema di Rolle.
19. Teorema del valor medio di Lagrange.
20. Teoremi sulla relazione fra monotonia debole o stretta su un intervallo e segno della derivata.
21. Regola de L'Hôpital, enunciato generale e dimostrazione solo per il caso 0/0 in un punto finito con limite finito.
22. Formula di Taylor con resto di Peano.
23. Calcolo dell'area di un segmento parabolico.
24. Teorema di integrabilità delle funzioni monotone.
25. La funzione integrale è sempre continua.
26. Teorema fondamentale del calcolo.
27. Formula fondamentale del calcolo.