Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corsi di Laurea Triennale in Informatica e in IBW

Analisi Matematica

Prof. Gianluca Gorni

McGraw-Hill e-book dal titolo Analisi Matematica, Custom Publishing McGraw-Hill, Prof. Gianluca Gorni, M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli, ISBN: 9781308323664. Materiale attinente al corso è disponibile sul sito di e-Learning e alla pagina:
`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Analisi1`

Regolamento d'esame: Ci sono tre modi per ottenere i 12 crediti del corso: (a) due prove parziali scritte senza orale, (b) due prove parziali scritte più orale, (c) un singolo scritto globale più orale. Al termine dei due periodi didattici (semestri) si svolgono i 2 "compitini" (prove parziali), ognuno con punteggio dato in trentesimi. Il punteggio può superare 30, per esempio 33 o 37, anche se esse3 mostra un troncamento a trenta e lode. Chi prende meno di 12 in un compitino deve passare alla modalità scritto globale più orale.

Per chi supera tutti e due i compitini con voto di almeno 12, viene calcolata la media dei due punteggi (anche maggiori di 30), arrotondata per eccesso, e troncata infine al tetto massimo di 30; tale media, quando di almeno 18, verrà inserita come esito provvisorio su esse3 al primo appello orale estivo apposito.

A quel punto chi trova tale media su esse3 può segnalare, sempre su esse3, il suo consenso come voto definitivo (senza fare l'orale); in alternativa, può cliccare sul rifiuto del voto (oppure lasciarlo in sospeso) e presentarsi a sostenere un orale, in quello stesso appello orale o in uno successivo (previa iscrizione). L'orale ha come partenza il voto degli scritti e di solito lo migliora di qualche punto. La lode si può avere soltanto con l'orale. Chi non accetta né rifiuta il voto della media dei compitini se lo vedrà comunque registrato in automatico ad una certa scadenza che sarà indicata, comunque dopo la fine di settembre.

Il consenso o rifiuto del voto su esse3 è riservato ai soli voti ottenuti come medie dei due compitini. Per i voti degli scritti globali, dei compitini e degli orali effettivamente sostenuti non è previsto che lo studente dia il consenso o rifiuto su esse3.

Lo studente con media minore di 18 (ma almeno 12) nei due compitini non la troverà riportata su esse3. Può presentarsi all'orale con tale media come voto di partenza, oppure passare alla modalità scritto globale più orale. A chi consegna uno scritto globale vengono annullati i compitini e gli scritti globali precedenti (vale solo l'ultimo scritto consegnato).

La rimanente modalità di esame è uno scritto globale di tre ore più un orale. Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere in che appello dare l'orale, senza scadenza. Si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e vale l'ultimo scritto consegnato. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento.

Gli orali sono di sola teoria. Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco nell'ultima pagina. I compitini e gli scritti non hanno scadenza di validità ai fini di quando fare l'orale. Chi venga respinto all'esame orale deve rifare sia lo scritto che l'orale.

Programma Dettagliato

Insiemi numerici: insiemi numerabili e non numerabili. Numeri: naturali, interi, razionali. Gli allineamenti decimali finiti e infiniti. Allineamenti periodici. L'allineamento 0,101001000100001… non è periodico (con dimostrazione). La struttura generale di un enunciato (teorema, proposizione, lemma, corollario) e della sua dimostrazione. L'ipotesi e la tesi di un enunciato. Dimostrazioni per assurdo. Come generare altri numeri irrazionali. Fra due numeri reali distinti esiste sempre infiniti razionali e infiniti irrazionali. Algoritmi che generano un allineamento decimale. Esistenza di numeri non calcolabili (non generabili da alcun algoritmo), dimostrata col metodo diagonale. Richiami sull'equipotenza fra insiemi. Definizione di insieme numerabile. Dimostrazione che l'insieme dei numeri pari e l'insieme dei numeri razionali sono numerabili. Dimostrazione che l'insieme dei numeri reali non è numerabile, col metodo diagonale.

Operazioni, ordinamento, nozioni di logica, intervalli, disequazioni. Proprietà di base di somma e prodotto fra numeri (reali): commutativa, associativa, esistenza di zero e uno, esistenza di opposti e reciproci, proprietà distributiva. Proprietà di base dell'ordinamento fra numeri (reali): tricotomia, transitività. Legame fra l'ordinamento e la somma: invarianza dell'ordine tramite traslazioni e invarianza dell'ordine tramite omotetie a coefficiente positivo. Rassegna di altre regole utili di manipolazione delle disuguaglianze. Densità dell'ordinamento di $\mathbb{R}$. Nozioni di logica: proposizioni e predicati, connettivi logici, congiunzione e disgiunzione, negazione, implicazione, doppia implicazione. Catene di implicazioni. Trasformazioni reversibili e irreversibili di formule (uguaglianze o disuguaglianze). La proprietà di Archimede. La parte intera di un numero reale (floor e ceiling). Esercizi su numeri e logica. Insiemi di numeri e i vari modi di specificarli: elenco semplice o con puntini, $\{x \in \mathbb{R} \mid \text{predicato}(x)\}$, $\{\text{funzione}(x) \mid \text{predicato}(x)\}$. Gli intervalli limitati e illimitati, aperti, chiusi o semiaperti, degeneri, e le varie notazioni. La proprietà caratteristica degli intervalli: sono senza lacune, cioè ogniqualvolta due punti appartengono a un intervallo, ogni punto intermedio pure appartiene all'intervallo. Rappresentazione grafica degli intervalli e delle loro combinazioni. I vari modi di scrivere la soluzione di una equazione o disequazione. Il valore assoluto e le sue principali proprietà. La disuguaglianza triangolare. Disequazioni con valore assoluto. Disequazioni con valore assoluto. Il grafico del valore assoluto. Massimo e minimo fra due o più numeri, e come trattare simbolicamente e graficamente espressioni del tipo $\max\{x, y\}$ e $\min\{x, y\}$. Disequazioni con massimi e minimi. Come ricavare i grafici di $\max\{f(x), g(x)\}$ e $|f(x)|$ dai grafici di f e g. La funzione segno $\operatorname{sgn} x$ e la regola dei segni per il prodotto, non dimenticando che i segni sono tre: $+, 0, -$, e non solo due $+, -$. Lo studio del segno di una espressione: il caso di polinomi di primo e di secondo grado, con le convenzioni grafiche usate in questo corso. Lo studio del segno di un prodotto o rapporto di fattori e il relativo schema grafico. Disequazioni risolubili usando lo studio del segno, con relativi schemi grafici. Esercizi su studio del segno e disequazioni.

Funzioni elementari, funzioni inverse. Ripasso di definizioni e proprietà algebriche delle potenze nei vari casi a seconda della base e dell'esponente. Il caso "pericoloso" di base negativa ed esponente non intero. Distinzione fra potenza ed esponenziale, con i grafici qualitativi. Potenze, esponenziali e disuguaglianze: quando si può prendere la potenza o l'esponenziale di una disuguaglianza. Disequazioni irrazionali delle forme $\sqrt{A} \geq B$ e $\sqrt{A} \leq B$, e come si riconducono a sistemi senza radici quadrate. Esercizi sulle disequazioni irrazionali. Funzioni iniettive e suriettive, e funzione inversa. Le formule fondamentali $y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$, $f^{-1}(f(x)) = x$, $f(f^{-1}(x)) = x$, $(f^{-1})^{-1} = f$. Il caso di funzioni reali di variabile reale: come si riconosce se una linea nel piano cartesiano è il grafico di una funzione, e se questa è iniettiva (invertibile) o suriettiva. Come si costruisce il grafico di f^{-1} a partire dal grafico di f. Inverse delle potenze: x, $1/x$, x^2. Le formule notevoli $(\sqrt{x})^2 = x$, $\sqrt{x^2} = |x|$. La radice cubica come inversa del cubo. I logaritmi come inverse degli esponenziali. Rassegna delle formule notevoli che valgono per i logaritmi. Esercizi sulle disequazioni con logaritmi ed esponenziali. Ripasso sulle funzioni trigonometriche: definizioni, significato geometrico, valori notevoli, grafici, formule notevoli.

Predicati e induzione. Esempio introduttivo al principio di induzione: $2^n \geq n$. Enunciato del principio di induzione nella variante più semplice. Esempi: $2^n \geq 3n$, $2^n \geq 5n$, $2^n \geq n^2$, $n! \geq 2^n$. Esempi di dimostrazioni per induzione: *la disuguaglianza di Bernoulli* $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ *per* $x > -1$, $n \in \mathbb{N}$*; le identità dei numeri triangolari* $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ *e dei numeri piramidali* $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdot + n^2$. Dati n numeri positivi la cui somma è n, il loro prodotto è ≤ 1, dimostrato per induzione. Conseguenza: la media aritmetica di numeri positivi è sempre maggiore o uguale alla media geometrica. Variante del principio di induzione: se $(\mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$ per ogni $n \geq 0$, e $\mathcal{P}(0)$ e $\mathcal{P}(1)$ sono veri, allora $\mathcal{P}(n)$ è vero per ogni $n \geq 0$. La successione di Fibonacci F_n e dimostrazione per induzione delle disuguaglianze $F_n \leq 2^n$, $F_n \geq (3/2)^n$, $F_n \geq n$, $F_n \geq 2n$.

Insiemi numerici, massimi e minimi, estremi superiori e inferiori. Definizione di massimo, minimo, maggiorante e minorante di un insieme di numeri reali. Significato geometrico ed esempi. Insiemi limitati e illimitati, superiormente o inferiormente. Esempi di ricerca di massimi, minimi, maggioranti e minoranti: $]0, 1[$ e $\{1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Principio di completezza dell'insieme dei numeri reali. Definizione di estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme di numeri reali. Esercizi su massimi, minimi, estremi superiori ed inferiori. Esercizio sui sup e inf.

Limiti. Esempi introduttivi al concetto di limite. La definizione di limite in tre casi. La definizione di limite interpretata attraverso un gioco. Notazioni per i limiti. La condizione di sensatezza del limite sul dominio della funzione. Il teorema di unicità del limite, con dimostrazione. Limiti di base: costante, funzione identità, $1/x$. Esempi di limiti che non esistono: $(-1)^n$ per $n \to +\infty$, $\sin x$ per $x \to +\infty$, $\sin(1/x)$ per $x \to 0$. L'algebra dei limiti: sapendo i limiti di $f(x)$ e $g(x)$ trovare i limiti di $cf(x)$, $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$ (*dimostrazione per* $cf(x)$, $f(x) + g(x)$). Le forme indeterminate $+\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$. Le forme indeterminate $0/0$ e ∞/∞. Il teorema del confronto, o dei carabinieri (senza dimostrazione). Varianti con sole due funzioni. Esempi di uso del teorema del confronto. Disuguaglianze trigonometriche notevoli: $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$, $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$, $|\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta| \leq |\alpha - \beta|$. Per $x \to x_0$ finito si ha che $\operatorname{sen} x \to \operatorname{sen} x_0$ e $\cos x \to \cos x_0$. Definizione di funzione continua. Funzioni continue notevoli: seno, coseno, costante, identità. La disuguaglianza trigonometrica $|x| \leq |\tan x|$. Il limite fondamentale $(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ per $x \to 0$. Il limite notevole $\lim_{x\to 0}(1 - \cos x)/x^2 = 1/2$. Relazioni fra disuguaglianze sulle funzioni e disuguaglianze sui limiti: le disuguaglianze deboli sulle funzioni si trasmettono ai limiti, le disuguaglianze strette sulle funzioni si indeboliscono passando ai limiti, le disuguaglianze strette sui limiti risalgono alle funzioni, quelle deboli no. Il teorema del limite della funzione composta, o cambio di variabile nel limite (senza dimostrazione). Le funzioni continue "commutano" col limite: $\lim f(g(x)) = f(\lim g(x))$. Esempi di cambio di variabile nel limite. Regole di semplificazione nel calcolo dei limiti. Errori comuni nel calcolo dei limiti.

Monotonia e limiti. Il problema di stabilire se il limite esiste qualora non si riesca, con metodi noti, a calcolare quanto vale. Definizione di successioni debolmente/strettamente crescenti o decrescenti, o monotone. Significato geometrico. Teorema: le successioni monotone hanno sempre limite, finito o infinito, e tale limite coincide con l'estremo superiore nel caso crescente, e con l'estremo inferiore nel caso decrescente (dimostrazione nel caso crescente e limite finito). *La successione fondamentale* $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$. *Dimostrazione che* a_n *è debolmente crescente. La successione ausiliaria* $b_n := (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ *è decrescente (con dimostrazione). Le due successioni* a_n, b_n *tendono a un numero reale compreso fra 2 e 3*, chiamato numero di Nepero, e indicato con e. Logaritmo ed esponenziale in base e. Limiti conseguenza di quello fondamentale: $\lim_{x\to\pm\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$, $\lim_{x\to 0^\pm}(1 + x)^{1/x} = e$, il logaritmo in base e è il logaritmo di default, $\lim_{x\to 0}(\log(1 + x))/x = 1$, $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = 1$. Limiti di rapporti di infiniti esponenziali, polinomi e logaritmi: se $a > 1$ $\lim_{x\to+\infty} a^x/x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} a^x/(\textit{polinomio}) = \pm\infty$, $\lim_{x\to+\infty}(\textit{polinomio})/(\log x) = \pm\infty$, cioè gli esponenziali crescenti sono più grandi dei polinomi, che a loro volta sono più grandi dei logaritmi.

Limiti di successioni, ordini di infinito e notazione di Landau. Limiti contenenti il fattoriale e affini: $n!$, $n!/n$, $n!/n^2$, $n!$/polinomio, $n!/2^n$, $n!/3^n$, $n!$/esponenziale, n^n, $n^n/n!$, $\binom{2n}{n}$. La gerarchia degli infiniti campione grandi. Dato un infinito, ce ne sono sempre di più grandi. La gerarchia degli infiniti campione grandi, piccoli e intermedi. I simboli di Bachman-Landau: o piccolo, O grande, omega piccolo, omega grande, theta grande, tilde. Esercizi sulle approssimazioni asintotiche e "o piccolo".

Funzioni continue. Richiami sulla definizione di continuità in un punto e in tutto il dominio. Continuità delle funzioni elementari e delle loro combinazioni. Funzioni discontinue notevoli: segno e parte intera. Richiamo sugli intervalli: sono i sottinsiemi di $\mathbb{R}$ che non hanno "lacune". Passando al limite, le disuguaglianze deboli si conservano, mentre quelle forti si indeboliscono. Richiamo sull'esistenza del limite delle successioni monotone. Enunciato del teorema dell'esistenza degli zeri. Significato geometrico. *Dimostrazione del teorema dell'esistenza degli zeri, usando il metodo di bisezione.* Esempio di una funzione per la quale la procedura non termina in un numero finito di passi. Esempi sul teorema dell'esistenza degli zeri. L'immagine di un insieme tramite una funzione. Il teorema dei valori intermedi: se ho una una funzione f continua definita su un intervallo I, l'immagine $f(I)$ è ancora un intervallo. Definizione di funzioni monotone nelle quattro categorie: strettamente/debolmente crescenti/decrescenti. Significato geometrico. Richiami sulle funzioni iniettive. Relazioni fra continuità, stretta monotonia, iniettività e avere come dominio un intervallo (senza dimostrazione). L'inversa di una funzione monotona è monotona dello stesso tipo. Le funzioni trigonometriche inverse: arcoseno, arcocoseno, arcotangente. *Il teorema di Weierstraß sui massimi e minimi, dimostrato usando il metodo di bisezione.* Se lavorassimo sui razionali il teorema sarebbe falso. Le funzioni continue mandano intervalli in intervalli, e intervalli chiusi e limitati in intervalli chiusi e limitati. Richiami sulla definizione di massimo o minimo di un insieme di numeri reali. Valore massimo o minimo di una funzione a valori reali e modi di visualizzarli. Punti di massimo e minimo globali e locali e come individuarli su un grafico.

La derivata e il suo calcolo. Introduzione al concetto di derivata. Pendenza o coefficiente angolare di un segmento o di una retta. Rapporto incrementale di una funzione. Definizione di derivata di una funzione in un punto. Notazioni. Derivabilità di una funzione in un punto. Notazioni per la derivata. Calcolo della derivata delle funzioni elementari $x^2, x^3, e^x, \log x, \operatorname{sen} x, \cos x, 1/x, \sqrt{x}$. *Se una funzione è derivabile in un punto, allora è anche continua nel punto, ma non viceversa (con dimostrazione).* La funzione valore assoluto è continua nell'origine ma non è derivabile. *Il teorema dell'algebra delle derivate (dimostrazione per la somma, il prodotto e il reciproco).* Derivata di $\tan x$ e di x^n per $n \in \mathbb{Z}$. Derivata della funzione composta e della funzione inversa. Derivata delle funzioni trigonometriche inverse. Derivata di x^α nei vari casi a seconda di α. Derivata di $|x|, \log|x|, \sqrt[3]{x}$.

Funzioni derivabili e loro studio. Definizione di derivata destra e sinistra in un punto. Casistica dei valori di derivata destra e sinistra: punti angolosi, punti angolosi con un lato verticale, cuspidi con punta verso il basso o verso l'alto, flessi verticali. *Il teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno, la derivata, se c'è, è zero (con dimostrazione).* La derivata nulla non garantisce che il punto sia di massimo o minimo locale, perché può, per esempio, essere un punto di flesso orizzontale. Uso del teorema di Fermat per determinare estremi di una funzione. *Il teorema del valor medio di Rolle, con dimostrazione e significato geometrico. Il teorema del valor medio di Lagrange, con dimostrazione e significato geometrico.* Il teorema del valor medio di Cauchy, senza dimostrazione, con cenno di significato geometrico. Conseguenze dei teoremi del valor medio. Il teorema della derivata nulla. La relazione fra monotonia e segno della derivata. *Il teorema de L'Hôpital (dimostrazione nel caso $0/0$ e x_0 finito).* Note generali sull'uso della regola del L'Hôpital. La derivata seconda, terza e successive, con le relative notazioni. Il significato geometrico del segno della derivata seconda. Definizione di funzione convessa o concava in termini della posizione del grafico rispetto alle rette tangenti. Il teorema sulla relazione fra la convessità/concavità e il segno della derivata seconda, con dimostrazione. Rette asintotiche al grafico di una funzione: definizione geometrica e criterio algebrico per trovarle. Esempi di studio di funzione.

Polinomi di Taylor. Richiami sulla simbolo "o piccolo" di Bachmann-Landau nel caso $x \to x_0$ finito e gli infinitesimi campione $(x-x_0)^n$. Le formule e i polinomi di Taylor di ordine 0, 1, 2, n di una funzione generica in un punto generico x_0 e resto di Peano. Il caso speciale dei polinomi di MacLaurin. I polinomi di MacLaurin dell'esponenziale e del seno. I polinomi di MacLaurin di $\log(1+x)$ e $1/(1-x)$. Il polinomio di Taylor di ordine n è l'unico con la proprietà che $f(x) = \text{polinomio} + o(x-x_0)^n$. La formula di Taylor col resto di Lagrange (dimostrata per $n = 0$ e $n = 1$). *Dimostrazione che il numero di Nepero e è irrazionale.* Confronto grafico fra la funzione e i suoi polinomi di Taylor all'aumentare del grado, per varie funzioni fra cui esponenziale, seno, coseno.

Area, integrali e primitive. Introduzione all'integrale: il problema dell'area delle figure curvilinee, trapezoidi, suddivisioni marcate, plurirettangoli, somme di Riemann. Le somme di Riemann si stabilizzano all'infittirsi della suddivisione: evidenze numeriche. Definizione di ampiezza di una suddivisione. Definizione di integrale di una funzione secondo Riemann. La notazione dell'integrale. Cenno a definizioni alternative. Il teorema fondamentale del calcolo (senza dimostrazione). Esempi di uso del teorema fondamentale per trovare aree di trapezoidi. Definizione di primitiva (integrale indefinito, antiderivata) di una funzione. Teorema: ogni funzione continua su un intervallo ha primitiva (senza dimostrazione). Le primitive non sono mai uniche: aggiungendo una costante a una primitiva se ne ottiene un'altra. Su un intervallo due primitive di una data funzione differiscono sempre per una costante (con dimostrazione). Il problema di trovare primitive elementari di una funzione elementare non sempre ha soluzione. Elenco di funzioni elementari che non hanno primitiva elementare. Cenno all'algoritmo di Risch. Regole elementari di integrazione. Integrali immediati e “quasi immediati”. Integrazione per parti. Esempio di integrazione per parte due volte. Integrazione per sostituzione, o cambio di variabile. Esempi. Integrazione delle funzioni razionali: abbassamento del grado del numeratore, decomposizione in fratti semplici, integrazione di fratti semplici con denominatore di grado due. Esempi.

I teoremi di cui si chiede la dimostrazione all’orale

Oltre alla **dimostrazione** dei teoremi seguenti, lo studente dovrà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti che sono stati introdotti nel corso, e di saper illustrare definizioni e teoremi con **esempi**, qualora ce ne siano di semplici.

1. Le formule per le somme $1+2+3+\cdots+n$ e $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ e la disuguaglianza di Bernoulli, con dimostrazioni per induzione.
2. Il teorema del limite della somma di due funzioni aventi limiti finiti.
3. La successione fondamentale $(1+1/n)^n$: dimostrazione che è crescente, che la successione ausiliaria $(1+1/n)^{n+1}$ è decrescente, e che hanno entrambe limite finito, coincidente
4. Teorema dell’esistenza degli zeri.
5. Il teorema di Weierstraß sui massimi e minimi (dimostrazione col metodo di bisezione).
6. Le funzioni derivabili sono continue. Esempio di funzione continua ma non derivabile.
7. Derivata del prodotto per costante, della somma, del prodotto, del reciproco di funzioni derivabili.
8. Teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno una funzione derivabile ha derivata nulla.
9. Teorema di Rolle, con significato geometrico.
10. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.
11. Regola de l’Hôpital: enunciato generale, dimostrazione nel caso $0/0$ in un punto finito con limite finito.
12. Dimostrazione che il numero di Nepero e è irrazionale, usando la formula di Taylor col resto di Lagrange.