Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corsi di Laurea Triennale in Informatica e in IBML

Analisi Matematica

Prof. Gianluca Gorni

McGraw-Hill e-book dal titolo Analisi Matematica, Custom Publishing McGraw-Hill, Prof. Gianluca Gorni, M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli, ISBN: 9781308323664.
Materiale attinente al corso è disponibile sul sito di e-Learning e alla pagina:
`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Analisi1`

Regolamento d'esame: Ci sono tre modi per ottenere i 12 crediti del corso: (a) due prove parziali scritte senza orale, (b) due prove parziali scritte più orale, (c) un singolo scritto globale più orale. Al termine dei due periodi didattici (semestri) si svolgono i 2 "compitini" (prove parziali), ognuno con punteggio dato in trentesimi. Il punteggio può superare 30, per esempio 33 o 37, anche se esse3 mostra un troncamento a trenta e lode. Chi prende meno di 12 in un compitino deve passare alla modalità scritto globale più orale.

Per chi supera tutti e due i compitini con voto di almeno 12, viene calcolata la media dei due punteggi (anche maggiori di 30), arrotondata per eccesso, e troncata infine al tetto massimo di 30; tale media, quando di almeno 18, verrà inserita come esito provvisorio su esse3 al primo appello orale estivo apposito.

A quel punto chi trova tale media su esse3 può segnalare, sempre su esse3, il suo consenso come voto definitivo (senza fare l'orale); in alternativa, può cliccare sul rifiuto del voto (oppure lasciarlo in sospeso) e presentarsi a sostenere un orale, in quello stesso appello orale o in uno successivo (previa iscrizione). L'orale ha come partenza il voto degli scritti e di solito lo migliora di qualche punto. La lode si può avere soltanto con l'orale. Chi non accetta né rifiuta il voto della media dei compitini se lo vedrà comunque registrato in automatico ad una certa scadenza che sarà indicata, comunque dopo la fine di settembre.

Il consenso o rifiuto del voto su esse3 è riservato ai soli voti ottenuti come medie dei due compitini. Per i voti degli scritti globali, dei compitini e degli orali effettivamente sostenuti non è previsto che lo studente dia il consenso o rifiuto su esse3.

Lo studente con media minore di 18 (ma almeno 12) nei due compitini non la troverà riportata su esse3. Può presentarsi all'orale con tale media come voto di partenza, oppure passare alla modalità scritto globale più orale. A chi consegna uno scritto globale vengono annullati i compitini e gli scritti globali precedenti (vale solo l'ultimo scritto consegnato).

La rimanente modalità di esame è uno scritto globale di tre ore più un orale. Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere in che appello dare l'orale, senza scadenza. Si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e vale l'ultimo scritto consegnato. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento.

Gli orali sono di sola teoria. Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco nell'ultima pagina. I compitini e gli scritti non hanno scadenza di validità ai fini di quando fare l'orale. Chi venga respinto all'esame orale deve rifare sia lo scritto che l'orale.

Programma Dettagliato

Insiemi numerici e cardinalità. Introduzione ai numeri. Numeri naturali, numeri interi relativi, numeri razionali, numeri decimali. Gli allineamenti decimali infiniti. Numeri decimali periodici e loro corrispondenza coi numeri razionali. La radice quadrata di 2 non è rappresentabile con un numero decimale periodico (senza dimostrazione). I numeri reali come allineamenti decimali infiniti periodici o no. L'allineamento 0,101001000100001... non è periodico (con dimostrazione). Dimostrazioni per assurdo. Come generare altri numeri irrazionali. I numeri irrazionali sono tanti quanti i numeri reali (cenno). Algoritmi che generano le cifre decimali di un numero reale. Gli algoritmi che generano numeri reali sono catalogabili in modo lessicografico con numero d'ordine $n \in \mathbb{N}$. Esistenza di numeri non calcolabili (non generabili da alcun algoritmo), dimostrato col metodo diagonale. Come intuire i numeri non calcolabili. Definizione di funzione, e di funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva. Inclusione e inclusione stretta fra insiemi. Definizione di equipotenza, o uguale numerosità, o uguale cardinalità fra insiemi. Paradossi sulla numerosità di insiemi infiniti. L'insieme $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ è equipotente a $\{-1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi è equipotente all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. L'insieme dei numeri pari è equipotente all'insieme dei numeri naturali. Dimostrazione che l'insieme dei numeri razionali è equipotente all'insieme dei numeri naturali. Dimostrazione che l'insieme dei numeri reali non è equipotente all'insieme dei numeri naturali, usando il metodo diagonale. Insiemi numerabili e insiemi con la potenza del continuo. Cenni alla gerarchia fra le cardinalità infinite.

Operazioni, ordinamento, nozioni di logica, intervalli, disequazioni. Proprietà algebriche di base di somma e prodotto fra numeri reali: commutativa, associativa, esistenza di zero e uno, esistenza di opposti e reciproci, proprietà distributiva. Proprietà di base dell'ordinamento fra numeri reali: tricotomia, transitività. Legame fra l'ordinamento e la somma: invarianza dell'ordine tramite traslazioni Proprietà di base dell'ordinamento fra numeri reali: tricotomia, transitività. Legame fra l'ordinamento e il prodotto: invarianza dell'ordine tramite omotetie a coefficiente positivo. Cosa succede moltiplicando una disuguaglianza per un numero positivo, o negativo. Altre proprietà elementari delle disuguaglianze. Il principio di Archimede. Non ci sono numeri reali infinitamente grandi o infinitamente piccoli. Nozioni di logica: distinzioni fra espressioni a valore numerico, simboliche o non, a valore logico (vero o falso) e altri, proposizioni e predicati. Connettivi logici: negazione, congiunzione, disgiunzione, con le loro tabelle di verità. L'implicazione e la sua tabella di verità. Catene di implicazioni vere e deduzioni che se ne possono trarre. La doppia implicazione, o equivalenza logica. Rassegna di implicazioni ed equivalenze sempre vere riguardo a uguaglianze e disuguaglianze. Catene di implicazioni ed equivalenze vere: la verità si propaga nella direzione delle frecce, la falsità in direzione opposta. L'implicazione e la doppia implicazione interpretate come riduzione o mantenimento della quantità di informazione: se vale $p \Rightarrow q$ e p sono veri, p dà più informazione rispetto a q, e sostituire p con q è un passaggio irreversibile. Se invece $p \iff q$, p e q contengono la stessa informazione, e scambiare uno con l'altro è un passaggio reversibile. Equazioni e disequazioni interpretate come predicati, e la loro soluzione come una equivalenza logica con predicati algebricamente più semplici. Insiemi di numeri e i vari modi di specificarli: elenco semplice o con puntini, $\{x \in \mathbb{R} \mid \text{predicato}(x)\}$, $\{\text{funzione}(x) \mid x \in \text{ambiente}, \text{predicato}(x)\}$. Collegamenti fra connettivi logici e operazioni insiemistiche: la congiunzione corrisponde all'intersezione, la disgiunzione corrisponde all'unione, la negazione corrisponde al complemento, l'implicazione vera corrisponde all'inclusione, la doppia implicazione vera corrisponde all'uguaglianza. Il predicato standard sempre vero e quello sempre falso. Come scrivere la risoluzione di equazioni e disequazioni usando i connettivi logici. Il predicato standard sempre vero e quello sempre falso. Gli intervalli come insiemi "senza lacune", e loro classificazione in limitati e illimitati, aperti, chiusi o semiaperti, degeneri o non degeneri, con le varie notazioni e rappresentazioni grafiche. Come rappresentare graficamente degli insiemi sulla retta. Definizione di valore assoluto e le sue principali proprietà. Interpretazione geometrica di $|x|$ come distanza di x dallo zero. Interpretazione geometrica di $|x - y|$ come distanza fra i punti x e y. Formule notevoli che coinvolgono il valore assoluto. La disuguaglianza triangolare $|x+y| \leq |x|+|y|$, e perché è così chiamata. Disequazioni con valore assoluto. Le regole logiche $p \vee \text{vero} \iff \text{vero}$, $p \wedge \text{vero} \iff p$, $p \vee \text{falso} \iff p$, $p \wedge \text{falso} \iff \text{falso}$ e come si usano nelle disequazioni. Disequazioni con valori assoluti. Massimo e minimo fra due o più numeri, e come trattare simbolicamente espressioni del tipo $\max\{x, y\}$ e $\min\{x, y\}$. Disequazioni con valori assoluti, massimi e minimi. Come ricavare i grafici di $|f(x)|$, $\max\{f(x), g(x)\}$ e $|f(x)|$ dai grafici di f e g. Altre funzioni notevoli: la funzione segno $\operatorname{sgn} x$, la parte intera, $\lfloor x\rfloor$, $\lceil x\rceil$: significato, proprietà principali e grafici. Lo studio del segno di una espressione algebrica. Il caso di polinomi di primo grado e secondo grado. La regola dei segni, e lo studio del segno di un prodotto di fattori semplici, usando schemi grafici. Come risolvere disequazioni che si riportano alla regola dei segni.

Funzioni elementari, funzioni inverse. Richiami sulle varie definizioni di potenza, a seconda delle diverse restrizioni su base ed esponente. Regole algebriche di calcolo con le potenze. Il caso pericoloso di base negativa ed esponente non intero. Come si comportano le potenze a esponente intero rispetto all'ordinamento. I casi notevoli delle potenze quadrato e cubo, con generalizzazioni alle potenze di grado pari o dispari, e alle potenze a esponente intero negativo. Applicazioni alla risoluzione di disequazioni contenenti radicali. Richiami sul concetto insiemistico di iniettività e suriettività di una funzione. fondamentale $y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$. Le formule notevoli $f^{-1}(f(x)) = x$, $f(f^{-1}(x)) = x$, $(f^{-1})^{-1} = f$. Funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e loro grafici. Data una curva nel piano, come si decide se è il grafico di una funzione, se questa funzione è iniettiva, suriettiva o biiettiva, e come si costruisce il grafico della funzione inversa usando la simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Come si trova la formula della funzione inversa di una funzione di cui è data la formula. Esempi. Quadrato e radice quadrata, cubo e radice cubica, le radici viste come inverse delle potenze. Distinzione fra potenze (x^a) ed esponenziali (a^x). Esponenziale crescente ed esponenziale decrescente, coi rispettivi grafici. La notazione $\exp_a x = a^x$, $\exp x = e^x$ per l'esponenziale. La formula fondamentale $a^{x+y} = a^x a^y$. Regole per la manipolazione di disuguaglianze con esponenziali. Grafici dell'esponenziale crescente e decrescente. I logaritmi come inverse degli esponenziali. La notazione alternativa exp per gli esponenziali. Rassegna delle formule notevoli che valgono per i logaritmi. Logaritmi e disuguaglianze. Ripasso sulle funzioni trigonometriche dirette e inverse: definizioni, significato geometrico, valori notevoli, formule notevoli, grafici.

Predicati e induzione. Esempi introduttivi al principio di induzione: $2^n \geq n$, $2^n \geq 3n$. Esempio introduttivo al principio di induzione: $2^n \geq 5n$. Lo schema generale del principio di induzione: il predicato $\mathcal{P}(n)$, predicati induttivi o ereditari, il caso base. *Dimostrazione per induzione della disuguaglianza di Bernoulli* $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ *per* $x > -1$ *e* $n \in \mathbb{N}$. La successione di Fibonacci F_n e dimostrazione per induzione della disuguaglianza $F_n \leq 2^n$. Variante del passo induttivo: se $(\mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$, con i due casi base. *Le identità dei numeri triangolari* $1+2+3+\cdots+n$ *e dei numeri piramidali* $1^2+2^2+3^2+\cdot+n^2$*, dimostrate per induzione.*

Limiti. Un modo per arrivare alla definizione di limite. La definizione rigorosa di limite nel caso di x_0, L entrambi finiti. La condizione di sensatezza del limite. Teorema dell'unicità del limite (nel caso di x_0, L entrambi finiti). Varianti della definizione di limite: x_0 o L che valgono (uno o entrambi) $\pm\infty$, e i limiti unilaterali (da destra o da sinistra, per eccesso o difetto) x_0^+, x_0^-, L^+, L^-. Cenno all'infinito senza segno ∞, distinto da $+\infty$. Il problema del calcolo dei limiti. Il teorema dell'algebra dei limiti nel caso di limiti finiti, con *dimostrazione nel caso della somma.* Regole di semplificazione nel calcolo dei limiti. Errori comuni nel calcolo dei limiti: la pseudoregola. Limiti notevoli che non rientrano nell'algebra dei limiti: i limiti di $1/x$ per x che tende a zero o infinito. Le forme indeterminate $+\infty-\infty$, $0\cdot(\pm\infty)$, $0/0$, ∞/∞. Come trattare le forme non indeterminate che esulano dal teorema dell'algebra dei limiti. Il teorema del confronto, o dei due carabinieri, senza dimostrazione. Il teorema del limite della funzione composta, o del cambio di variabile nel limite, senza dimostrazione. Esempi. Definizione di funzione continua in un punto, e di funzione continua (su tutto il suo dominio), con la versione in termini di ε, δ. Prime proprietà delle funzioni continue. Le funzioni elementari considerate nel corso (polinomi, radici, funzioni razionali, esponenziali, logaritmi, funzioni goniometriche) sono tutte continue, così come le loro combinazioni tramite un numero finito di quattro operazioni e di composizione. Le sole funzioni base che abbiamo introdotto e che non continue sono il segno di x e la parte intera di x (floor e ceiling). Dimostrazione che $a^n/n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ se $a > 1$, usando la disuguaglianza di Bernoulli. Limiti di rapporti di infiniti esponenziali, polinomi e logaritmi: $\lim_{x\to+\infty} a^x/x^p = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x/a^x = 0$, $\lim_{x\to+\infty}(\log_a x)/x = 0$ se $a > 1$, $p > 0$. Il limite goniometrico fondamentale $(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ per $x \to 0$, dedotto dalle disuguaglianze notevoli $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq |x|$ se $|x| < \pi/2$, dimostrate per via geometrica. Il limite goniometrico fondamentale $(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ per $x \to 0$ (conclusione). Il limite notevole $(1-\cos x)/x^2 \to 1/2$ per $x \to 0$. Il limite esponenziale fondamentale $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \approx 2.718\ldots$, senza dimostrazione. Cenno al numero di Nepero e e gli esponenziali e i logaritmi naturali in base e. In questo corso i logaritmi sono da intendere in base e ogniqualvolta la base non è esplicita. I limiti esponenziali notevoli $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e$ per $x \to \pm\infty$, $(1+x)^{1/x} \to e$ per $x \to 0$, $(e^x-1)/x \to 1$ per $x \to 0$, $(\log(1+x))/x \to 1$ per $x \to 0$ (senza dimostrazione). Le forme indeterminate esponenziali 1^∞ e ∞^0 e come si riportano alla forma $0\cdot\infty$. Casistica di limiti che non esistono: (a) quando il limite da sinistra e il limite da destra esistono ma sono diversi, per esempio $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$, (b) per funzioni oscillanti, come $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$. Come affrontare limiti indeterminati della forma $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. Ammonimento contro la pseudoregola.

Insiemi numerici, massimi e minimi, estremi superiori e inferiori. Definizione di massimo e minimo di un insieme. Unicità e possibile esistenza o non esistenza del massimo e minimo. Definizione di maggiorante e di minorante di un insieme. Non unicità: i maggioranti e i minoranti, quando ne esistono, sono sempre "peggiorabili". Definizione di insiemi limitati inferiormente, limitati inferiormente, limitati, illimitati superiormente, illimitati inferiormente, illimitati. Esempi. Il principio di completezza dei numeri reali: se esistono maggioranti o minoranti di un insieme, allora ne esistono di non migliorabili. Definizione di estremo superiore ed inferiore di un insieme (eventualmente illimitato).

Monotonia e limiti. Definizione di successione debolmente o strettamente crescente o decrescente. Successioni non monotone e oscillanti. Significato geometrico. Le successioni monotone hanno sempre limite, finito o infinito (dimostrazione per le successioni crescenti limitate). *La successione fondamentale $(1+\frac{1}{n})^n$: generalità e dimostrazione che è (debolmente) crescente. Dimostrazione che la successione ausiliaria $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ è debolmente decrescente. Queste due successioni hanno limite finito, detto numero di Nepero, compreso fra 2 e 3.* Altri limiti notevoli che si deducono dalla successione fondamentale. Relazioni fra limiti e disuguaglianze: se una disuguaglianza vale per le funzioni, passando al limite la disuguaglianza si conserva se è debole, si indebolisce se è stretta.

Limiti di successioni, ordini di infinito e notazione di Landau. Il limite del fattoriale all'infinito. Trabocchetti nel calcolo di limiti di prodotti in cui il numero di fattori è variabile. Limiti contenenti il fattoriale e affini: $n!$, $n!/n$, $n!/n^2$, $n!$/potenza, $n!/2^n$, $n!/3^n$, $n!/5^n$, $n!$/esponenziale, n^n, $n^n/n!$, $\binom{2n}{n}$. La gerarchia degli infiniti campione grandi, piccoli e intermedi. I simboli di Bachman-Landau: o piccolo, O grande, omega piccolo, omega grande, theta grande, tilde. Gli infinitesimi e la loro gerarchia. La gerarchia degli andamenti asintotici, che abbraccia infiniti, infinitesimi e costanti.

Funzioni continue. Richiami sulla definizione di continuità in un punto e in tutto il dominio. Continuità delle funzioni elementari e delle loro combinazioni. Funzioni discontinue notevoli: segno e parte intera. Enunciato del teorema dell'esistenza degli zeri. Significato geometrico. *Dimostrazione del teorema dell'esistenza degli zeri usando il metodo di bisezione.* Esempi illustrativi. L'immagine di un insieme tramite una funzione, o insieme dei valori assunti dalla funzione. Come si trovano il dominio e l'immagine di una funzione a partire dal grafico. Gli intervalli, visti come insiemi di numeri reali senza lacune. Il teorema dei valori intermedi: se ho una funzione f continua definita su un intervallo I, l'immagine $f(I)$ è ancora un intervallo. Definizione di funzioni monotone nelle quattro categorie: strettamente/debomente crescenti/decrescenti. Significato geometrico. Richiami sulle funzioni iniettive o invertibili. Relazioni fra continuità, stretta monotonia, iniettività e avere come dominio un intervallo (senza dimostrazione). L'inversa di una funzione monotona è monotona dello stesso tipo. Definizione di valore massimo o minimo (globale) di una funzione, e di punto di massimo o minimo (globale). Come riconoscere i valori massimi o minimi e i rispettivi punti di massimo o minimo (globali) a partire dal grafico di una funzione. *Il teorema di Weierstraß sui massimi e minimi: dimostrazione col metodo di bisezione.* Se lavorassimo sui razionali il teorema sarebbe falso. Rilassando le ipotesi del teorema la tesi viene meno.

La derivata e il suo calcolo. Introduzione al concetto di derivata. Definizione di derivata di una funzione in un punto. Il rapporto incrementale di una funzione. Calcolo della derivata della funzione elementare $f(x) = x^2$ nel punto $x_0 = 1$. Notazioni per la derivata. Calcolo della derivata della funzione elementare x^2. *Teorema: se una funzione è derivabile in un punto, è anche continua in quel punto. Esempio di una funzione continua che non è derivabile in un punto.* Derivate delle funzioni elementari: $e^x, x^3, 1/x, \log x, \sqrt{x}, \operatorname{sen} x, \cos x$. *Il teorema dell'algebra delle derivate, con dimostrazione.* La derivata di x^n quando $n \in \mathbb{Z}$. La derivata della funzione tangente. La derivata della funzione composta, con cenno di dimostrazione. La derivata della potenza con esponente reale. Il teorema della derivata della funzione inversa. Come ottenere la formula della derivata della funzione inversa a partire dalla relazione fondamentale $f(f^{-1}(x)) = x$. Derivata di arcoseno, arcocoseno, arcotangente, radice cubica. La derivata del logaritmo del valore assoluto.

Funzioni derivabili e loro studio. Definizione di derivata sinistra e destra. Casistica di punti singolari: angolosi, cuspidali, flessi verticali. Criterio pratico per dire quando una funzione è derivabile sul suo dominio guardando la formula: se la formula è una combinazione di un numero finito di polinomi, funzioni razionali, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche dirette e arcotangente, allora la funzione è derivabile sul dominio. Se la formula contiene valore assoluto, radici, arcoseno, arcocoseno o funzioni non continue, allora si può sospettare che abbia punti di non derivabilità. Definizione di punti di massimo o minimo locali, con interpretazione geometrica. *Il teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno, la derivata, se c'è, è zero (con dimostrazione). Il teorema del valor medio di Rolle, con significato geometrico. Il teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.* Il teorema del valor medio di Cauchy (solo enunciato). Conseguenze del teorema di Lagrange: il teorema della derivata nulla e la relazione fra monotonia e segno della derivata. *Il teorema de L'Hôpital (dimostrazione nel caso* $0/0$ *e* x_0 *finito).* Note generali sull'uso della regola del L'Hôpital. Le derivate seconde, terze e successive, con le varie notazioni. Interpretazione geometrica del segno della derivata seconda, in termini di direzione di curvatura. Posizione relativa del grafico di una funzione e della retta tangente. Definizione di funzioni convesse e di funzioni concave. Teorema sul legame fra convessità/concavità e segno della derivata seconda. Studio di funzione. Rette asintotiche al grafico di una funzione: definizione geometrica. Criterio algebrico per trovare le rette asintotiche al grafico di una funzione. Esempi di studio di funzione. Il criterio dei minimi flessi per abbozzare un grafico con poche informazioni. Esercizi sullo studio di funzione.

Area, integrali e primitive. Introduzione all'integrale: il problema dell'area delle figure curvilinee, trapezoidi, suddivisioni marcate, plurirettangoli, somme di Riemann. Le somme di Riemann si stabilizzano all'infittirsi della suddivisione: evidenze numeriche. Definizione di ampiezza di una suddivisione. La notazione dell'integrale. Definizione di integrale di una funzione secondo Riemann. La notazione dell'integrale. Cenno a definizioni alternative. Il teorema fondamentale del calcolo (senza dimostrazione). Esempi di uso del teorema fondamentale per trovare aree di trapezoidi. Definizione di primitiva (integrale indefinito, antiderivata) di una funzione. Teorema: ogni funzione continua su un intervallo ha primitiva (senza dimostrazione). Le primitive non sono mai uniche: aggiungendo una costante a una primitiva se ne ottiene un'altra. Le funzioni continue hanno primitive (senza dimostrazione). Su un intervallo due primitive di una data funzione differiscono sempre per una costante (con dimostrazione). Il problema di trovare primitive elementari di una funzione elementare non sempre ha soluzione. Cenno all'algoritmo di Risch. Alcune funzioni elementari che non hanno primitive elementari. La notazione dell'integrale "indefinito". Linearità dell'integrale indefinito. Integrali immediati e "quasi immediati". Esempi. Integrazione per parti. Esempi. Esempio di integrazione per parte due volte. Integrazione per sostituzione, o cambio di variabile, con esempi. Integrazione delle funzioni razionali: abbassamento del grado del numeratore, decomposizione in fratti semplici (prima parte). Decomposizione in fratti semplici con denominatore di grado uno (o relativa potenza) o due, completamento del quadrato nel caso di grado 2. Esempi.

I teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale

Oltre alla **dimostrazione** dei teoremi seguenti, lo studente dovrà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti che sono stati introdotti nel corso, e di saper illustrare definizioni e teoremi con **esempi**, qualora ce ne siano di semplici.

1. Le formule per le somme $1+2+3+\cdots+n$ e $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ e la disuguaglianza di Bernoulli, con dimostrazioni per induzione.
2. Il teorema del limite della somma di due funzioni aventi limiti finiti.
3. La successione fondamentale $(1 + 1/n)^n$: dimostrazione che è crescente, che la successione ausiliaria $(1 + 1/n)^{n+1}$ è decrescente, e che hanno entrambe limite finito, coincidente
4. Teorema dell'esistenza degli zeri.
5. Il teorema di Weierstraß sui massimi e minimi (dimostrazione col metodo di bisezione).
6. Le funzioni derivabili sono continue. Esempio di funzione continua ma non derivabile.
7. Derivata del prodotto per costante, della somma, del prodotto, del reciproco di funzioni derivabili.
8. Teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno una funzione derivabile ha derivata nulla.
9. Teorema di Rolle, con significato geometrico.
10. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.
11. Regola de l'Hôpital: enunciato generale, dimostrazione nel caso $0/0$ in un punto finito con limite finito.