Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corsi di Laurea Triennale in Informatica e in IBML

Analisi Matematica

Prof. Gianluca Gorni

McGraw-Hill e-book dal titolo Analisi Matematica, Custom Publishing McGraw-Hill, Prof. Gianluca Gorni, M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli, ISBN: 9781308323664. Materiale attinente al corso è disponibile sul sito di e-Learning, su Microsoft Teams e alla pagina:

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Analisi1`

Regolamento d'esame: Ci sono due modi per ottenere i 12 crediti del corso: (a) due prove parziali scritte di due ore ciascuna più orale, (b) un singolo scritto globale di tre ore più orale. Nelle due prove parziali il punteggio è dato in trentesimi. Il punteggio può superare 30, per esempio 33 o 37, anche se esse3 mostra un troncamento a trenta e lode. Chi prende meno di 12 in un compitino deve passare alla modalità scritto globale più orale.

Per chi supera tutti e due i compitini con voto di almeno 12, viene calcolata la media dei due punteggi (anche maggiori di 30), arrotondata per eccesso, e formerà il punteggio di partenza per l'orale.

L'orale ha come partenza il voto degli scritti e di solito lo migliora di qualche punto.

A chi consegna uno scritto globale vengono annullati i compitini e gli scritti globali precedenti (vale solo l'ultimo scritto consegnato).

La rimanente modalità di esame è uno scritto globale di tre ore più un orale. Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere in che appello dare l'orale, senza scadenza. Si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e vale l'ultimo scritto consegnato. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento.

Gli orali sono di sola teoria. Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco nell'ultima pagina. I compitini e gli scritti non hanno scadenza di validità ai fini di quando fare l'orale. Chi venga respinto all'esame orale deve rifare sia lo scritto che l'orale.

Programma Dettagliato

Insiemi numerici. Introduzione ai numeri. Numeri naturali, numeri interi relativi, numeri razionali, numeri decimali. Gli allineamenti decimali infiniti. Numeri decimali periodici e loro corrispondenza coi numeri razionali. La radice quadrata di 2 non è rappresentabile con un numero decimale periodico (senza dimostrazione). I numeri reali come allineamenti decimali infiniti periodici o no. L'allineamento 0,101001000100001... non è periodico (con dimostrazione per assurdo). Come generare altri numeri irrazionali. Proprietà algebriche di base di somma e prodotto fra numeri reali: commutativa, associativa, esistenza di zero e uno, esistenza di opposti e reciproci, proprietà distributiva. Dimostrazione che non esiste il reciproco di zero. Proprietà di base dell'ordinamento fra numeri reali: transitività, riflessività, tricotomia. Legame fra l'ordinamento e la somma: invarianza dell'ordine tramite traslazioni. Legame fra l'ordinamento e il prodotto: invarianza dell'ordine tramite omotetie a coefficiente positivo. Cosa succede moltiplicando una disuguaglianza per un numero positivo, o negativo. Altre proprietà elementari delle disuguaglianze. Esercizi sui numeri reali, sull'interpretazione dei puntini di sospensione nelle formule, sull'ordine delle operazioni nelle formule, sui valori di vero/falso. La proprietà di Archimede (non ci sono numeri infinitamente grandi o infinitamente piccoli).

Massimi, minimi, estremi superiori e inferiori. Massimo e minimo di un insieme di numeri reali. Il caso di un insieme finito e quello di un insieme infinito. Massimo e minimo possono non esistere, ma quando esistono sono unici. Definizione di maggiorante e minorante di un insieme di numeri reali. Maggioranti e minoranti peggiorabili, migliorabili e non migliorabili. Insiemi limitati e illimitati, superiormente o inferiormente. Definizione di estremo superiore o inferiore di un insieme di numeri reali. Il principio di completezza dei numeri reali: se un insieme di numeri reali ha un maggiorante (o minorante), allora ne ha uno non migliorabile. Se si lavora soltanto con i numeri razionali, il principio di completezza non vale. Isimboli $\pm\infty$ come maggioranti o minoranti impropri.

Funzioni elementari. Gli intervalli: definizione in termini di mancanza di lacune. Casistica degli intervalli: intervalli limitati, chiusi o aperti o semichiusi, semirette chiuse o aperte, la retta, l'insieme vuoto. Ripasso di potenze, radici, esponenziali, logaritmi, funzioni goniometriche. Il valore assoluto e le sue principali proprietà. Interpretazione geometrica di $|x|$ come distanza di x dallo zero. Interpretazione geometrica di $|x-y|$ come distanza fra i punti x e y. Formule notevoli che coinvolgono il valore assoluto. La disuguaglianza triangolare $|x+y| \leq |x|+|y|$, e perché è così chiamata. Disequazioni con valore assoluto.

Numeri complessi. Introduzione e motivazione, unità immaginaria, operazioni e loro proprietà, rappresentazione cartesiana dei numeri complessi, parte reale e immaginaria, piano di Argand-Gauss, significato geometrico della somma di complessi e del prodotto di un complesso per un reale, coordinate polari, modulo, argomento, complesso coniugato. Equazioni sui complessi, rappresentazione trigonometrica e cambio di coordinate, prodotto di complessi in forma trigonometrica e suo significato geometrico, formula di De Moivre, esponenziale immaginario, rappresentazione esponenziale. Teorema fondamentale dell'algebra (dimostrazione solo nel caso $z^n = a$), radici n-esime complesse e loro aspetti geometrici, radici complesse coniugate di polinomi a coefficienti reali.

Limiti. Esempi introduttivi a concetto di limite. La definizione di limite spiegata attraverso un gioco. La condizione di sensatezza del limite. Il teorema dell'unicità del limite (dimostrazione nel caso di x_0, L entrambi finiti). Varianti della definizione di limite: x_0 o L che valgono (uno o entrambi) $+\infty$, x_0 o L che valgono (uno o entrambi) $\pm\infty$, e i limiti unilaterali (da destra o da sinistra, per eccesso o difetto) x_0^+, x_0^-, L^+, L^-. Cenno all'infinito senza segno ∞, distinto da $+\infty$. Il problema del calcolo dei limiti. *Il teorema dell'algebra dei limiti nel caso di limiti finiti, con dimostrazione nel caso della somma.* I casi $L+\infty$ e $+\infty+\infty$ e la forma indeterminata $+\infty-\infty$. Limiti elementari: limite della costante e limite della funzione identità $f(x) = x$. Limiti notevoli che non rientrano nell'algebra dei limiti: i limiti di $1/x$ per x che tende a zero o infinito. Il teorema del confronto, o dei due carabinieri. Variante del teorema del confronto con un solo carabiniere. *La disuguaglianza di Bernoulli* $(1+x)^n \geq 1+nx$ *per* $x > -1$, $n \in \mathbb{N}$, *dimostrata per induzione.* Il $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ dimostrato usando la disuguaglianza di Bernoulli. Le forme indeterminate $+\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $0/0$, ∞/∞. Come trattare le forme non indeterminate che esulano dal teorema dell'algebra dei limiti. La successione $(-1)^n$ non ha limite per $n \to +\infty$, con dimostrazione. Il limite $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n/n$ calcolato col teorema dei carabinieri. Limiti di funzioni oscillanti: i limiti $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$, $\lim_{x\to+\infty} \cos x$, $\lim_{x\to+\infty} \tan x$ non esistono. La funzione segno e la funzione $1/x$ non hanno limite bilaterale per $x \to 0$, però hanno i limiti unilaterali per $x \to 0^+$ e per $x \to 0^-$. Limiti notevoli: $\lim_{x\to+\infty} a^x/x = \lim_{x\to+\infty} a^x/x^2 = \lim_{x\to+\infty} a^p = +\infty$ se $a > 1, p \in \mathbb{N}$; altrimenti detto, gli esponenziali crescenti tendono a infinito più rapidamente dei polinomi. Definizione di funzione continua in un punto e di funzione continua su tutto il suo dominio. Le funzioni polinomiali, razionali, trigonometriche, esponenziali e logaritmi sono funzioni continue. Funzioni continue: valore assoluto, radice quadrata, radice cubica, x^α per $x > 0$. Funzioni non continue: il segno, la parte intera (floor, ceiling). Teorema del limite della funzione composta, o cambio di variabile nei limiti (senza dimostrazione). Come si fa in pratica il cambio di variabile. Applicazioni: $\lim_{x\to+\infty}(\log x)/x = 0$, il logaritmo tende all'infinito più lentamente di tutti i polinomi, i quali sono più lenti degli esponenziali crescenti. Composizione, somma, prodotto, quoziente di funzioni continue è continua. Come riconoscere le funzioni continue guardando la formula che le definisce. Il limite fondamentale $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x = 1$, dimostrato usando delle disuguaglianze geometriche. Il limite notevole $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)/x^2 = 1/2$.

Monotonia e limiti. Definizione di successione debolmente o strettamente crescente o decrescente. Successioni non monotone e oscillanti. Le successioni monotone hanno sempre limite, finito o infinito (dimostrazione per le successioni crescenti limitate). *La successione fondamentale $(1 + \frac{1}{n})^n$: generalità e dimostrazione che è (debolmente) crescente. Dimostrazione che la successione ausiliaria $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ è debolmente decrescente. Queste due successioni hanno limite finito, detto numero di Nepero, compreso fra 2 e 3.* Ammonimento contro l'uso della "pseudoregola" nel calcolo dei limiti. In questo corso i logaritmi sono da intendere in base e ogniqualvolta la base non è esplicita. I limiti esponenziali notevoli che derivano facilmente dal limite della successione fondamentale: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to e$ per $x \to \pm\infty$, $(1 + x)^{1/x} \to e$ per $x \to 0$, $(e^x - 1)/x \to 1$ per $x \to 0$, $(\log(1 + x))/x \to 1$ per $x \to 0$.

Limiti di successioni, ordini di infinito e notazione di Landau. Trabocchetti nel calcolo di limiti di prodotti in cui il numero di fattori è variabile. Limiti contenenti il fattoriale e affini: $n!$, $n!/n$, $n!/n^2$, $n!$/potenza, $n!/2^n$. Regola utile: avendo un prodotto di fattori positivi, per rimpicciolirlo basta cancellare fattori maggiori di 1, per ingrandirlo basta cancellare fattori minori di 1. Relazioni fra limiti e disuguaglianze: se una disuguaglianza vale per le funzioni, passando al limite la disuguaglianza si conserva se è debole, si indebolisce se è stretta. Limiti contenenti il fattoriale e affini: $n!/3^n$, $n!/5^n$, $n!$/esponenziale, n^n, $n^n/n!$, $n!/n^n$, $n^n/(n + 1)!$, usando il metodo di cancellare fattori maggiori o minori di 1. Limiti contenenti il fattoriale e affini: $\binom{2n}{n}$. Cenno alla formula di Stirling. La gerarchia degli infiniti campione per $n \to +\infty$: grandi, piccoli e intermedi. La gerarchia degli infiniti campione vista alla luce della relazione fra funzione e funzione inversa. La gerarchia degli infinitesimi campione per $n \to +\infty$, ottenuti coi reciproci degli infiniti. I simboli di Bachman-Landau: o piccolo, O grande, omega piccolo, omega grande, theta grande, tilde. Esercizi sui limiti e sulla notazione di Landau-Bachmann.

Funzioni continue. *Teorema di esistenza degli zeri: enunciato, significato geometrico*, esempi e controesempi, *dimostrazione con il metodo di bisezione.* Esempi concreti in cui la procedura di bisezione ha e non ha termine. Algoritmo di approssimazione dal metodo di bisezione. Uso del teorema di esistenza degli zeri per la risoluzione di equazioni con metodo grafico. L'immagine di un insieme tramite una funzione, o insieme dei valori assunti dalla funzione. Come si trovano il dominio e l'immagine di una funzione a partire dal grafico. Il teorema dei valori intermedi: tre enunciati equivalenti, dimostrazione. Definizione di funzioni monotone nelle quattro categorie: strettamente/debomente crescenti/decrescenti. Significato geometrico. Richiami sulle funzioni iniettive o invertibili. Relazioni fra continuità, stretta monotonia, iniettività e avere come dominio un intervallo (senza dimostrazione). L'inversa di una funzione monotona è monotona dello stesso tipo. Definizione di valore massimo o minimo (globale) di una funzione, e di punto di massimo o minimo (globale). Come riconoscere i valori massimi o minimi e i rispettivi punti di massimo o minimo (globali) a partire dal grafico di una funzione. *Teorema di Weierstrass sui massimi e minimi: enunciato*, esempi e controesempi, *dimostrazione per bisezione*. Osservazioni generali sui teoremi sulle proprietà globali delle funzioni continue. Esercizi sulle funzioni continue.

La derivata e il suo calcolo. Introduzione al concetto di derivata. Definizione di derivata di una funzione in un punto e di funzione derivabile in un punto. Notazioni per la derivata. Calcolo della derivata delle funzioni elementari $x^2, x^3, e^x, \log x$. Il rapporto incrementale. Calcolo della derivata delle funzioni $\operatorname{sen} x, \cos x, 1/x, \sqrt{x}, |x|, \operatorname{sgn} x$. Attenzione particolare alla non derivabilità del $\log x$ per $x < 0$ (nonostante la formula $D(\log x) = 1/x$ possa suggerire altrimenti), nonché della radice, valore assoluto e segno nello zero, con interpretazione geometrica. Derivata della funzione identità x e della costante c. *Se una funzione è derivabile in x_0, allora è continua in x_0, con dimostrazione. La funzione valore assoluto è continua in zero, ma non è derivabile in zero. Il teorema dell'algebra delle derivate*, con dimostrazione. Derivata di $\tan x$ e di x^n con $n \in \mathbb{Z}$. La derivata della funzione composta, con cenno di dimostrazione. La derivata della potenza con esponente reale. Il teorema della derivata della funzione inversa. Come ottenere la formula della derivata della funzione inversa a partire dalla relazione fondamentale $f(f^{-1}(x)) = x$. Derivata di arcoseno e arcocoseno. La derivata dell'arcotangente, della radice cubica, del logaritmo del valore assoluto.

Funzioni derivabili e loro studio. Definizione di derivata sinistra e destra. Casistica di punti singolari: angolosi, cuspidali, flessi verticali. Definizione di punti di massimo o minimo locali, con interpretazione geometrica. *Il teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno, la derivata, se c'è, è zero (con dimostrazione). Il teorema del valor medio di Rolle, con significato geometrico. Il teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.* Criterio pratico per dire quando una funzione è derivabile sul suo dominio guardando la formula: se la formula è una combinazione di un numero finito di polinomi, funzioni razionali, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche dirette e arcotangente, allora la funzione è derivabile sul dominio. Se la formula contiene valore assoluto, radici, arcoseno, arcocoseno o funzioni non continue, allora si può sospettare che abbia punti di non derivabilità. I teoremi del valor medio di Rolle e di Lagrange (ripresa). Il teorema del valor medio di Cauchy (solo enunciato). Conseguenze del teorema di Lagrange: il teorema della derivata nulla e la relazione fra monotonia e segno della derivata. Conseguenze del teorema di Lagrange: il teorema della derivata nulla e la relazione fra monotonia e segno della derivata (ripresa). *Il teorema de L'Hôpital (dimostrazione nel caso $0/0$ e x_0 finito).* Note generali sull'uso della regola del L'Hôpital. Le derivate seconde, terze e successive, con le varie notazioni. Le derivate seconde, terze e successive, con le varie notazioni. Interpretazione geometrica del segno della derivata seconda, in termini di direzione di curvatura.

Posizione relativa del grafico di una funzione e della retta tangente. Definizione di funzioni convesse e di funzioni concave. Teorema sul legame fra convessità/concavità e segno della derivata seconda.

La formula di Taylor. *La formula di Taylor con il resto di Peano.* Esistenza e unicità del polinomio di Taylor. *Il polinomio di Maclaurin del seno e coseno.* Esempi. Proprietà del polinomio di Taylor: proprietà algebriche, sua derivata, composizione, funzioni pari e dispari. Esempi. Uso della formula di Taylor nel calcolo di limiti. La formula di Taylor con il resto di Lagrange (senza dimostrazione). Maggiorazioni con il resto di Lagrange. Funzioni analitiche. Esempi.

Area, integrali e primitive. Introduzione all'integrale: il problema dell'area delle figure curvilinee, trapezoidi, suddivisioni marcate, plurirettangoli, somme di Riemann. Le somme di Riemann si stabilizzano all'infittirsi della suddivisione: evidenze numeriche. Definizione di ampiezza di una suddivisione. La notazione dell'integrale. Definizione di integrale di una funzione secondo Riemann. La notazione dell'integrale. Cenno a definizioni alternative. La funzione $f(x) = 1/\sqrt{x}$ non è integrabile secondo Riemann su $[0, 1]$. Il teorema fondamentale del calcolo (senza dimostrazione). Esempi di uso del teorema fondamentale per trovare aree di trapezoidi. Definizione di primitiva (integrale indefinito, antiderivata) di una funzione. Teorema: ogni funzione continua su un intervallo ha primitiva (senza dimostrazione). Le primitive non sono mai uniche: aggiungendo una costante a una primitiva se ne ottiene un'altra. Le funzioni continue hanno primitive (senza dimostrazione). Su un intervallo due primitive di una data funzione differiscono sempre per una costante (con dimostrazione). Il problema di trovare primitive elementari di una funzione elementare non sempre ha soluzione. Cenno all'algoritmo di Risch. Alcune funzioni elementari che non hanno primitive elementari. La notazione dell'integrale "indefinito". Linearità dell'integrale indefinito. Integrali immediati e "quasi immediati". Esempi. Integrazione per parti. Esempi. Esempi di integrazione per parte due volte. Integrazione per sostituzione, o cambio di variabile, con esempi. Integrazione delle funzioni razionali: abbassamento del grado del numeratore, decomposizione in fratti semplici, con denominatore di grado uno (o relativa potenza) o due, completamento del quadrato nel caso di grado 2. Esercizi sul calcolo di primitive.

Funzioni di due variabili. Introduzione alle funzioni di due variabili. Grafici di superficie in tre dimensioni, grafici di densità, insiemi di livello. I grafici di polinomi di primo grado e significato geometrico dei coefficienti. Norma di un vettore, distanza fra due punti nel piano, la definizione di limite e di continuità per funzioni di due variabili. Esempi di funzioni senza limite. Casistica di cosa può succedere facendo zoom nel grafico di una funzione di due variabili: in particolare può apparire un piano. Derivate parziali e loro significato geometrico. L'equazione del piano tangente. Derivate direzionali e loro significato geometrico. Un esempio in cui le derivate direzionali esistono ma non c'è il piano tangente. Come riscrivere la definizione di derivabilità in una variabile in modo che sia adatta alla generalizzazione a due variabili. Definizione formale di differenziabilità. Curve parametriche nel piano e loro vettore velocità. Il gradiente di una funzione di due variabili. La derivata di una funzione di due variabili lungo una curva parametrica. Il gradiente è ortogonale alle curve di livello. Il gradiente ha direzione e valore della massima pendenza direzionale. Il gradiente di funzioni di tre o più variabili. Curve di massima pendenza. Polinomi omogenei di secondo grado: casistica. Derivate parziali seconde e matrice hessiana. La formula di Taylor di ordine 2. Definizione di punti di massimo o minimo locale. Esempi. Punti stazionari. Casistica dei punti stazionari: massimi e minimi locali stretti o deboli, selle, flessi, montagne senza selle intermedie, selle piatte, sella delle scimmie e dei polipi. La regola per classificare i punti stazionari di una funzione di due variabili usando la matrice hessiana. Esempio. La ricerca della retta nel piano che approssima meglio dei dati sperimentali nel senso dei minimi quadrati: soluzione esplicita.

I teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale

Oltre alla **dimostrazione** dei teoremi seguenti, lo studente dovrà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti che sono stati introdotti nel corso, e di saper illustrare definizioni e teoremi con **esempi**, qualora ce ne siano di semplici.

1. Il teorema del limite della somma di due funzioni aventi limiti finiti.
2. La disuguaglianza di Bernoulli, con dimostrazioni per induzione.
3. La successione fondamentale $(1 + 1/n)^n$: dimostrazione che è crescente, che la successione ausiliaria $(1 + 1/n)^{n+1}$ è decrescente, e che hanno entrambe limite finito, coincidente
4. Teorema dell'esistenza degli zeri.
5. Il teorema di Weierstraß sui massimi e minimi (dimostrazione col metodo di bisezione).
6. Le funzioni derivabili sono continue. Esempio di funzione continua ma non derivabile.
7. Algebra delle derivate: derivata del prodotto per costante, della somma, del prodotto, del reciproco di funzioni derivabili.
8. Teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno una funzione derivabile ha derivata nulla.
9. Teorema di Rolle, con significato geometrico.
10. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.
11. Regola de l'Hôpital: enunciato generale, dimostrazione nel caso 0/0 in un punto finito con limite finito.
12. La formula di Taylor col resto di Peano fino all'ordine 2.
13. Calcolo dello sviluppo di Maclaurin di seno e coseno.