Dipartimento di Matematica e Informatica
Corsi di Laurea Triennale in Informatica e in TWM

Analisi Matematica

Prof. Gianluca Gorni

McGraw-Hill e-book dal titolo Analisi Matematica, Custom Publishing McGraw-Hill, Prof. Gianluca Gorni, M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli, ISBN: 9781308323664. L'edizione cartacea 2013-14 del libro, con qualche materiale in meno, dovrebbe essere ancora disponibile presso la Libreria Moderna Udinese, via Cavour13, Udine. Abbondante materiale attinente al corso è disponibile alla pagina:

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Analisi1`

Regolamento d'esame: Ci sono tre modi per ottenere i 12 crediti del corso: (a) due prove parziali scritte senza orale, (b) due prove parziali scritte più orale, (c) un singolo scritto globale più orale. Al termine dei due periodi didattici (semestri) si svolgono i 2 "compitini" (prove parziali), ognuno con punteggio dato in trentesimi. Il punteggio può superare 30, per esempio 33 o 37, anche se esse3 mostra un troncamento a trenta e lode. Chi prende meno di 12 in un compitino deve passare alla modalità scritto globale più orale.

Per chi supera tutti e due i compitini con voto di almeno12, viene calcolata la media dei due punteggi (anche maggiori di30), arrotondata per eccesso, e troncata infine al tetto massimo di30; tale media, quando di almeno18, verrà inserita come esito provvisorio su esse3 al primo appello orale estivo.

A quel punto chi trova tale media su esse3 può segnalare, sempre su esse3, il suo consenso come voto definitivo (senza fare l'orale); in alternativa, può cliccare sul rifiuto del voto (oppure lasciarlo in sospeso) e presentarsi a sostenere un orale, in quello stesso appello orale o in uno successivo (previa iscrizione). L'orale ha come partenza il voto degli scritti e di solito lo migliora di qualche punto. La lode si può avere soltanto con l'orale. Chi non accetta né rifiuta il voto della media dei compitini se lo vedrà comunque registrato in automatico ad una certa scadenza che sarà indicata, comunque dopo la fine di settembre.

Il consenso o rifiuto del voto su esse3 è riservato ai soli voti ottenuti come medie dei due compitini. Per i voti degli scritti globali, dei compitini e degli orali effettivamente sostenuti non è previsto che lo studente dia il consenso o rifiuto su esse3.

Lo studente con media minore di18 (ma almeno 12) nei due compitini non la troverà riportata su esse3. Può presentarsi all'orale con tale media come voto di partenza, oppure passare alla modalità scritto globale più orale. Se consegna lo scritto globale i compitini vengono annullati.

La rimanente modalità di esame è uno scritto globale di tre ore più un orale. Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere in che appello dare l'orale, senza scadenza. Si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e vale l'ultimo scritto consegnato. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento.

Gli orali sono di sola teoria. Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco nell'ultima pagina. I compitini e gli scritti non hanno scadenza di validità ai fini di quando fare l'orale.

Programma Dettagliato

Insiemi numerici: operazioni, ordinamento, disequazioni. I vari tipi di numeri: naturali, interi relativi, razionali, reali. Espressioni a valore numerico ed espressioni a valore logico (vero/falso). Implicazioni. Quantificatori universale ed esistenziale. Uguaglianza fra numeri. Proprietà algebriche di somma e prodotto. Regole di calcolo. Proprietà di base dell'ordinamento dei numeri reali: proprietà transitiva, tricotomia, a una disuguaglianza si può sommare membro a membro un numero qualsiasi, e si può moltiplicare membro a membro per un numero positivo. Regole di manipolazione delle disuguaglianze: Manipolazioni reversibili (doppie implicazioni, equivalenze logiche) e non reversibili (implicazioni semplici). L'ordinamento dei numeri reali è denso: fra due numeri reali ce ne sono sempre infiniti altri. Principio di Archimede, in varie formulazioni. Intervalli di numeri reali, loro classificazione e notazioni. Definizione di valore assoluto di un numero reale. Proprietà principali del valore assoluto. Come si risolve una disequazione con valori assoluti. Massimo e minimo fra due numeri reali. Disequazioni con massimo e minimo. Lo studio del segno di un polinomio di primo o secondo grado. Lo studio del segno di un'espressione usando la regola dei segni: convenzioni grafiche. Disequazioni razionali.

Funzioni elementari. Definizione di potenze a esponente intero, con i problemi riguardo al senso di 0^0. Potenze a esponente razionale. Distinzione fra radici algebriche e aritmetiche. La formula $\sqrt{x^2} = |x|$. Potenze a esponente razionale. Radice cubica di numeri negativi. Regole di calcolo con le potenze/esponenziali. Quando si può e quando non si può elevare al quadrato una uguaglianza o una disuguaglianza. Come si risolvono le disequazioni irrazionali delle forme $\sqrt{A}/geB$ e $\sqrt{A} \leq B$. I grafici delle potenze $x^1, x^2, x^3 \ldots$. Generalità sulle funzioni inverse: aspetto insiemistico, aspetto algebrico (identità fondamentali $f(f^{-1}(x)) = x$, $f^{-1}(f(x)) = x$, $(f^{-1})^{-1} = f$)), aspetto grafico (i grafici di f e di f^{-1} sono simmetrici rispetto alla diagonale). Le radici come inverse delle potenze e loro grafici. Esponenziali e loro grafici. Logaritmi come funzioni inverse degli esponenziali. Le regole di calcolo con i logaritmi. Esercizi su logaritmi ed esponenziali. Ripasso sulle funzioni trigonometriche: definizione, valori notevoli, formule principali, grafici, invertibilità parziale e funzioni inverse.

Predicati e induzione. Uso dei punti di sospensione "..." e del simbolo di sommatoria. Espressioni a valori numerici ed espressioni a valori vero/falso. Espressioni a valori vero/falso dipendenti da un parametro intero. Come dimostrare che un'espressione è vera per ogni valore intero del parametro: metodo diretto e metodo per induzione. Il principio di induzione nelle sue forme più semplici. Esempi: *la formula per la somma* $1+2+3+\cdots+n$, *la formula per la somma* $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$, la disuguaglianza di Bernoulli. I numeri di Fibonacci, con relative dimostrazioni per induzione. Dimostrazione per induzione che se ho n numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ la cui somma è n, allora il loro prodotto è ≤ 1. Applicazione: la media geometrica di numeri ≥ 0 è sempre $\leq$ della media aritmetica. La formula $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = (1 - x^{n+1})/(1 - x)$, dimostrata per induzione e direttamente. Varianti del principio di induzione.

Insiemi numerici, massimi e minimi, estremi superiori e inferiori. Come si specifica un insieme di numeri: con un elenco completo, con un elenco abbreviato con puntini, con un test di appartenenza, con una funzione di cui si prendono tutti i possibili valori. Notazione e visualizzazione di insiemi immagine di una funzione. Massimo e minimo di un insieme finito e di un insieme infinito di numeri reali. Maggioranti e minoranti di un insieme di numeri reali. Esempio: $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Esempi di calcolo di maggioranti e minoranti di vari insiemi. Gli insiemi dei maggioranti e dei minoranti sono sempre o vuoti oppure semirette con estremo compreso. Il principio di completezza dell'insieme dei numeri reali. Estremo superiore e inferiore di un insieme di numeri reali. Esempi. Esempi di calcoli di massimo, minimo, estremo superiore e inferiore.

Limiti. Esempi introduttivi al concetto di limite. La definizione di limite di successione e di funzione reale. Casistica delle definizione di limite: casi finito bilaterale, infinito, finito unilaterale con le varie combinazioni. Definizione di continuità. Le "condizioni di sensatezza del limite" riguardo al dominio della funzione. Il teorema dell'unicità del limite (dimostrazione nel caso finito). *Il teorema dell'algebra dei limiti* (somma, prodotto, quoziente) di due funzioni nel caso di limiti finiti (*dimostrazione per la somma*). Limiti di base: costante, x, $1/x$, esponenziale, logaritmo, seno, coseno, tangente. Limite di somma e prodotto nei casi non finiti e forme indeterminate $+\infty - \infty$ e $0 \cdot \infty$. Limite del rapporto nei casi non finiti e forme indeterminate $0/0$ e $\infty/infty$. Il teorema del confronto, o dei carabinieri. Esempi. Le disuguaglianze notevoli $|\operatorname{sen} x| \le |x|$ per $x \in \mathbb{R}$ e $|x| \le |\tan x|$ se $-\pi/2 < x < \pi/2$ (con dimostrazione). Il limite fondamentale $(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ per $x \to 0$ (con dimostrazione). Il limite notevole $(1 - \cos x)/x^2 \to 1/2$ per $x \to 0$. Esempi. Il limite della funzione composta (solo enunciato), ovvero il cambio di variabile nel calcolo dei limiti. Esempi. I limiti notevoli dei rapporti fra esponenziali e polinomi, e fra logaritmi e polinomi (senza dimostrazione).

Monotonia e limiti. Definizione di funzioni monotone (strettamente o debolmente crescenti o decrescenti), con interpretazione grafica. Il teorema dell'esistenza dei limiti unilaterali delle funzioni monotone. Caso particolare: se $a_n \le a_{n+1}$ per ogni n, allora esiste (finito o infinito) il $\lim_{n\to+\infty} a_n$ (con dimostrazione). Analogamente, se a_n è decrescente, allora ammette limite (finito o $-\infty$). *La successione fondamentale $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$: dimostrazione che è debolmente crescente. Dimostrazione che la successione ausiliaria $b_n := (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ è decrescente. Conclusione: $(1+\frac{1}{n})^n$ ha limite finito*, che è chiamato numero di Nepero e indicato col simbolo e. Generalità su e. Logaritmi ed esponenziali in base e. I limiti notevoli $(1 + 1/x)^x \to e$ per $x \to \pm\infty$, $(1 + t)^{1/t} \to e$ per $t \to 0$, $(\log(1 + x))/x \to 1$ e $(e^x - 1)/x \to 1$ per $x \to 0$. Relazioni fra limiti e disuguaglianze: se $f(x) \le g(x)$ per ogni x e $f(x) \to \ell_1$, $g(x) \to \ell_2$ allora $\ell_1 \le \ell_2$. Un errore frequente nel calcolo di limiti: individuata una sottoespressione di cui si conosce il limite, sostituire alla sottoespressione il valore del limite. Esercizi. Esercizi sui limiti. La regola $\lim f(x)^{g(x)} = \lim \exp(g(x)(f(x) - 1))$ se $f(x) \to 1$.

Limiti di successioni, ordini di infinito e notazione di Landau. Limiti contenenti il fattoriale e affini: $n!$, $n!/n$, $n!/n^2$, $n!$/polinomio, $n!/2^n$, $n!/3^n$, $n!$/esponenziale, n^n, $n^n/n!$, $2nn$. La gerarchia degli infiniti e infinitesimi per $n \to +\infty$: logaritmi, radici, polinomi, esponenziali, fattoriali, loro reciproci, e infiniti e infinitesimi intermedi. I simboli di Bachmann-Landau: $o, O, \Omega, \omega, \Theta, \tilde{}$ e il loro uso.

Funzioni continue. Richiami sulla definizione e principali proprietà delle funzioni continue. Le disuguaglianze deboli si mantengono passando al limite. *Il teorema dell'esistenza degli zeri, con dimostrazione.* Esempi e contresempi del teorema dell'esistenza degli zeri. Il teorema dei valori intermedi, con dimostrazione. L'insieme dei valori assunti della funzione dal punto di vista insiemistico e nell'ambito di funzioni dai reali nei reali. Gli intervalli sono gli insiemi di numeri reali "senza lacune". Le funzioni continue mandano intervalli in intervalli. *Il teorema di Weierstrass sui massimi e minimi, con dimostrazione per bisezione.* Se ambientato sui razionali, il teorema di Weierstrass non è vero. Esempi di esistenza o non esistenza di valori massimi e minimi di funzioni. Il teorema sulla relazione fra continuità, invertibilità e immagine intervallo per funzioni definite su un intervallo (senza dimostrazione). Esempi.

La derivata. Introduzione alla derivata usando il concetto di ingrandimento, o zoom, del grafico di una funzione. Casistica. Richiami sulla pendenza di un segmento e di una retta. Il rapporto incrementale e il suo limite, con significato geometrico. Calcolo del limite del rapporto incrementale per le funzioni x^2, x^3, e^x. Le varie notazioni per la derivata. La derivata può essere infinita. Per definizione una funzione è derivabile in un punto se la derivata esiste ed è finita. Derivate di funzioni elementari (con dimostrazione): logaritmo, seno, coseno, radice quadrata, identità, valore assoluto. *Teorema: una funzione derivabile in un punto è anche continua in quel punto (con dimostrazione), ma non viceversa.* Il teorema dell'algebra delle derivate: *derivata di somma, prodotto per costante, prodotto, reciproco e quoziente di funzioni derivabili (con dimostrazione).* Derivata della composizione di funzioni e della funzione inversa. Derivata della tangente, delle funzioni trigonometriche inverse e delle funzioni x^n, x^α. Esempi di calcolo di derivate. Derivate destra e sinistra. Casistica di punti singolari: punti angolosi, cuspidi, flessi verticali, classificati in base ai valori della derivata destra e sinistra.

Funzioni derivabili e studio di funzione. Richiami sul valore massimo e il valore minimo di una funzione. Punti di massimo o minimo globale o locale e come riconoscerli sul grafico di una funzione. Definizione formale di punto di massimo/minimo locale interno o non interno. *Il teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno la derivata (se c'è) è nulla (con dimostrazione). Il teorema di Rolle (con dimostrazione). Definizione di punti stazionari per una funzione. Il teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico e dimostrazione.* Il teorema del valor medio di Cauchy (solo enunciato). *Il teorema de L'Hôpital (con dimostrazione nel caso 0/0).* Come si applica la regola de L'Hôpital. Derivata seconda, terza e successive: definizione e notazioni. Il significato geometrico del segno della derivata seconda, in termini di direzione di curvatura. Definizione di funzione convessa o concava in un intervallo, in termini della posizione rispetto alle rette tangenti. Teorema: una funzione derivabile due volte in un intervallo è convessa (o concava) se e solo se $f'' \geq 0$ (rispettivamente, $f'' \leq 0$). Esempio. Asintoti obliqui del grafico di una funzione, e come si trovano. Esempi di studio di funzione.

Area, integrali e primitive. Introduzione al concetto di area. Trapezoidi e plurirettangoli. suddivisioni marcate di un intervallo. Area dei plurirettangoli e somme di Riemann. Esperimenti sullo scostamento fra l'area dei plurirettangoli e l'area "vera". La notazione di integrale. Definizione formale di integrale secondo Riemann. Il teorema fondamentale del calcolo (solo enunciato). Primi esempi di calcolo di aree usando il teorema fondamentale. Definizione di primitive (o antiderivate, o integrali indefiniti) di una funzione. Il problema del calcolo delle primitive. Esempi di funzioni elementari che non hanno primitive elementari. Cenno all'algoritmo di Risch. Le primitive, quando esistono, non sono mai uniche. Due primitive della stessa funzione su un intervallo differiscono per una costante. Esempio in cui non è ovvio che due primitive assegnate differiscano per una costante. La notazione di Leibniz per l'integrale indefinito. Le funzioni continue in un intervallo hanno primitiva (in astratto). Linearità dell'integrale indefinito. Integrali immediati e "quasi immediati". Esempi. Integrazione per parti, con esempi. Integrazione per sostituzione: prima maniera. Integrazione per sostituzione: prima e seconda maniera, con esempi. Integrazione di funzioni razionali: riduzione di grado. Integrazione di funzioni razionali con denominatore di grado 2: i tre casi a seconda del segno del discriminante.

I teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale

Oltre alla **dimostrazione** dei teoremi seguenti, lo studente dovrà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti che sono stati introdotti nel corso, e di saper illustrare definizioni e teoremi con **esempi**, qualora ce ne siano di semplici.

1. Le formule per le somme $1+2+3+\cdots+n$ e $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ con dimostrazione.
2. Il teorema del limite della somma di due funzioni aventi limiti finiti.
3. La successione fondamentale $(1+1/n)^n$: dimostrazione che è crescente, che la successione ausiliaria $(1+1/n)^{n+1}$ è decrescente, e che hanno entrambe limite finito, coincidente
4. Teorema dell'esistenza degli zeri.
5. Il teorema di Weierstraß sui massimi e minimi (dimostrazione col metodo di bisezione).
6. Le funzioni derivabili sono continue. Esempio di funzione continua ma non derivabile.
7. Derivata del prodotto per costante, della somma, del prodotto, del reciproco e del quoziente di funzioni derivabili.
8. Teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno una funzione derivabile ha derivata nulla.
9. Teorema di Rolle, con significato geometrico.
10. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.
11. Regola de l'Hôpital: enunciato generale, dimostrazione nel caso $0/0$ in un punto finito con limite finito.