Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2024/2025

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corso di Laurea Triennale in IBML

Analisi Matematica

Prof. Gianluca Gorni, Dott. Enrico Bozzo
Dott. Diego Cattaruzza, Dott. Emanuele Frittaion

McGraw-Hill e-book dal titolo Analisi Matematica, Custom Publishing McGraw-Hill, Prof. Gianluca Gorni, M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli, ISBN: 9781308323664. Materiale attinente al corso è disponibile sul sito di e-Learning, su Microsoft Teams e alla pagina:

`https://users.dimi.uniud.it/~gianluca.gorni/Analisi1`

Regolamento d'esame: Ci sono tre modi per ottenere i 12 crediti del corso: (a) due prove parziali scritte senza orale, (b) due prove parziali scritte più orale, (c) un singolo scritto globale più orale. Al termine dei due periodi didattici (semestri) si svolgono i 2 "compitini" (prove parziali), ognuno con punteggio dato in trentesimi. Il punteggio può superare 30, per esempio 33 o 37, anche se esse3 mostra un troncamento a trenta e lode. Chi prende meno di 12 in un compitino deve passare alla modalità scritto globale più orale.

Per chi supera tutti e due i compitini con voto di almeno 12, viene calcolata la media dei due punteggi (anche maggiori di 30), arrotondata per eccesso, e troncata infine al tetto massimo di 30; tale media, quando di almeno 18, verrà inserita come esito provvisorio su esse3 al primo appello orale estivo apposito.

A quel punto chi trova tale media su esse3 può segnalare, sempre su esse3, il suo consenso come voto definitivo (senza fare l'orale); in alternativa, può cliccare sul rifiuto del voto (oppure lasciarlo in sospeso) e presentarsi a sostenere un orale, in quello stesso appello orale o in uno successivo (previa iscrizione). L'orale ha come partenza il voto degli scritti e di solito lo migliora di qualche punto. La lode si può avere soltanto con l'orale. Chi non accetta né rifiuta il voto della media dei compitini se lo vedrà comunque registrato in automatico ad una certa scadenza che sarà indicata, comunque dopo la fine di settembre.

Il consenso o rifiuto del voto su esse3 è riservato ai soli voti ottenuti come medie dei due compitini. Per i voti degli scritti globali, dei compitini e degli orali effettivamente sostenuti non è previsto che lo studente dia il consenso o rifiuto su esse3.

Lo studente con media minore di 18 (ma almeno 12) nei due compitini non la troverà riportata su esse3. Può presentarsi all'orale con tale media come voto di partenza, oppure passare alla modalità scritto globale più orale. A chi consegna uno scritto globale vengono annullati i compitini e gli scritti globali precedenti (vale solo l'ultimo scritto consegnato).

La rimanente modalità di esame è uno scritto globale di tre ore più un orale. Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere in che appello dare l'orale, senza scadenza. Si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e vale l'ultimo scritto consegnato. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento.

Gli orali sono di sola teoria. Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco nell'ultima pagina. I compitini e gli scritti non hanno scadenza di validità ai fini di quando fare l'orale. Chi venga respinto all'esame orale deve rifare sia lo scritto che l'orale.

Programma Dettagliato

Insiemi numerici. Introduzione ai numeri. Numeri naturali, numeri interi relativi, numeri razionali, numeri decimali. Gli allineamenti decimali infiniti. Numeri decimali periodici e loro corrispondenza coi numeri razionali. La radice quadrata di 2 non è rappresentabile con un numero decimale periodico (senza dimostrazione). L'allineamento 0,101001000100001... non è periodico (con dimostrazione per assurdo). I numeri reali come allineamenti decimali infiniti periodici o no. Il problema della doppia rappresentazione, come nei numeri 1,00000... e 0,99999.... Fra due numeri reali distinti esiste sempre almeno un numero razionale e un numero irrazionale (in realtà sono infiniti). Algoritmi che generano le cifre decimali di un numero reale. Gli algoritmi che generano numeri reali sono catalogabili in modo lessicografico con numero d'ordine $n \in \mathbb{N}$. Esistenza di numeri non calcolabili (non generabili da alcun algoritmo), dimostrato col metodo diagonale. I numeri non calcolabili visualizzati come l'esito di infinite estrazioni casuali di cifre, non comprimibili in una regola. Proprietà algebriche di base di somma e prodotto fra numeri reali: commutativa, associativa, esistenza di zero e uno, esistenza di opposti e reciproci, proprietà distributiva. Dimostrazione che non esiste il reciproco di zero. Proprietà di base dell'ordinamento fra numeri reali: tricotomia, transitività. Legame con la somma: invarianza dell'ordine tramite traslazioni. Legame fra l'ordinamento e il prodotto: invarianza dell'ordine tramite omotetie (cambi di scala) a coefficiente positivo. Cosa succede moltiplicando una disuguaglianza per un numero positivo, o negativo. Altre proprietà elementari delle disuguaglianze. La proprietà di Archimede (non ci sono numeri infinitamente grandi o infinitamente piccoli). Le disuguaglianze si possono sommare membro a membro. Le disuguaglianze fra numeri positivi si possono moltiplicare membro a membro.

Massimi, minimi, estremi superiori e inferiori. Massimo e minimo di un insieme di numeri reali. Il caso di un insieme finito e quello di un insieme infinito. Massimo e minimo possono non esistere, ma quando esistono sono unici. Definizione di maggiorante e minorante di un insieme di numeri reali. I maggioranti e i minoranti sono sempre peggiorabili. Ci sono insiemi che non hanno maggioranti o minoranti. Insiemi limitati, limitati superiormente o limitati inferiormente. Maggioranti e minoranti peggiorabili, migliorabili e non migliorabili. Insiemi limitati e illimitati, superiormente o inferiormente. Definizione di estremo superiore e inferiore di un insieme di numeri reali come maggiorante o minorante non migliorabile. Il principio di completezza dei numeri reali: se un insieme di numeri reali ha un maggiorante (o minorante), allora ne ha uno non migliorabile. Se si lavora soltanto con i numeri razionali, il principio di completezza non vale. Isimboli $\pm\infty$, l'insieme dei numeri reali estesi col suo ordinamento, $\pm\infty$ come maggioranti o minoranti impropri, estremi superiori o inferiori infiniti.

Funzioni elementari. Gli intervalli: definizione in termini di mancanza di lacune. Casistica degli intervalli: intervalli limitati, chiusi o aperti o semichiusi, semirette chiuse o aperte, la retta, il singoletto, l'insieme vuoto. Esempi di intervalli e non intervalli. L'unione di due intervalli può non essere un intervallo. L'intersezione di intervalli è sempre un intervallo. Il valore assoluto e le sue principali proprietà. Disequazioni con valore assoluto. Formule notevoli che coinvolgono il valore assoluto. Il valore assoluto del prodotto è uguale al prodotto dei valori assoluti. Il valore assoluto della somma può non essere uguale alla somma dei valori assoluti. La disuguaglianza triangolare $|x+y| \leq |x| + |y|$, e perché è così chiamata. Interpretazione geometrica di $|x|$ come distanza di x dallo zero. Interpretazione geometrica di $|x-y|$ come distanza fra i punti x e y. La notazione tradizionale del valore assoluto si presta ad ambiguità. Ripasso sulla definizione e le proprietà delle potenze. Esponente naturale, esponente intero relativo, esponente razionale o reale. Il problema di 0^0 e di base negativa con esponente non intero. Grafici delle potenze (base variabile ed esponente fisso) a seconda dei possibili esponenti. Dato il grafico di una funzione, il grafico della funzione inversa si ottiene con una riflessione rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Radici quadrate e cubiche come inverse di quadrato e cubo sui positivi. Le funzioni esponenziali (base fissa ed esponente variabile) crescenti e decrescenti. La notazione $a^x = \exp_a(x)$. Proprietà algebriche e di ordinamento degli esponenziali. Il logaritmo come funzione inversa dell'esponenziale. Grafico e proprietà del logaritmo. Le funzioni goniometriche: come si definiscono in termini intuitivi. Ripasso sulle funzioni goniometriche dirette e inverse.

Numeri complessi. I numeri complessi motivati storicamente dal bisogno di dare senso alla formula risolutiva dell'equazione di terzo grado. I numeri complessi definiti come coppie di numeri reali (x, y), scritti anche come $x + iy$. L'insieme $\mathbb{C}$. Somma e prodotto di numeri complessi. Parte reale e parte immaginaria di un numero complesso. Per somma e prodotto valgono le stesse proprietà algebriche dei numeri reali: communtatività, associatività, distribuitività, esistenza dello zero, dell'unità, di opposti e reciproci. Notazioni abbreviate in cui si omettono gli addendi nulli e i fattori 1. La formula fondamentale $i^2 = -1$. Non si può introdurre su $\mathbb{C}$ un ordinamento che abbia le stesse proprietà dell'ordinamento su $\mathbb{R}$. Il piano complesso e l'interpretazione dei numeri complessi come vettori nel piano. La regola del parallelogrammo per la somma. Il coniugato di un numero complesso, con interpretazione geometrica. Il coniugato di una somma o di un prodotto è la somma o il prodotto dei coniugati. Il prodotto di un numero per il suo coniugato. Il valore assoluto, o modulo, di un numero complesso, con interpretazione geometrica. Il modulo della differenza di due numeri è la loro distanza. Il modulo di un prodotto è il prodotto dei moduli. La disuguaglianza triangolare $|z + w| \le |z| + |w|$, con significato geometrico. Operazioni con numeri complessi. Forma polare dei numeri complessi in termini di modulo e argomento. La forma trigonometrica $z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$. L'argomento del prodotto è la somma degli argomenti. Formule per l'argomento del reciproco, del quoziente e del coniugio. Interpretazione geometrica del quadrato, cubo, n-esima potenza di un numero complesso: sul cerchio unitario, dentro o fuori. La formula di De Moivre. La notazione esponenziale di un numero complesso: $z = |z|e^{i \arg z}$, senza dimostrazione. Il problema delle radici n-esime di un numero complesso. Esempio: calcolo delle radici cubiche di i per via algebrica e per via geometrica. Le radici cubiche di un numeri complesso formano i vertici di un triangolo equilatero di centro l'origine. Il caso generale delle radici n-esime. Esempio: le radici quarte di i. Esempio: la formula di Cardano applicata all'equazione $y^3 - 3y = 0$. Il teorema fondamentale dell'algebra (senza dimostrazione). Per un polinomio a coefficienti reali, il coniugato di una soluzione è anch'esso soluzione.

Limiti. Esempi introduttivi a concetto di limite. La definizione di limite spiegata attraverso un gioco. La condizione di sensatezza del limite. Il teorema dell'unicità del limite (dimostrazione nel caso di x_0, L entrambi finiti, e $f = \mathbb{R}$). Varianti della definizione di limite: x_0 o L che valgono (uno o entrambi) $+\infty$, e limiti unilaterali, da sinistra o da destra, $x_0^{\pm}$, $L^{\pm}$. *Il teorema dell'algebra dei limiti nel caso di limiti finiti, con dimostrazione nel caso della somma.* Limiti di base: funzione costante e funzione identità $f(x) = x$. Conseguenza: i limiti al finito dei polinomi. Limiti di $1/x$ per x che tende a zero da destra o da sinistra o a $\pm\infty$, nonché al finito. Cenno all'infinito senza segno. Limiti di somma, prodotto e quoziente di funzioni quando si esce dai casi del teorema dell'algebra dei limiti. Le forme indeterminate $+\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $0/0$, $\pm\infty/(\pm\infty)$. Definizione di continuità di una funzione $f(x)$ in un punto $x_0 \in f$ in varie versioni:

$f(x) \to f(x_0)$ per $x \to x_0$; $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (che richiede la condizione di sensatezza); $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in f \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Definizione di funzione continua (sul suo dominio). La funzione $f(x) = 1/x$ è continua sul suo dominio; lo zero non è nel dominio, e quindi non ha senso chiedersi se è continua o no in 0. Le funzioni esponenziali, i logaritmi, le funzioni goniometriche e le radici ennesime sono funzioni continue nei rispettivi domini (abbozzo di dimostrazione nel caso di 2^x). Somma, prodotto e quoziente di funzioni continue sono continue (sempre, sui rispettivi domini). Definizione di continuità in termini di limiti sinistri e destri. Esempio: il valore assoluto è una funzione continua. La funzione segno: definizione, grafico, non continuità nell'origine. La funzione parte intera: definizione, grafico, non continuità nei punti interi. Definizione di salto di una funzione in un punto, in termini di limiti unilaterali che esistono ma diversi. Rassegna di funzioni continue e funzioni discontinue. Limiti all'infinito degli esponenziali crescenti e decrescenti. Il limite di $(-1)^n$ per $n \to +\infty$ non esiste. Il limite di $\operatorname{sen} x$ per $x \to +\infty$ non esiste. In generale, i limiti delle funzioni oscillanti possono non esistere. Il teorema del confronto, o dei due carabinieri (senza dimostrazione). Il teorema del singolo carabiniere (senza dimostrazione). Il teorema del limite della funzione composta, detto anche cambio di variabile nei limiti (senza dimostrazione). Le disuguaglianze notevoli $|\operatorname{sen} x| \le |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $x \le \tan x$ per $x \in [0, \pi/2[$, dimostrate per via geometrica. Dimostrazione del limite fondamentale $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x = 1$. *La disuguaglianza di Bernoulli $(1 + x)^n \ge 1 + nx$, valida per $n \in \mathbb{N}$ e $x > -1$, dimostrata per induzione.* Dimostrazione che $2^n/n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ usando la disuguaglianza di Bernoulli. In generale, gli esponenziali crescenti crescono più velocemente di qualsiasi polinomio (in variabile reale, non solo in variabile intera). Dimostrazione che $(\log_2 x)/x \to 0$ usando il cambio di variabile $x = 2^t$. Più in generale, il logaritmo di x cresce più lentamente di x. Conseguenza del teorema delle funzioni composte: le funzioni f continue ovunque commutano col limite, cioè $\lim f(g(x)) = f(\lim g(x))$.

Monotonia e limiti. Definizione di successione debolmente crescente, strettamente crescente, debolmente decrescente, strettamente decrescente, monotòna, con interpretazione cartesiana. Teorema: le successioni monotone hanno sempre limite, finito o infinito, con dimostrazione nel caso di debole crescenza e con estremo superiore finito. *La successione fondamentale $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$: dimostrazione che è debolmente crescente. La successione ausiliaria $b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$: dimostrazione che è debolmente decrescente. Le due successioni $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e $b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ convergono allo stesso limite, chiamato numero di Nepero, che è un numero compreso fra 2 e 3, e indicato con $e \simeq$* 2.71828. Limiti notevoli che ne derivano: $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim_{t\to 0}(1 + t)^{1/t} = e$, $\lim_{x\to 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$. Il limite notevole trigonometrico $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$. Il teorema dell'algebra dei limiti in forma utile per il calcolo pratico dei limiti: se $g(x) \to L$ finito, allora $\lim(f(x) + g(x)) = \lim(f(x) + L)$, nel senso che se esiste uno dei due limiti, esiste anche l'altro e sono uguali; se inoltre $L \ne 0$ allora $\lim f(x)g(x) = \lim f(x)L$ e $\lim f(x)/g(x) = \lim f(x)/L$, nello stesso senso. Avvertenza contro la "pseudoregola": se in un limite complicato individuo una sottoespressione $g(x)$ che so tendere a L, semplifico sostituendo $g(x)$ con L e vado avanti. La pseudoregola a volte dà un risultato giusto, ma spesso è sbagliato. Qualche esempio di applicazione della pseudoregola con risultato errato.

Limiti di successioni, ordini di infinito e notazione di Landau. Trabocchetti nel calcolo di limiti di prodotti in cui il numero di fattori è variabile. Limiti contenenti il fattoriale e affini: $n!$, $n!/n$, $n!/n^2$, $n!$/potenza, $n!/2^n$. Regola utile: avendo un prodotto di fattori positivi, per rimpicciolirlo basta cancellare fattori maggiori di 1, per ingrandirlo basta cancellare fattori minori di 1. Relazioni fra limiti e disuguaglianze: se una disuguaglianza vale per le funzioni, passando al limite la disuguaglianza si conserva se è debole, si indebolisce se è stretta. Limiti contenenti il fattoriale e affini: $n!/3^n$, $n!/5^n$, $n!$/esponenziale, n^n, $n^n/n!$, $n!/n^n$, $n^n/(n+1)!$, usando il metodo di cancellare fattori maggiori o minori di 1. Limiti contenenti il fattoriale e affini: $\binom{2n}{n}$. Cenno alla formula di Stirling. La gerarchia degli infiniti campione per $n \to +\infty$: grandi, piccoli e intermedi. La gerarchia degli infiniti campione vista alla luce della relazione fra funzione e funzione inversa. La gerarchia degli infinitesimi campione per $n \to +\infty$, ottenuti coi reciproci degli infiniti. I simboli di Bachman-Landau: o piccolo, O grande, omega piccolo, omega grande, theta grande, tilde. Esercizi sui limiti e sulla notazione di Landau-Bachmann.

Funzioni continue. *Teorema di esistenza degli zeri: enunciato, significato geometrico*, esempi e controesempi, *dimostrazione con il metodo di bisezione*. Esempi concreti in cui la procedura di bisezione ha e non ha termine. Algoritmo di approssimazione dal metodo di bisezione. Uso del teorema di esistenza degli zeri per la risoluzione di equazioni con metodo grafico. L'immagine di un insieme tramite una funzione, o insieme dei valori assunti dalla funzione. Come si trovano il dominio e l'immagine di una funzione a partire dal grafico. Il teorema dei valori intermedi: tre enunciati equivalenti, dimostrazione. Definizione di funzioni monotone nelle quattro categorie: strettamente/debomente crescenti/decrescenti. Significato geometrico. Richiami sulle funzioni iniettive o invertibili. Relazioni fra continuità, stretta monotonia, iniettività e avere come dominio un intervallo (senza dimostrazione). Definizione di valore massimo o minimo (globale) di una funzione, e di punto di massimo o minimo (globale). Come riconoscere i valori massimi o minimi e i rispettivi punti di massimo o minimo (globali) a partire dal grafico di una funzione. *Teorema di Weierstrass sui massimi e minimi: enunciato*, esempi e controesempi, *dimostrazione per bisezione*. Osservazioni generali sui teoremi sulle proprietà globali delle funzioni continue. Esercizi sulle funzioni continue.

La derivata e il suo calcolo. Introduzione al concetto di derivata. Definizione di derivata di una funzione in un punto e di funzione derivabile in un punto. Notazioni per la derivata. Calcolo della derivata delle funzioni elementari $x^2, x^3, e^x, \log x$. Il rapporto incrementale. Calcolo della derivata delle funzioni $\operatorname{sen} x, \cos x, 1/x, \sqrt{x}, |x|, \operatorname{sgn} x$. Attenzione particolare alla non derivabilità del $\log x$ per $x < 0$ (nonostante la formula $D(\log x) = 1/x$ possa suggerire altrimenti), nonché della radice, valore assoluto e segno nello zero, con interpretazione geometrica. Derivata della funzione identità x e della costante c. *Se una funzione è derivabile in x_0, allora è continua in x_0, con dimostrazione. La funzione valore assoluto è continua in zero, ma non è derivabile in zero. Il teorema dell'algebra delle derivate*, con dimostrazione. Derivata di $\tan x$ e di x^n con $n \in \mathbb{Z}$. La derivata della funzione composta, con cenno di dimostrazione. La derivata della potenza con esponente reale. Il teorema della derivata della funzione inversa. Come ottenere la formula della derivata della funzione inversa a partire dalla relazione fondamentale $f(f^{-1}(x)) = x$. Derivata di arcoseno e arcocoseno. La derivata dell'arcotangente, della radice cubica, del logaritmo del valore assoluto.

Funzioni derivabili e loro studio. Definizione di derivata sinistra e destra. Casistica di punti singolari: angolosi, cuspidali, flessi verticali. Definizione di punti di massimo o minimo locali, con interpretazione geometrica. *Il teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno, la derivata, se c'è, è zero (con dimostrazione). Il teorema del valor medio di Rolle, con significato geometrico. Il teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.* Criterio pratico per dire quando una funzione è derivabile sul suo dominio guardando la formula: se la formula è una combinazione di un numero finito di polinomi, funzioni razionali, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche dirette e arcotangente, allora la funzione è derivabile sul dominio. Se la formula contiene valore assoluto, radici, arcoseno, arcocoseno o funzioni non continue, allora si può sospettare che abbia punti di non derivabilità. I teoremi del valor medio di Rolle e di Lagrange (ripresa). Il teorema del valor medio di Cauchy (solo enunciato). Conseguenze del teorema di Lagrange: il teorema della derivata nulla e la relazione fra monotonia e segno della derivata. Conseguenze del teorema di Lagrange: il teorema della derivata nulla e la relazione fra monotonia e segno della derivata (ripresa). *Il teorema de L'Hôpital (dimostrazione nel caso* $0/0$ *e* x_0 *finito).* Note generali sull'uso della regola del L'Hôpital. Le derivate seconde, terze e successive, con le varie notazioni. Le derivate seconde, terze e successive, con le varie notazioni. Interpretazione geometrica del segno della derivata seconda, in termini di direzione di curvatura. Posizione relativa del grafico di una funzione e della retta tangente. Definizione di funzioni convesse e di funzioni concave. Teorema sul legame fra convessità/concavità e segno della derivata seconda.

La formula di Taylor. *La formula di Taylor con il resto di Peano, con dimostrazione all'ordine 3.* Esistenza e unicità del polinomio di Taylor. *Il polinomio di Maclaurin del seno e coseno.* Esempi. Proprietà del polinomio di Taylor: proprietà algebriche, sua derivata, composizione, funzioni pari e dispari. Esempi. Uso della formula di Taylor nel calcolo di limiti. La formula di Taylor con il resto di Lagrange (senza dimostrazione). Maggiorazioni con il resto di Lagrange. Funzioni analitiche. Esempi.

Area, integrali e primitive. Introduzione all'integrale: il problema dell'area delle figure curvilinee, trapezoidi, suddivisioni marcate, plurirettangoli, somme di Riemann. Le somme di Riemann si stabilizzano all'infittirsi della suddivisione: evidenze numeriche. Definizione di ampiezza di una suddivisione. La notazione dell'integrale. Definizione di integrale di una funzione secondo Riemann. La notazione dell'integrale. Cenno a definizioni alternative. La funzione $f(x) = 1/\sqrt{x}$ non è integrabile secondo Riemann su $[0,1]$. Il teorema fondamentale del calcolo (senza dimostrazione). Esempi di uso del teorema fondamentale per trovare aree di trapezoidi. Definizione di primitiva (integrale indefinito, antiderivata) di una funzione. Teorema: ogni funzione continua su un intervallo ha primitiva (senza dimostrazione). Le primitive non sono mai uniche: aggiungendo una costante a una primitiva se ne ottiene un'altra. Le funzioni continue hanno primitive (senza dimostrazione). Su un intervallo due primitive di una data funzione differiscono sempre per una costante (con dimostrazione). Il problema di trovare primitive elementari di una funzione elementare non sempre ha soluzione. Alcune funzioni elementari che non hanno primitive elementari. La notazione dell'integrale "indefinito". Linearità dell'integrale indefinito. Integrali immediati e "quasi immediati". Esempi. Integrazione per parti. Esempi. Esempi di integrazione per parte due volte. Integrazione per sostituzione, o cambio di variabile, con esempi. Integrazione delle funzioni razionali: abbassamento del grado del numeratore, decomposizione in fratti semplici, con denominatore di grado uno (o relativa potenza) o due, completamento del quadrato nel caso di grado 2. Esercizi sul calcolo di primitive.

Funzioni di due variabili. Introduzione alle funzioni di due variabili. Grafici di superficie in tre dimensioni, accenno con definizione di insiemi di livello. Norma di un vettore, distanza fra due punti nel piano, la definizione di limite e di continuità per funzioni di due variabili. Analogia con le funzioni di una variabile: facendo zoom nel grafico di una funzione ad una variabile può apparire una retta, nel caso di una funzione di due variabili può apparire un piano. Derivate parziali e loro significato geometrico. L'equazione del piano tangente. Come riscrivere la definizione di derivabilità in una variabile in modo che sia adatta alla generalizzazione a due variabili. Il gradiente di una funzione di due variabili. Derivate parziali seconde e matrice hessiana. Definizione di punti di massimo o minimo locale. Punti stazionari. Casistica dei punti stazionari: massimi e minimi locali stretti o deboli, selle. La regola per classificare i punti stazionari di una funzione di due variabili usando la matrice hessiana. Esempi. La ricerca della retta nel piano che approssima meglio dei dati sperimentali nel senso dei minimi quadrati: soluzione esplicita.

I teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale

Oltre alla **dimostrazione** dei teoremi seguenti, lo studente dovrà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti che sono stati introdotti nel corso, e di saper illustrare definizioni e teoremi con **esempi**, qualora ce ne siano di semplici.

1. Il teorema del limite della somma di due funzioni aventi limiti finiti.
2. La disuguaglianza di Bernoulli, con dimostrazioni per induzione.
3. La successione fondamentale $(1 + 1/n)^n$: dimostrazione che è crescente, che la successione ausiliaria $(1 + 1/n)^{n+1}$ è decrescente, e che hanno entrambe limite finito, coincidente
4. Teorema dell'esistenza degli zeri.
5. Il teorema di Weierstraß sui massimi e minimi (dimostrazione col metodo di bisezione).
6. Le funzioni derivabili sono continue. Esempio di funzione continua ma non derivabile.
7. Algebra delle derivate: derivata del prodotto per costante, della somma, del prodotto, del reciproco di funzioni derivabili.
8. Teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno una funzione derivabile ha derivata nulla.
9. Teorema di Rolle, con significato geometrico.
10. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.
11. Regola de l'Hôpital: enunciato generale, dimostrazione nel caso 0/0 in un punto finito con limite finito.
12. La formula di Taylor col resto di Peano fino all'ordine 3.
13. Calcolo dello sviluppo di Maclaurin di seno e coseno.