Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche
Corsi di Laurea Triennale in Informatica e in TWM

Analisi Matematica

Prof. Gianluca Gorni

McGraw-Hill e-book dal titolo Analisi Matematica, Custom Publishing McGraw-Hill, Prof. Gianluca Gorni, M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli, ISBN: 9781308323664. L'edizione cartacea 2013-14 del libro, con qualche materiale in meno, dovrebbe essere ancora disponibile presso la Libreria Moderna Udinese, via Cavour 13, Udine. Materiale attinente al corso è disponibile sul sito di e-Learning e alla pagina:

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Analisi1`

Regolamento d'esame: Ci sono tre modi per ottenere i 12 crediti del corso: (a) due prove parziali scritte senza orale, (b) due prove parziali scritte più orale, (c) un singolo scritto globale più orale. Al termine dei due periodi didattici (semestri) si svolgono i 2 "compitini" (prove parziali), ognuno con punteggio dato in trentesimi. Il punteggio può superare 30, per esempio 33 o 37, anche se esse3 mostra un troncamento a trenta e lode. Chi prende meno di 12 in un compitino deve passare alla modalità scritto globale più orale.

Per chi supera tutti e due i compitini con voto di almeno 12, viene calcolata la media dei due punteggi (anche maggiori di 30), arrotondata per eccesso, e troncata infine al tetto massimo di 30; tale media, quando di almeno 18, verrà inserita come esito provvisorio su esse3 al primo appello orale estivo apposito.

A quel punto chi trova tale media su esse3 può segnalare, sempre su esse3, il suo consenso come voto definitivo (senza fare l'orale); in alternativa, può cliccare sul rifiuto del voto (oppure lasciarlo in sospeso) e presentarsi a sostenere un orale, in quello stesso appello orale o in uno successivo (previa iscrizione). L'orale ha come partenza il voto degli scritti e di solito lo migliora di qualche punto. La lode si può avere soltanto con l'orale. Chi non accetta né rifiuta il voto della media dei compitini se lo vedrà comunque registrato in automatico ad una certa scadenza che sarà indicata, comunque dopo la fine di settembre.

Il consenso o rifiuto del voto su esse3 è riservato ai soli voti ottenuti come medie dei due compitini. Per i voti degli scritti globali, dei compitini e degli orali effettivamente sostenuti non è previsto che lo studente dia il consenso o rifiuto su esse3.

Lo studente con media minore di 18 (ma almeno 12) nei due compitini non la troverà riportata su esse3. Può presentarsi all'orale con tale media come voto di partenza, oppure passare alla modalità scritto globale più orale. A chi consegna uno scritto globale vengono annullati i compitini e gli scritti globali precedenti (vale solo l'ultimo scritto consegnato).

La rimanente modalità di esame è uno scritto globale di tre ore più un orale. Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere in che appello dare l'orale, senza scadenza. Si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e vale l'ultimo scritto consegnato. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento.

Gli orali sono di sola teoria. Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco nell'ultima pagina. I compitini e gli scritti non hanno scadenza di validità ai fini di quando fare l'orale. Chi venga respinto all'esame orale deve rifare sia lo scritto che l'orale.

Programma Dettagliato

Insiemi numerici: operazioni, ordinamento, disequazioni. I vari tipi di numeri: naturali, interi relativi, razionali, reali. Allineamenti decimali infiniti. L'allineamento 0,101001000100001... non è periodico (con dimostrazione). La struttura generale di un enunciato (teorema, proposizione, lemma, corollario) e della sua dimostrazione. Gli algoritmi che generano le cifre di un numero reale. Teorema: esistono numeri reali le cui cifre non sono generabili da alcun algoritmo (dimostrazione usando il metodo diagonale di Cantor). Esercizi sui numeri decimali infiniti (periodici e non). Densità di un insieme e densità di un insieme in un altro. Struttura degli enunciati matematici: teoremi e definizioni. Richiami sulle funzioni biiettive. Definizione di insieme numerabile. Dimostrazione che $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono numerabili. Dimostrazione che $\mathbb{R}$ non è numerabile. Gli insiemi numerici principali confrontati per la loro numerosità. Proprietà di base delle operazioni fra numeri e dell'ordinamento. Proprietà di base dell'ordinamento. Manipolazione delle disuguaglianze. Elementi di logica: distinzione fra formule a valore numerico e a valore logico (vero/falso). Connettivi logici: congiunzione e disgiunzione. I connettivi logici congiunzione e disgiunzione. L'implicazione e la doppia implicazione. Trasformazioni di formule reversibili e irreversibili. Trasformazioni di uguaglianze e disuguaglianze. Densità dei numeri reali. La proprietà di Archimede. La radice quadrata di 2 è irrazionale. Gli intervalli limitati e le loro notazioni. Intervalli illimitati e degeneri. Rappresentazione grafica degli intervalli, e suo uso per fare operazioni di unione e intersezione. Insiemi di numeri e i vari modi di definirli: elenco semplice o con puntini, $\{x \in \mathbb{R} \mid \text{predicato}(x)\}$, $\{\text{funzione}(x) \mid \text{predicato}(x)\}$. Il valore assoluto e le sue principali proprietà. Come si impostano le disequazioni con valori assoluti. Massimo e minimo di un insieme finito di numeri. Il caso simbolico $\max\{x, y\}$ e $\min\{x, y\}$. Disequazioni con max e min. Esempi. Lo studio del segno di un'espressione algebrica e il suo schema grafico. Il caso di un'espressione di primo grado. Studio del segno di una funzione di cui sia noto il grafico. Studio del segno di un'espressione di secondo grado. La regola dei segni. Studio del segno di un prodotto o un quoziente. Schemi risolutivi per le disequazioni e loro convenzioni grafiche. Disequazioni che si riconducono a uno studio di segno.

Funzioni elementari. Definizione delle potenze nei vari casi: base qualsiasi ed esponente intero positivo, base non nulla ed esponente intero relativo, base positiva ed esponente qualsiasi. I casi problematici 0^0 e di base negativa ed esponente non intero. Distinzione fra potenze ed esponenziali. Regole di calcolo per potenze ed esponenziali. I grafici delle principali potenze ed esponenziali. Quando si può elevare al quadrato una disuguaglianza. Disequazioni irrazionali delle forme $\sqrt{A} \geq B$ e $\sqrt{A} \leq B$ e come si elimina la radice. Funzioni iniettive e funzioni inverse nel senso insiemistico astratto. Le formule fondamentali $f^{-1}(f(x)) \equiv x$ e $f(f^{-1}(x)) \equiv x$. Come si riconosce l'iniettività di una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se è noto il suo grafico. Dato il grafico di una funzione, come si trova il grafico dell'inversa. Come si trova la formula della funzione inversa. Coppie di inverse notevoli: quadrato e radice quadrata, cubo e radice cubica, reciproco con se stesso, esponenziale e logaritmo. Riassunto delle proprietà del logaritmo. Come si comportano logaritmi ed esponenziali con le disuguaglianze. Esercizi su esponenziali e logaritmi. Ripasso delle funzioni trigonometriche dirette e inverse.

Predicati e induzione. Il principio di induzione. Esempi: $2^n \geq n$, $2^n \geq 3n$, $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$, $1^2+2^2+\cdots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, *la disuguaglianza di Bernoulli.* Dati n numeri ≥ 0 la cui somma è n, il loro prodotto è ≤ 1, dimostrato per induzione. I numeri di Fibonacci e loro proprietà dimostrate per induzione. Esercizi sull'induzione. La formula per la somma di una progressione geometrica. La disuguaglianza fra la media geometrica e la media aritmetica di numeri positivi.

Insiemi numerici, massimi e minimi, estremi superiori e inferiori. Come si specifica un insieme di numeri: con un elenco completo, con un elenco abbreviato con puntini, con un test di appartenenza, con una funzione di cui si prendono tutti i possibili valori. Notazione e visualizzazione di insiemi immagine di una funzione. Massimo e minimo, maggioranti e minoranti di un insieme finito o infinito di numeri reali. Insiemi limitati o illimitati superiormente o inferiormente. Esempi. Maggioranti e minoranti non migliorabili. La situazione fra i numeri razionali. Il principio di completezza dell'insieme dei numeri reali. Estremo superiore e inferiore di un insieme di numeri reali. Esempio: $A = \{n/(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Limiti. Esempi introduttivi al concetto di limite. Gli elementi costitutivi della definizione di limite: $x, x_0, f(x), L, \delta, N, \varepsilon, M$. La definizione di limite coi quantificatori, nei vari casi per x_0 ed L. La condizione di sensatezza del limite: il dominio di f contenga un intervallo che abbia x_0 come estremo. Il teorema dell'unicità del limite, con dimostrazione. *Il teorema della somma dei limiti, con dimostrazione.* Il teorema del prodotto dei limiti, con dimostrazione. Il teorema del limite del rapporto, senza dimostrazione. Casi determinati e indeterminati nella somma, prodotto e quoziente. Forme determinate e indeterminate per somma, prodotto e quoziente. Funzioni continue: definizione ed esempi principali. Esempi di funzioni che non hanno limite. Il teorema del confronto, o dei carabinieri (senza dimostrazione). Esempi. Le disuguaglianze notevoli $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ e $|x| \leq |\tan x|$ (con dimostrazione). Il limite fondamentale $(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ per $x \to 0$ (con dimostrazione). Il limite notevole $(1 - \cos x)/x^2 \to 1/2$ per $x \to 0$. Il teorema del limite della funzione composta, ovvero il cambio di variabile nel limite (senza dimostrazione). Esempi.

Monotonia e limiti. Funzioni monotone (strettamente o debolmente crescenti o decrescenti): definizione algebrica e significato geometrico. Esistenza dei limiti unilaterali delle funzioni monotone (senza dimostrazione). Monotonia delle successioni. Il teorema del limite delle successioni monotone: dimostrazione nel caso crescente ed estremo superiore finito. *La successione fondamentale $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$: dimostrazione che è (debolmente) crescente. La successione ausiliaria $b_n := (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$: dimostrazione che è (debolmente) crescente. Dimostrazione che a_n ha limite finito compreso fra 2 e 3.* Il numero di Nepero $e = \lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n})^n \approx 2{,}718$. Logaritmi ed esponenziali in base e e loro simboli. I limiti notevoli $(1 + 1/x)^x \to e$ per $x \to \pm\infty$, $(1 + t)^{1/t} \to e$ per $t \to 0$, $(\log(1 + x))/x \to 1$ e $(e^x - 1)/x \to 1$ per $x \to 0$. Relazioni fra limiti e disuguaglianze: se $f(x) \leq g(x)$ per ogni x e $f(x) \to \ell_1$, $g(x) \to \ell_2$ allora $\ell_1 \leq \ell_2$. Un errore frequente ("pseudoregola") nel calcolo di limiti: individuata una sottoespressione di cui si conosce il limite, sostituire alla sottoespressione il valore del limite. Esercizi.

Limiti di successioni, ordini di infinito e notazione di Landau. Limiti contenenti il fattoriale e affini: $n!$, $n!/n$, $n!/n^2$, $n!$/polinomio, $n!/2^n$, $n!/3^n$, $n!$/esponenziale, n^n, $n^n/n!$, $\binom{2n}{n}$. La gerarchia degli infiniti e infinitesimi per $n \to +\infty$: logaritmi, radici, polinomi, esponenziali, fattoriali, loro reciproci, e infiniti e infinitesimi intermedi. I simboli di Bachmann-Landau: $o, O, \Omega, \omega, \Theta, \sim$ e il loro uso.

Funzioni continue. Richiami sulla definizione di continuità in un punto e in tutto il dominio. Continuità delle funzioni elementari e delle loro combinazioni. Funzioni discontinue notevoli: segno e parte intera. Richiamo sugli intervalli: sono i sottinsiemi di $\mathbb{R}$ che non hanno "lacune". Passando al limite si conservano le disuguaglianze deboli, mentre quelle forti si indeboliscono. Richiamo sull'esistenza del limite delle successioni monotone. *Il teorema dell'esistenza degli zeri. Dimostrazione del teorema dell'esistenza degli zeri per bisezione.* Significato geometrico. Esempi di uso incauto del teorema. Esempio in cui il procedimento non termina in un numero finito di passi. Il teorema dei valori intermedi. Equazioni che si possono ricondurre al teorema dell'esistenza degli zeri. *Il teorema di Weierstraß: una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato ha sempre un valore massimo e uno minimo (dimostrazione per bisezione).* Richiami sui concetti di monotonia e di invertibilità. Il teorema che lega continuità, stretta monotonia, invertibilità e mappare intervalli in intervalli (senza dimostrazione). Esempi.

La derivata e il suo calcolo. Definizione di derivata di una funzione in un punto. Derivabilità di una funzione in un punto. Notazioni per la derivata. Calcolo della derivata di $x^2, e^x, \log x$. Rapporto incrementale di una funzione. La formula della retta tangente al grafico di una funzione in un punto. Calcolo della derivata di $\sqrt{x}, x^3, |x|, \operatorname{sen} x, \cos x$. *Se una funzione è derivabile in un punto, allora è anche continua nel punto, ma non viceversa (con dimostrazione). Il teorema dell'algebra dei limiti (dimostrazione per la somma e il prodotto).* Derivata della funzione composta e della funzione inversa. Derivata delle funzioni trigonometriche inverse. Derivata di x^α nei vari casi a seconda di α. Derivata di $\log|x|$, $\sqrt[3]{x}$. Esercizi di calcolo delle derivate.

Funzioni derivabili e loro studio. Definizione di derivata destra e sinistra in un punto. Casistica dei valori di derivata destra e sinistra: punti angolosi, punti angolosi con un lato verticale, cuspidi con punta verso il basso o verso l'alto, flessi verticali. Definizione di punto di massimo o minimo globale o locale per una funzione. Definizione di punto interno a un insieme. *Il teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno, la derivata, se c'è, è zero (con dimostrazione). Il teorema di Rolle, con dimostrazione e significato geometrico. Il teorema del valor medio di Lagrange, con dimostrazione e significato geometrico.* Interpretazione dinamica dei teoremi di Rolle e Lagrange. Il teorema del valor medio di Cauchy (senza dimostrazione). Il teorema della derivata nulla (con dimostrazione). Il teorema delle relazioni fra monotonia e segno della derivata (con dimostrazione). Esempio di studio della crescenza/decrescenza di una funzione dedotto dallo studio del segno della derivata. *Il teorema de L'Hôpital (dimostrazione nel caso 0/0 in un punto finito).* Esempi di calcolo di limiti con la regola de L'Hôpital. La derivata seconda, terza e successive, con le relative notazioni. Il significato geometrico del segno della derivata seconda. Definizione di funzione convessa o concava in termini della posizione del grafico rispetto alle rette tangenti. Il teorema sulla relazione fra la convessità/concavità e il segno della derivata seconda, con dimostrazione. Asintoti obliqui del grafico di una funzione. Esercizi sullo studio di funzione.

Area, integrali e primitive. Introduzione all'integrale. Il problema dell'area di regioni curvilinee. Trapezoidi e plurirettangoli. Suddivisioni marcate e somme di Riemann. L'ampiezza di una suddivisione. La definizione dell'integrale secondo Riemann come limite delle somme di Riemann. La notazione dell'integrale. Il teorema fondamentale del calcolo (senza dimostrazione). Esempi dell'uso del teorema fondamentale per il calcolo di aree. Il problema delle primitive. Definizione di primitiva di una funzione data. Le primitive non sono mai uniche. Su un intervallo due qualunque primitive differiscono sempre per una costante. Integrale indefinito e sua notazione di Leibniz. Linearità dell'integrale. Cenno all'algoritmo di Risch e agli integrali non elementari.

Esistenza (in astratto) di primitive delle funzioni continue (senza dimostrazione). Integrali immediati e "quasi" immediati: x^n, $1/x$, e^x, $\operatorname{sen} x, \cos x, 1/\sqrt{1-x^2}, 1/(1+x^2)$. Integrazione per parti. Esempi: $\int \log x \, dx$, $\int xe^x \, dx$, $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$. Integrazione per sostituzione, o cambio di variabile. Esempi. Integrazione di funzioni razionali: riduzione del grado del numeratore tramite la divisione dei polinomi, il caso in cui il denominatore ha grado 2 con determinante positivo o nullo. Il caso in cui il denominatore ha grado 2 con determinante negativo. Metodi per il caso generale quando si riesce a scomporre in fattori il denominatore: decomposizione in somma di fratti con denominatori senza radici in comune, il caso di denominatori del tipo $(x-x_0)^n$ o del tipo $(ax^2+bx+c)^n$ con determinante negativo.

Polinomi di Taylor. Il problema generale di approssimare una funzione con dei polinomi. Gli infinitesimi campione x^n e la richiesta che la differenza fra la funzione e il polinomio approssimante sia più piccola di x^n per $x \to 0$. I casi dei gradi $n = 0, 1, 2$. Il teorema di Maclaurin e i polinomi di Maclaurin, con dimostrazione per i gradi fino al 2. Generalizzazione: il teorema di Taylor e i polinomi di Taylor (enunciato). Polinomi di Maclaurin notevoli: esponenziale, seno, coseno, $\log(1+x)$, $1/(1-x)$. Riscrittura del teorema di Taylor usando la notazione degli "o piccoli" di Bachmann-Landau. Resto di Taylor nella forma di Peano. Il resto di Taylor nella forma di Lagrange: dimostrazione per $n = 0$ e $n = 1$. Approssimazione numerica del numero di Nepero con polinomi di Taylor. Dimostrazione che il numero di Nepero è irrazionale.

I teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale

Oltre alla **dimostrazione** dei teoremi seguenti, lo studente dovrà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti che sono stati introdotti nel corso, e di saper illustrare definizioni e teoremi con **esempi**, qualora ce ne siano di semplici.

1. Le formule per le somme $1+2+3+\cdots+n$ e $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ e la disuguaglianza di Bernoulli, con dimostrazioni per induzione.
2. Il teorema del limite della somma di due funzioni aventi limiti finiti.
3. La successione fondamentale $(1+1/n)^n$: dimostrazione che è crescente, che la successione ausiliaria $(1+1/n)^{n+1}$ è decrescente, e che hanno entrambe limite finito, coincidente
4. Teorema dell'esistenza degli zeri.
5. Il teorema di Weierstraß sui massimi e minimi (dimostrazione col metodo di bisezione).
6. Le funzioni derivabili sono continue. Esempio di funzione continua ma non derivabile.
7. Derivata del prodotto per costante, della somma, del prodotto, del reciproco e del quoziente di funzioni derivabili.
8. Teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno una funzione derivabile ha derivata nulla.
9. Teorema di Rolle, con significato geometrico.
10. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.
11. Regola de l'Hôpital: enunciato generale, dimostrazione nel caso $0/0$ in un punto finito con limite finito.