Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica I
Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni, Prof. Sergio Stella

Testi di riferimento: Franco Conti, *Calcolo*, McGraw-Hill, parti dei capitoli 1, 2, 3, 4, 6.

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

Regolamento d'esame: Durante il corso si svolgono 3 **"compitini"**, ognuno con votazione data in trentesimi. Chi supera tutti i compitini con voto di almeno 12 è esonerato da altre prove scritte; per chi fra questi ha un voto medio ≥ 18 e < 27 l'orale è facoltativo (si faccia vivo/a a un appello orale per sbrigare le formalità); per gli altri è obbligatorio, in ogni caso entro la sessione estiva.
Tutti gli altri studenti devono sostenere uno scritto e un orale. Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere se dare l'orale nello stesso appello o nel successivo. In quest'ultimo caso si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e si ritorna a poter scegliere se dare l'orale subito o all'appello successivo. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento.

1. Limiti di serie e successioni numeriche.

Serie a termini positivi. I paradossi di Zenone e la serie $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$, con interpretazioni geometriche. Paradossi nel manipolare somme infinite come se fossero somme finite qualsiasi. Altra motivazione per le somme infinite: i numeri decimali periodici. Definizione di $0,6666\ldots$ come il minimo fra i numeri maggiori o uguali a tutti i troncamenti decimali finiti $0,6$, $0,66$, $0,666$ eccetera. Più in generale, definizione di somma di infiniti numeri positivi come il minimo fra i numeri maggiori o uguali a tutte le somme parziali. La definizione in linea di principio richiede infinite somme e infiniti confronti fra numeri, ma il caso di $0,6666\ldots$ si può decidere in un numero finito di passaggi. Calcolo di $0,6666\ldots = 2/3$ usando tale definizione. Serie geometrica: definizione e *deduzione della formula per la somma geometrica* $1+x+x^2+\cdots+x^n$. Dimostrazione che la serie geometrica $1+x+x^2+x^3+\ldots$ ammette una somma quando $0 \leq x < 1$. La disuguaglianza $(1+h)^n > nh$ per $n, h \geq 0$. La serie a termini positivi $1+3+9+27+\ldots$ non ammette somma. Ambiguità dei "puntini" per indicare i termini non scritti di una somma e uso del simbolo di sommatoria. Prime proprietà delle sommatorie. Somme telescopiche. *Formule notevoli per le somme finite ricavate e dimostrate in diversi modi: la formula* $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$*, la formula per la somma dei primi* n *numeri dispari, la formula per la somma* $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$.

Successioni. Generalità sulle successioni: definizione astratta, visualizzazione con tabelle, dinamica, successioni iterative, successioni definite per ricorrenza, esempi. Successioni limitate inferiormente e successioni limitate superiormente. Predicati veri "definitivamente". La nomenclatura delle successioni applicata alle serie a termini positivi: definizioni equivalenti di convergenza, somma, divergenza. Esempio: la serie di Mengoli. La serie geometrica e sue varianti, con un'applicazione geometrica e una fisica.

Convergenza delle serie a termini positivi. Criteri di convergenza per serie a termini positivi: criterio del confronto. La convergenza o divergenza di una serie a termini positivi non cambia se si altera un numero finito di addendi. La convergenza della serie $\sum 1/n^2$ dimostrata per confronto con la serie di Mengoli. *La serie armonica.* La serie esponenziale e il numero di Nepero. *Stima dell'errore per il calcolo di e. Dimostrazione che il numero di Nepero è irrazionale.* Criteri di convergenza del rapporto e della radice. Definizione di successione infinitesima. Una serie convergente ha il termine generale infinitesimo. Esempio: la serie aritmetico-geometrica $\sum nx^n$. Esempi di studio della convergenza di serie a termini positivi. Casistica delle serie a termini di segno qualsiasi: $\sum(-1)^n$, $\sum(-1)^{n+1}n$, serie armonica a segni alterni. Definizione di convergenza, divergenza e indeterminazione. Unicità della somma di una serie convergente. Condizione necessaria per la convergenza: termine generale infinitesimo.

Serie a termini di segno variabile. Serie a segno alterno: *criterio di convergenza di Leibniz.* Somma e prodotto per una costante di serie convergenti. Per le serie convergenti non vale la proprietà commutativa: esempio. Il criterio della convergenza assoluta. Esempi di serie convergenti assolutamente e di serie convergenti semplicemente. La somma di una serie non dipende dall'ordine degli addendi se la serie converge assolutamente, mentre dipende se la convergenza è semplice (cenno).

Limiti di successioni. Limite di successioni: definizione e sua visualizzazione. Esempi di limiti di successioni: $\sqrt[n]{a} \to 1$ se $a > 0$, l'algoritmo di Erone per il calcolo di $\sqrt{2}$. Definizione di successioni di Cauchy. La condizione di Cauchy è necessaria e sufficiente per la convergenza di una successione (dimostrazione solo della necessità). La condizione di Cauchy per le serie. Le successioni convergenti sono limitate. Il limite di una successione è compreso fra l'estremo inferiore e l'estremo superiore. Successioni monotone e loro limiti. Teorema dei carabinieri e della permanenza del segno. Teorema sul limite di somma, prodotto, reciproco e radice di successioni convergenti. Regole algebriche sui limiti. Forme indeterminate. Variante del criterio del rapporto e della radice ennesima per le serie a termini positivi usando i limiti. Equivalenza asintotica di serie a termini positivi. Esempi. Definizione dei coefficienti binomiali. Il triangolo di Tartaglia e la relazione $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$. Interpretazione combinatoria dei coefficienti binomiali. Formula del binomio di Newton. *Dimostrazione che la successione $(1+\frac{1}{n})^n$ è crescente e tende al numero di Nepero.* Un'applicazione di tale risultato alla matematica finanziaria.

Cenni all'assiomatica dei numeri reali. Assiomi dell'addizione, della moltiplicazione, dell'ordinamento e dell'estremo superiore. Principio di Archimede. Principio di induzione. Esistenza delle radici ennesime di numeri positivi.

2. Serie di potenze.

Raggio di convergenza. Serie di potenze: definizione e primi esempi (serie geometrica, serie esponenziale). Le serie di potenze viste come "polinomi di grado infinito" e loro utilità nel "rappresentare" funzioni, almeno in certi intervalli. *Struttura dell'insieme dei valori della variabile per i quali il termine generale di una serie di potenze è limitato.* Raggio di convergenza di una serie di potenze: la serie converge assolutamente per $|x| < R$ e non converge per $|x| > R$. Esempi di calcolo di raggio di convergenza e di insieme di convergenza di serie di potenze.

Prodotto di serie e serie di potenze notevoli. Prodotto di due serie $\sum a_n$ e $\sum b_m$ visto come la somma di tutti i prodotti $a_n b_m$ al variare dei due indici n, m. Il problema dell'ordine in cui viene fatta la somma: somma per righe, per colonne, per quadrati, per diagonali (detta anche "somma secondo Cauchy" o "prodotto di convoluzione"). Teorema: se le due serie convergevano assolutamente allora l'ordine in cui viene effettuata la somma dei prodotti $a_n b_m$ è indifferente (senza dimostrazione). La funzione esponenziale definita dalla serie esponenziale: *dimostrazione della formula fondamentale* $\exp(x+y) = \exp x \exp y$*, positività, crescenza, formula* $\exp r = e^r$ *per* r *razionale.* Le serie di potenze del seno, coseno e di $\ln(1+x)$, senza dimostrazione.

Funzioni generatrici. Funzioni generatrici di successioni: definizione, comportamento rispetto alla derivata prima e successive, prodotto di funzioni generatrici, funzione generatrice associata alle somme parziali di una serie. Applicazioni alle successioni ricorsive. Numeri di Fibonacci e loro comportamento asintotico.

3. I concetti fondamentali del calcolo infinitesimale.

L'integrale. Il concetto di area di una regione piana: alcuni principi generali. *Calcolo dell'area della regione sottesa dalla parabola* $y = x^2$ *fra le ascisse 0 e* $b > 0$ *usando i principi generali.* Lo stesso per l'area sottesa dalla curva $y = x^p$, $p > 0$ intero, fra le ascisse 1 e $b > 1$. Area sottesa dalla curva $y = x^p$, $p > 0$ intero, fra le ascisse 1 e $b > 1$ (continuazione). Definizione di suddivisione di un intervallo, di somme inferiori e superiori di una funzione, di integrale inferiore e superiore, di integrabilità e di integrale. Significato geometrico per le funzioni positive e in generale. Ancora sulla definizione di integrale. Esempio di una funzione non integrabile (funzione di Dirichlet), con interpretazione geometrica (l'area di una regione "a pèttine" non è approssimabile con rettangoli). Definizione di funzioni debolmente o strettamente crescenti o decrescenti (monotòne), con interpretazione algebrica (conservazione o inversione dell'ordine) e geometrica (segno del rapporto incrementale). *Le funzioni monotone su un intervallo sono integrabili.* Interpretazione geometrica dell'integrabilità delle funzioni monotone. Definizione di funzione lipschitziana di costante M. Prima interpretazione geometrica: le immagini di due punti non distano più di M volte la distanza fra i punti di partenza. Seconda interpretazione: il rapporto incrementale fra due punti è sempre compreso fra $-M$ ed M. Terza interpretazione: per ogni x il grafico di f è compreso fra le due rette di pendenza $\pm M$ passanti per il punto $(x, f(x))$. Esempi di funzioni lipschitziane (seno, coseno, il quadrato su intervalli limitati) e non lipschitziane (la radice quadrata, il quadrato su $\mathbb{R}$). *Le funzioni lipschitziane sono integrabili. La somma di una serie di potenze con raggio di convergenza* $R > 0$ *è lipschitziana su ogni intervallo* $[-R', R']$ *non appena* $0 \le R' < R$. Applicazione: l'esponenziale e i polinomi sono integrabili. Definizione di $\int_a^b f(x)dx$ quando $a \ge b$ ("integrale orientato"). Proprietà dell'integrale (senza dimostrazione): linearità, integrabilità su sottointervalli, additività su intervalli ($\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$), monotonia.

Derivata. Definizione di funzione infinitesima $\omega(h)$ per $h \to 0$. Significato geometrico. Verifica che le funzioni $h \mapsto h^n$ sono infinitesime. Somma, prodotto e composizione di funzioni infinitesime sono infinitesime. Una costante è infinitesima se e solo se è nulla. Prodotto di una costante per un infinitesimo è infinitesimo. Definizione di derivabilità in termini della scrittura $f(x_0 + h) = f(x_0) + mh + h\omega(h)$ con $h \to 0$. Significato geometrico dei vari addendi. Unicità della costante m e definizione di derivata. Retta tangente al grafico: definizione e significato geometrico di $\omega(h)$ in termini delle pendenze delle rette secanti e della tangente. Ancora sulla definizione di derivata. L'incremento di una funzione derivabile è infinitesimo. Esempi di funzioni non derivabili nell'origine: il valore assoluto e il segno. La derivata della funzione $x \mapsto x^n$: dimostrazioni per induzione e usando la formula del binomio di Newton. Derivata della funzione $1/x$. Linearità della derivata. *Teorema della derivabilità delle serie di potenze.* Esempio: la derivata della funzione esponenziale. La derivata di seno e coseno. Una serie di potenze la cui derivata è $1/x$ per $0 < x < 2$. Definizione di derivata seconda, terza,

n-esima di una funzione e relative notazioni. Derivate successive di una serie di potenze: la relazione $a_n = f^{(n)}(0)/n!$. Il principio di identità delle serie di potenze. Applicazione a una semplice equazione differenziale: le funzioni analitiche f tali che $f'(x) \equiv 0$ sono tutte e solo le funzioni costanti. Ricerca di soluzioni di equazioni differenziali in termini di serie di potenze. *Teorema della derivata nulla*: se una funzione derivabile su tutto un intervallo ha derivata identicamente nulla, allora è costante (dimostrato usando il metodo di bisezione).

Il teorema fondamentale del calcolo. Riesame degli integrali calcolati in precedenza usando la definizione: $\int_0^b x^2 dx$, $\int_1^b x^p dx$, osservando che la derivata rispetto a b del risultato coincide con la funzione integranda. Calcolo di $\int_a^b \frac{1}{x^2} dx$ usando la definizione, con analoga verifica. Il risultato reso plausibile graficamente. Definizione di funzione continua in un punto. Enunciato del *teorema fondamentale del calcolo* per funzioni continue su un intervallo. *Dimostrazione nel caso speciale di funzioni lipschitziane.* Applicazione al calcolo elementare di alcuni integrali e all'integrazione di una serie di potenze.

4. Calcolo differenziale.

Continuità e limiti in variabile reale. Ancora sull'interpretazione geometrica del teorema fondamentale del calcolo. Definizioni equivalenti di continuità in un punto. Continuità a sinistra e a destra. Interpretazione geometrica. Le funzioni lipschitziane sono continue in tutti i punti. Le funzioni derivabili in un punto sono continue in quel punto. Le funzioni analitiche sono continue all'interno dell'intervallo di convergenza. Dimostrazione della continuità di $x \mapsto ax + b$ e di $x \mapsto x^2$ usando la definizione. Alcune funzioni discontinue notevoli: la funzione segno, la parte intera, il $\cos(1/x)$. Cenno alle funzioni continue non derivabili in alcun punto. Comportamento di $x\cos(1/x)$ per $x \to 0$. Definizione di limite finito di $f(x)$ per $x \to x_0$. Confronto con la definizione di continuità. Riformulazione della continuità e della derivabilità in termini del limite. Proprietà elementari: limitatezza, permanenza del segno, confronto, proprietà algebriche (senza dimostrazione). Definizione di limite nel caso di x_0 o del limite infiniti. Definizione di intorno di un punto o di $\pm\infty$ e riformulazione delle varie definizioni di limite in termini di intorni. Ancora commenti sulla definizione di limite. Composizione di funzioni continue. Esempi di calcolo di limite: applicazioni della continuità, delle semplificazioni algebriche, del confronto, limiti destri e sinistri.

Le funzioni elementari. Le funzioni elementari: elenco. Richiami sulle proprietà note della funzione esponenziale. Definizione del logaritmo naturale come inversa della funzione esponenziale. Proprietà algebriche del logaritmo. *Derivabilità del logaritmo. Analiticità del logaritmo e la serie logaritmica.* Esponenziale e logaritmo in base a e principali proprietà. Definizione geometrica intuitiva di seno e coseno. Formule di addizione (senza dimostrazione). Il limite fondamentale di $(\operatorname{sen} x)/x$ per $x \to 0$ e la derivabilità di seno e coseno. Analiticità di seno e coseno. Lemma: $D(f(x)^2) = 2f(x)f'(x)$. Dimostrazione delle serie di potenze di seno e coseno.

Proprietà delle funzioni continue. Teoremi fondamentali sulle funzioni continue su intervalli chiusi e limitati: *teorema di Weierstraß* sull'esistenza di massimo e minimo, *teorema dell'esistenza degli zeri* e teorema dei valori intermedi, dimostrati col metodo di bisezione.

Regole di derivazione. Regole di derivazione: derivata di somma, prodotto, reciproco, rapporto, composizione di funzioni derivabili. Interpretazione geometrica delle regole per la derivata del prodotto e della composizione di funzioni. Funzioni inverse: l'inversa di una funzione continua e strettamente monotona su un intervallo è pure definita su un intervallo ed è continua e strettamente monotona. *Se poi la funzione f è derivabile in x con derivata non* *nulla, allora la funzione inversa f^{-1} è pure derivabile in $f(x)$ e $(Df^{-1})(f(x)) = 1/f'(x)$.* Interpretazione geometrica del risultato. Applicazione della regola di derivazione delle funzioni inverse: derivata di $\sqrt{x}$, $\ln x$, $\ln|x|$, $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$, $\arctan x$.

Studio del grafico di una funzione. Proprietà locali di una funzione in un punto: crescenza o decrescenza debole o stretta, massimo o minimo locale stretto o debole, con significato geometrico e caratterizzazione in termini del segno del rapporto incrementale. *Relazioni fra il segno della derivata in un singolo punto e l'essere un punto di crescenza o decrescenza locale, o di massimo o minimo locale.* Teoremi globali sulle funzioni derivabili: *teorema di Rolle* e *teorema di Lagrange*. Applicazione del teorema di Lagrange: *relazioni fra segno della derivata e monotonia su un intervallo*. Relazioni fra cambio di segno della derivata e massimi e minimi locali o globali. *Un teorema tipo Lagrange per la derivata seconda.* Conseguenze: formula $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)h^2/2 + h^2\omega(h)$ con $\omega(h) \to 0$ per $h \to 0$ nel caso di f di classe C^2. Posizione del grafico di una funzione rispetto alla retta tangente: *significato del segno della derivata seconda*. Uso della derivata seconda per i massimi e minimi locali. Definizione di funzione convessa e suo significato geometrico. Relazioni fra convessità, derivata prima e derivata seconda (solo enunciato). Esempi. Le funzioni iperboliche e iperboliche inverse: definizioni, formule notevoli, derivate.

La formula di Taylor. La formula di Taylor nella versione di Lagrange per funzioni di classe C^∞ (senza dimostrazione). La formula di Taylor nella versione di Peano. La serie binomiale. La regola de L'Hôpital (dimostrazione solo nel caso più semplice).

5. Calcolo integrale.

Calcolo di primitive. Richiamo sul teorema fondamentale del calcolo. Integrali immediati. Integrazione per parti e per sostituzione. Tecniche per l'integrazione delle funzioni razionali. Integrazione per serie di potenze.

Elenco dei teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale.

Oltre alle dimostrazioni dei teoremi seguenti bisognerà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti sviluppati e gli enunciati delle proprietà di cui non si chiede la dimostrazione, e saper esibire, quando possibile, semplici esempi concreti in cui si applicano le definizioni e i teoremi.

- Dimostrazione delle formule notevoli per le somme finite $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$, $1 + 2 + \cdots + n$, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1)$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.
- Studio della serie armonica.
- Stima dell'errore nel calcolo di e con la serie $\sum 1/n!$ e dimostrazione che e è irrazionale.
- Criterio di convergenza di Leibniz.
- Dimostrazione che la successione $(1 + \frac{1}{n})^n$ è crescente e tende al numero di Nepero.
- Struttura dell'insieme dei valori della variabile per i quali il termine generale di una serie di potenze è limitato.
- Studio della funzione esponenziale definita dalla serie esponenziale: dimostrazione della formula fondamentale $\exp(x+y) = \exp x \exp y$, positività, crescenza, formula $\exp r = e^r$ per r razionale.
- Calcolo dell'area della regione sottesa dalla parabola $y = x^2$ fra le ascisse 0 e $b > 0$ usando i principi generali dell'area.
- Le funzioni monotone e le funzioni lipschitziane su un intervallo sono integrabili.
- La somma di una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$ è lipschitziana su ogni intervallo $[-R', R']$ non appena $0 \le R' < R$.
- Derivabilità delle serie di potenze.
- Il teorema della derivata nulla.
- Teorema fondamentale del calcolo: dimostrazione nel caso lipschitziano.
- Derivabilità e analiticità del logaritmo.
- Teorema di Weierstraß.
- Teorema dell'esistenza degli zeri.
- Se una funzione continua e invertibile f è derivabile in x con derivata non nulla, allora la funzione inversa f^{-1} è pure derivabile in $f(x)$ e $(Df^{-1})(f(x)) = 1/f'(x)$.
- Relazioni fra il segno della derivata in un singolo punto e l'essere un punto di crescenza o decrescenza locale, o di massimo o minimo locale.
- Teorema di Rolle.
- Teorema di Lagrange.
- Relazioni fra segno della derivata e monotonia su un intervallo.
- Teorema di tipo Lagrange per la derivata seconda.
- Significato del segno della derivata seconda.