Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corsi di Laurea Triennale in Informatica e in IBW

Analisi Matematica

Prof. Gianluca Gorni

McGraw-Hill e-book dal titolo Analisi Matematica, Custom Publishing McGraw-Hill, Prof. Gianluca Gorni, M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli, ISBN: 9781308323664.
Materiale attinente al corso è disponibile sul sito di e-Learning e alla pagina:
`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Analisi1`

Regolamento d'esame: Ci sono tre modi per ottenere i 12 crediti del corso: (a) due prove parziali scritte senza orale, (b) due prove parziali scritte più orale, (c) un singolo scritto globale più orale. Al termine dei due periodi didattici (semestri) si svolgono i 2 "compitini" (prove parziali), ognuno con punteggio dato in trentesimi. Il punteggio può superare 30, per esempio 33 o 37, anche se esse3 mostra un troncamento a trenta e lode. Chi prende meno di 12 in un compitino deve passare alla modalità scritto globale più orale.

Per chi supera tutti e due i compitini con voto di almeno 12, viene calcolata la media dei due punteggi (anche maggiori di 30), arrotondata per eccesso, e troncata infine al tetto massimo di 30; tale media, quando di almeno 18, verrà inserita come esito provvisorio su esse3 al primo appello orale estivo apposito.

A quel punto chi trova tale media su esse3 può segnalare, sempre su esse3, il suo consenso come voto definitivo (senza fare l'orale); in alternativa, può cliccare sul rifiuto del voto (oppure lasciarlo in sospeso) e presentarsi a sostenere un orale, in quello stesso appello orale o in uno successivo (previa iscrizione). L'orale ha come partenza il voto degli scritti e di solito lo migliora di qualche punto. La lode si può avere soltanto con l'orale. Chi non accetta né rifiuta il voto della media dei compitini se lo vedrà comunque registrato in automatico ad una certa scadenza che sarà indicata, comunque dopo la fine di settembre.

Il consenso o rifiuto del voto su esse3 è riservato ai soli voti ottenuti come medie dei due compitini. Per i voti degli scritti globali, dei compitini e degli orali effettivamente sostenuti non è previsto che lo studente dia il consenso o rifiuto su esse3.

Lo studente con media minore di 18 (ma almeno 12) nei due compitini non la troverà riportata su esse3. Può presentarsi all'orale con tale media come voto di partenza, oppure passare alla modalità scritto globale più orale. A chi consegna uno scritto globale vengono annullati i compitini e gli scritti globali precedenti (vale solo l'ultimo scritto consegnato).

La rimanente modalità di esame è uno scritto globale di tre ore più un orale. Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere in che appello dare l'orale, senza scadenza. Si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e vale l'ultimo scritto consegnato. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento.

Gli orali sono di sola teoria. Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco nell'ultima pagina. I compitini e gli scritti non hanno scadenza di validità ai fini di quando fare l'orale. Chi venga respinto all'esame orale deve rifare sia lo scritto che l'orale.

Programma Dettagliato

Insiemi numerici: insiemi numerabili e non numerabili. Numeri: naturali, interi, razionali e loro visualizzazione. Gli allineamenti decimali infiniti. Numeri decimali periodici. L'allineamento 0,101001000100001... non è periodico (con dimostrazione). Dimostrazioni per assurdo. Come generare altri numeri irrazionali. I numeri reali come allineamenti decimali infiniti periodici o no. Fra due numeri reali distinti esiste sempre infiniti razionali e infiniti irrazionali. Algoritmi che generano un allineamento decimale. Esistono numeri decimali che non sono generati da un algoritmo? Esistenza di numeri non calcolabili (non generabili da alcun algoritmo), dimostrato col metodo diagonale. Richiami sull'equipotenza fra insiemi. L'albergo di Hilbert. Dimostrazione che l'insieme dei numeri pari e l'insieme dei numeri razionali sono numerabili. Insiemi numerabili. Dimostrazione che l'insieme dei numeri reali non è numerabile, col metodo diagonale. Cenno alle principali cardinalità: finite, numerabili, la potenza del continuo. Come visualizzare l'insieme dei numeri razionali e dei numeri reali.

Operazioni, ordinamento, nozioni di logica, intervalli, disequazioni. Proprietà di base di somma e prodotto fra numeri (reali): commutativa, associativa, esistenza di zero e uno, esistenza di opposti e reciproci, proprietà distributiva. Proprietà di base dell'ordinamento fra numeri (reali): tricotomia, transitività. Legame fra l'ordinamento e la somma: invarianza dell'ordine tramite traslazioni e invarianza dell'ordine tramite omotetie a coefficiente positivo. Cosa succede moltiplicando una disuguaglianza per un numero positivo, o negativo. Altre proprietà elementari delle disuguaglianze. Nozioni di logica: distinzioni fra oggetti a valore numerico, a valore logico (vero o falso) e altri, proposizioni e predicati. Il predicato sempre vero e il predicato sempre falso. Connettivi logici: negazione, congiunzione, disgiunzione, con le loro tabelle di verità. Parallelo con intersezione e unione nell'insiemistica. L'implicazione e la sua tabella di verità. Implicazioni sempre vere. La doppia implicazione, o equivalenza. Catene di implicazioni. Trasformazioni reversibili e irreversibili di formule (uguaglianze o disuguaglianze). Esercizi su numeri e logica. Insiemi di numeri: vari modi di specificarli: elenco semplice o con puntini, $\{x \in \mathbb{R} \mid \text{predicato}(x)\}$, $\{\text{funzione}(x) \mid \text{predicato}(x)\}$. Gli intervalli limitati e illimitati, aperti, chiusi o semiaperti, e le varie notazioni. La proprietà caratteristica degli intervalli: sono senza lacune, cioè ogniqualvolta due punti appartengono a un intervallo, ogni punto intermedio pure appartiene all'intervallo. Come rappresentare graficamente gli intervalli e le unioni di intervalli. Esercizi sull'implicazione. Il valore assoluto e le sue principali proprietà. La disuguaglianza triangolare. Disequazioni con valore assoluto. Disequazioni con valori assoluti. Massimo e minimo fra due o più numeri, e come trattare simbolicamente espressioni del tipo $\max\{x, y\}$ e $\min\{x, y\}$. Disequazioni con massimi e minimi. Come ricavare i grafici di $\max\{f(x), g(x)\}$ e $|f(x)|$ dai grafici di f e g. La funzione segno $\operatorname{sgn} x$, la parte intera, $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$.

Funzioni elementari, funzioni inverse. Ripasso di definizioni e proprietà algebriche delle potenze nei vari casi a seconda della base e dell'esponente. Il caso "pericoloso" di base negativa ed esponente non intero. Regole algebriche di calcolo con le potenze. Potenze e disuguaglianze: quando e come si può elevare una disuguaglianza a una potenza. Disequazioni irrazionali delle forme $\sqrt{A} \geq B$ e $\sqrt{A} \leq B$, e come si riconducono a sistemi senza radici quadrate. Funzioni iniettive e suriettive, e funzione inversa. Le formule fondamentali $y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$, $f^{-1}(f(x)) = x$, $f(f^{-1}(x)) = x$, $(f^{-1})^{-1} = f$. Il caso di funzioni reali di variabile reale: come si riconosce se una curva nel piano cartesiano è il grafico di una funzione, e se questa è iniettiva (invertibile) o suriettiva. Come si costruisce il grafico di f^{-1} a partire dal grafico di f. Inverse delle potenze: x, $1/x$, x^2. Le formule notevoli $(\sqrt{x})^2 = x$, $\sqrt{x^2} = |x|$. La radice cubica come inversa del cubo. Distinzione fra potenze (x^a) ed esponenziali (a^x). Regole per la manipolazione di disuguaglianze con esponenziali. Grafici dell'esponenziale crescente e decrescente. I logaritmi come inverse degli esponenziali. Rassegna delle formule notevoli che valgono per i logaritmi. Esercizi sulle disequazioni con logaritmi ed esponenziali. Esercizi sulle disequazioni con logaritmi ed esponenziali. Ripasso sulla definizione di seno e coseno. Ripasso sulle funzioni trigonometriche dirette e inverse: definizioni, significato geometrico, valori notevoli, grafici, formule notevoli.

Predicati e induzione. Esempio introduttivo al principio di induzione: $2^n \geq n$. Esempi del principio di induzione: $2^n \geq 3n$, $2^n \geq 5n$, $2^n \geq n^2$. Enunciato del principio di induzione nella variante più semplice. Esempi: $n! \geq 2^n$, $n! \geq 3^n$. Esempio di dimostrazioni per induzione: *la disuguaglianza di Bernoulli* $(1+x)^n \geq 1+nx$ *per* $x > -1$, $n \in \mathbb{N}$. *Le identità dei numeri triangolari* $1+2+3+\cdots+n$ *e dei numeri piramidali* $1^2+2^2+3^2+\cdot+n^2$. Variante del principio di induzione: se $(\mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$ per ogni $n \geq 0$, e $\mathcal{P}(0)$ e $\mathcal{P}(1)$ sono veri, allora $\mathcal{P}(n)$ è vero per ogni $n \geq 0$. La successione di Fibonacci F_n e dimostrazione per induzione della disuguaglianza $F_n \leq 2^n$. La successione di Fibonacci F_n e dimostrazione per induzione delle disuguaglianze $F_n \geq (3/2)^n$, $F_n \geq n$, $F_n \geq 2n$. Dimostrazione per induzione di predicati riguardanti la successione $G_{n+3} = G_n + G_{n+1} + G_{n+2}$, $G_0 = 0$, $G_1 = G_2 = 1$.

Insiemi numerici, massimi e minimi, estremi superiori e inferiori. Definizione di massimo, minimo, maggiorante e minorante, estremo superiore e inferiore di un insieme di numeri reali. Il principio di completezza dell'insieme dei numeri reali. Esempi. Insiemi limitati o illimitati, superiormente o inferiormente. I simboli $+\infty$ e $-\infty$ come maggioranti e minoranti di tutti gli insiemi. Esempi di studio di max/min, maggioranti/minoranti, sup/inf.

Limiti. Esempi introduttivi al concetto di limite. La definizione di limite. Limiti finiti o infiniti, per x che tende a un valore finito o infinito, limiti per eccesso o difetto, da destra o da sinistra. Esempi di limiti che non esistono: $(-1)^n$ per $n \to +\infty$, $\operatorname{sen} x$ per $x \to +\infty$. Condizione di sensatezza del limite. Teorema di unicità del limite (senza dimostrazione). *Il teorema dell'algebra dei limiti. Dimostrazione schematica del teorema dell'algebra dei limiti nei casi di* moltiplicazione per costante e di *somma di due funzioni aventi limite finito.* Casistica fuori dal teorema e forme indeterminate $+\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞. Il teorema del confronto, o dei carabinieri (senza dimostrazione). Varianti con sole due funzioni. Esempi di uso del teorema del confronto. Il limite fondamentale $(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ per $x \to 0$. Definizione di funzione continua. Le seguenti funzioni sono continue in tutti i punti in cui sono definite: valore assoluto, polinomi, radici, funzioni trigonometriche dirette e inverse, esponenziali e logaritmi. Il teorema del limite della funzione composta, o cambio di variabile nel limite (senza dimostrazione). Esempi di cambio di variabile nel limite. Il limite fondamentale $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \approx 2.718$. Limiti notevoli conseguenza: $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$, $\lim_{x\to 0^\pm}(1+x)^{1/x} = e$, il logaritmo in base e è il logaritmo di default, $\lim_{x\to 0}(\log(1+x))/x = 1$, $\lim_{x\to 0}(e^x-1)/x = 1$. Limiti di rapporti di infiniti esponenziali, polinomi e logaritmi: se $a > 1$ $\lim_{x\to+\infty} a^x/x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} a^x/(\text{polinomio}) = \pm\infty$, $\lim_{x\to+\infty}(\text{polinomio})/\log(x) = \pm\infty$, cioè gli esponenziali crescenti sono più grandi dei polinomi, che a loro volta sono più grandi dei logaritmi. Il limite notevole $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)/x^2 = 1/2$. Regole di semplificazione nel calcolo dei limiti. Errori comuni nel calcolo dei limiti. Disuguaglianze trigonometriche notevoli:

$|\operatorname{sen} x| \leq |x|$, $|x| \leq |\tan x|$. Dimostrazione del limite fondamentale $(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ per $x \to 0$.

Monotonia e limiti. Esempi di funzioni per le quali il limite non esiste, in particolare successioni oscillanti. Il problema di stabilire se il limite esiste qualora non si riesca a calcolare quanto vale con metodi noti. Definizione di successioni debolmente/strettamente crescenti o decrescenti, o monotone. Significato geometrico. Teorema: le successioni monotone hanno sempre limite, finito o infinito, e tale limite coincide con l'estremo superiore nel caso crescente, e con l'estremo inferiore nel caso decrescente (dimostrazione nel caso crescente e limite finito). *La successione fondamentale $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$. Dimostrazione che a_n è debolmente crescente e che la successione ausiliaria $b_n := (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ è decrescente. Le due successioni a_n, b_n tendono a un numero reale compreso fra 2 e 3, chiamato numero di Nepero, e indicato con e.* Logaritmo ed esponenziale in base e. Limiti conseguenza di quello fondamentale: $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$, $\lim_{x\to 0^\pm}(1+x)^{1/x} = e$, il logaritmo in base e è il logaritmo di default, $\lim_{x\to 0}(\log(1+x))/x = 1$, $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = 1$. Relazioni fra limiti e disuguaglianze: passando al limite le disuguaglianze deboli si conservano, le strette si indeboliscono.

Limiti di successioni, ordini di infinito e notazione di Landau. Il limite del fattoriale all'infinito. Trabocchetti nel calcolo di limiti di prodotti in cui il numero di fattori è variabile. Limiti contenenti il fattoriale e affini: $n!$, $n!/n$, $n!/n^2$, $n!$/potenza, $n!/2^n$, $n!/3^n$, $n!/5^n$, $n!$/esponenziale, n^n, $n^n/n!$, $\binom{2n}{n}$. La gerarchia degli infiniti campione grandi, piccoli e intermedi. I simboli di Bachman-Landau: o piccolo, O grande, omega piccolo, omega grande, theta grande.

Funzioni continue. Richiami sulla definizione di continuità in un punto e in tutto il dominio. Continuità delle funzioni elementari e delle loro combinazioni. Funzioni discontinue notevoli: segno e parte intera. Passando al limite, le disuguaglianze deboli si conservano, mentre quelle forti si indeboliscono. Richiamo sull'esistenza del limite delle successioni monotone. Enunciato del teorema dell'esistenza degli zeri. Significato geometrico. *Dimostrazione del teorema dell'esistenza degli zeri, usando il metodo di bisezione.* Esempio di una funzione per la quale la procedura non termina in un numero finito di passi. Altri esempi illustrativi. L'immagine di un insieme tramite una funzione. Richiami sulla definizione e la classificazione degli intervalli. Il teorema dei valori intermedi: se ho una una funzione f continua definita su un intervallo I, l'immagine $f(I)$ è ancora un intervallo. Definizione di funzioni monotone nelle quattro categorie: strettamente/debolmente crescenti/decrescenti. Significato geometrico. Richiami sulle funzioni iniettive o invertibili. Relazioni fra continuità, stretta monotonia, iniettività e avere come dominio un intervallo (senza dimostrazione). L'inversa di una funzione monotona è monotona dello stesso tipo. *Il teorema di Weierstraß sui massimi e minimi, dimostrato usando il metodo di bisezione.* Se lavorassimo sui razionali il teorema sarebbe falso. Una funzione continua $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ è limitata. Il teorema di Weierstrass diventa falso se ambientato su intervalli che non siano del tipo $[a, b]$. Le funzioni continue mandano intervalli in intervalli, e intervalli chiusi e limitati in intervalli chiusi e limitati. Valore massimo o minimo globali e locali, punti di massimo e minimo globali e locali di una funzione a valori reali e modi di individuarli visivamente su un grafico.

La derivata e il suo calcolo. Introduzione al concetto di derivata. Pendenza o coefficiente angolare di un segmento o di una retta. Rapporto incrementale di una funzione. Definizione di derivata di una funzione in un punto. Notazioni per la derivata. Calcolo della derivata delle funzioni elementari $x^2, x^3, e^x, \log x, \operatorname{sen} x, \cos x, 1/x, \sqrt{x}$. Definizione di derivabilità di una funzione in un punto. La funzione segno ha derivata infinita nell'origine, ed è discontinua. *Se una funzione è derivabile in un punto, allora è anche continua nel punto, ma non viceversa (con dimostrazione).* La funzione valore assoluto è continua nell'origine ma non è derivabile. *Il teorema dell'algebra delle derivate, con dimostrazione per somma, prodotto, reciproco.* La derivata di $\tan x$. Derivata della funzione composta e della funzione inversa. Derivata delle funzioni trigonometriche inverse. Derivata di x^n per $n \in \mathbb{Z}$. Derivata di x^α se $x > 0$. Derivata di $\sqrt[3]{x}$. Derivata di $|x|, \log|x|$. Ricapitolazione delle regole di calcolo delle derivate. Esercizi di calcolo delle derivate.

Funzioni derivabili e loro studio. Definizione di derivata destra e sinistra in un punto. Casistica dei valori di derivata destra e sinistra: punti angolosi, punti angolosi con un lato verticale, cuspidi con punta verso il basso o verso l'alto, flessi verticali. *Il teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno, la derivata, se c'è, è zero (con dimostrazione). Il teorema del valor medio di Rolle, con dimostrazione e significato geometrico. Il teorema del valor medio di Lagrange, con dimostrazione e significato geometrico.* Il teorema del valor medio di Cauchy, senza dimostrazione, con cenno di significato geometrico. Conseguenze del teorema di Lagrange: il teorema della derivata nulla e la relazione fra monotonia e segno della derivata. Esempi. *Il teorema de L'Hôpital (dimostrazione nel caso* $0/0$ *e* x_0 *finito).* Note generali sull'uso della regola del L'Hôpital. La derivata seconda, terza e successive, con le relative notazioni. Il significato geometrico intuitivo del segno della derivata seconda. Definizione di funzione convessa o concava in termini della posizione del grafico rispetto alle rette tangenti. Il teorema sulla relazione fra la convessità/ concavità e il segno della derivata seconda, con dimostrazione. Rette asintotiche al grafico di una funzione: definizione geometrica. Criterio algebrico per trovare le rette asintotiche al grafico di una funzione. Esempio di studio di funzione.

Polinomi di Taylor. Richiami sulla simbolo "o piccolo" di Bachmann-Landau nel caso $x \to x_0$ finito e gli infinitesimi campione $(x-x_0)^n$. Le formule e i polinomi di Taylor di ordine 0, 1, 2, n di una funzione generica in un punto generico x_0 e resto di Peano. Il caso speciale dei polinomi di MacLaurin. I polinomi di MacLaurin dell'esponenziale e del seno. I polinomi di MacLaurin di $\log(1+x)$ e $1/(1-x)$. Il polinomio di Taylor di ordine n è l'unico con la proprietà che $f(x) = \text{polinomio} + o(x-x_0)^n$. La formula di Taylor col resto di Lagrange (dimostrata per $n = 0$ e $n = 1$). *Dimostrazione che il numero di Nepero e è irrazionale.* Confronto grafico fra la funzione e i suoi polinomi di Taylor all'aumentare del grado, per varie funzioni fra cui esponenziale, seno, coseno.

Area, integrali e primitive. Introduzione all'integrale: il problema dell'area delle figure curvilinee, trapezoidi, suddivisioni marcate, plurirettangoli, somme di Riemann. Le somme di Riemann si stabilizzano all'infittirsi della suddivisione: evidenze numeriche. Definizione di ampiezza di una suddivisione. Definizione di integrale di una funzione secondo Riemann. La notazione dell'integrale. Cenno a definizioni alternative. Il teorema fondamentale del calcolo (senza dimostrazione). Esempi di uso del teorema fondamentale per trovare aree di trapezoidi. Definizione di primitiva (integrale indefinito, antiderivata) di una funzione. Teorema: ogni funzione continua su un intervallo ha primitiva (senza dimostrazione). Le primitive non sono mai uniche: aggiungendo una costante a una primitiva se ne ottiene un'altra. Su un intervallo due primitive di una data funzione differiscono sempre per una costante (con dimostrazione). Il problema di trovare primitive elementari di una funzione elementare non sempre ha soluzione. Cenno all'algoritmo di Risch. Elenco di funzioni elementari che non hanno primitiva elementare. Regole elementari di integrazione. Integrali immediati e "quasi immediati". Integrazione per parti. Esempio di integrazione per parte due volte. Integrazione per sostituzione, o cambio di variabile. Esempi di integrazione per sostituzione, o cambio di variabile. Integrazione delle funzioni razionali: abbassamento del grado del numeratore, decomposizione in fratti semplici, decomposizione in fratti semplici, integrazione di fratti semplici con denominatore di grado due, completamento del quadrato. Esempi.

I teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale

Oltre alla **dimostrazione** dei teoremi seguenti, lo studente dovrà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti che sono stati introdotti nel corso, e di saper illustrare definizioni e teoremi con **esempi**, qualora ce ne siano di semplici.

1. Le formule per le somme $1+2+3+\cdots+n$ e $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ e la disuguaglianza di Bernoulli, con dimostrazioni per induzione.
2. Il teorema del limite della somma di due funzioni aventi limiti finiti.
3. La successione fondamentale $(1 + 1/n)^n$: dimostrazione che è crescente, che la successione ausiliaria $(1 + 1/n)^{n+1}$ è decrescente, e che hanno entrambe limite finito, coincidente
4. Teorema dell'esistenza degli zeri.
5. Il teorema di Weierstraß sui massimi e minimi (dimostrazione col metodo di bisezione).
6. Le funzioni derivabili sono continue. Esempio di funzione continua ma non derivabile.
7. Derivata del prodotto per costante, della somma, del prodotto, del reciproco di funzioni derivabili.
8. Teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno una funzione derivabile ha derivata nulla.
9. Teorema di Rolle, con significato geometrico.
10. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.
11. Regola de l'Hôpital: enunciato generale, dimostrazione nel caso $0/0$ in un punto finito con limite finito.
12. Dimostrazione che il numero di Nepero e è irrazionale, usando la formula di Taylor col resto di Lagrange.