Dipartimento di Matematica e Informatica
Corsi di Laurea Triennale in Informatica e in TWM

Analisi Matematica

Prof. Gianluca Gorni

Libro di testo: Analisi Matematica, Custom Publishing McGraw-Hill, Gianluca Gorni e Paolo Baiti (M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli), ISBN: 978-11-219-5647-6. Il libro è disponibile presso la Libreria Moderna Udinese, via Cavour13, Udine. Materiale didattico attinente al corso è disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Analisi1`

Regolamento d'esame: Ci sono tre modi per ottenere i crediti del corso: (a) due prove parziali scritte senza orale, (b) due prove parziali scritte più orale, (c) un singolo scritto globale più orale. Al termine di ciascuno dei due periodi didattici si svolge una prova parziale (*compitino*), ognuno con votazione data in trentesimi. Chi prende meno di 12 in un compitino deve passare alla modalità scritto globale più orale. Ciascuno dei due compitini ha un unico appello, senza eccezioni. I compiti scritti globali hanno più appelli.

Al momento dell'iscrizione al secondo compitino si è pregati di iscriversi su esse3 anche al primo appello orale estivo. Per chi supera tutti e due i compitini con voto di almeno12, viene calcolata la media dei due voti, arrotondata per eccesso, e troncata al tetto massimo di30; tale media, quando di almeno18, verrà inserita come esito provvisorio su esse3 al primo appello orale estivo. (Chi non risulterà iscritto a quell'appello orale andrà incontro a ritardi nella registrazione dei voti).

A quel punto chi trova tale media su esse3 può segnalare, sempre su esse3, il suo consenso come voto definitivo (senza fare l'orale); in alternativa, può cliccare sul rifiuto del voto (oppure lasciarlo in sospeso) e presentarsi a sostenere un orale, in quello stesso appello orale o in uno successivo (previa iscrizione). L'orale ha come partenza il voto degli scritti e di solito lo migliora di qualche punto. La lode si può avere soltanto con l'orale. Chi non accetta né rifiuta il voto della media dei compitini se lo vedrà comunque registrato in automatico ad una certa scadenza che sarà indicata, comunque dopo la fine di settembre.

Il consenso o rifiuto del voto su esse3 è riservato ai soli voti ottenuti come medie dei due compitini. Per i voti degli scritti, dei compitini e degli orali effettivamente sostenuti non è previsto che lo studente dia il consenso o rifiuto su esse3.

Lo studente con media minore di18 (ma almeno 12) non la troverà riportata su esse3. Può presentarsi all'orale con tale media come voto di partenza, oppure passare alla modalità scritto globale più orale. Se consegna lo scritto globale i compitini vengono annullati.

La rimanente modalità di esame è uno scritto globale di tre ore più un orale. Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere in che appello dare l'orale. Si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e vale l'ultimo scritto consegnato. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento.

Gli orali sono di sola teoria. Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco nell'ultima pagina. I compitini e gli scritti non hanno scadenza di validità ai fini di quando fare l'orale.

Programma Dettagliato

Insiemi numerici: operazioni e ordinamento. Illustrazione della struttura del corso e degli esami. I vari tipi di numeri: naturali, interi relativi, razionali, reali. Cenni ai numeri reali come allineamenti decimali con infinite cifre. Proprietà algebriche dei numeri reali. Proprietà dell'ordinamento. Regole di manipolazione/trasformazioni delle disuguaglianze: reversibili ($\iff$, che conservano sia verità che falsità) e unidirezionali ($\Rightarrow$, che conservano la verità, ma non necessariamente la falsità). Densità dell'ordinamento dei numeri reali. Il punto medio di un segmento è la media aritmetica degli estremi. Il principio di Archimede e l'esistenza o meno di numeri infinitesimi o infiniti. Le funzioni "floor" $\lfloor x \rfloor$ e "ceiling" $\lceil x \rceil$ (i due interi successivi che racchiudono x). Due modi di descrivere insiemi: l'insieme degli elementi che verificano una certa proprietà, e l'insieme dei risultati di operazione, con le loro notazioni. Insiemi di numeri reali e loro rappresentazione grafica. Gli intervalli: definizione, classificazione e notazioni con parentesi quadre oppure miste quadre/tonde. Il valore assoluto di un numero reale. Proprietà del valore assoluto. Disequazioni. Studio del segno e risoluzione di disequazioni di primo grado, di secondo grado, razionali. Esercizi su disequazioni razionali, sistemi di disequazioni, disequazioni con valori assoluti. Il massimo e il minimo fra due o tre numeri reali $\max\{x, y\}$, $\min\{x, y\}$. Disequazioni con max e min. Richiami sulle proprietà di potenze quadrate e cubiche, radici quadrate e cubiche. Come si risolvono le disequazioni della forma $\sqrt{A} \geq B$, $\sqrt{A} \leq B$. Esercizi sulle disequazioni irrazionali. Maggioranti e minoranti di un insieme di numeri reali. Insiemi limitati superiormente o inferiormente. Massimo e minimo di un insieme di numeri reali. Esempi. Estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme di numeri reali. Principio di completezza dei numeri reali: ogni insieme di numeri reali ha estremo superiore e inferiore (eventualmente infiniti). Esempi. Esercizi su massimi, minimi, estremi superiori e inferiori.

Funzioni elementari e induzione. Potenze ed esponenziali: definizione, proprietà algebriche e proprietà relative all'ordinamento. Esercizi. La notazione exp per l'esponenziale. Grafico della funzione esponenziale. Il logaritmo: motivazione storica, definizione e proprietà. Esercizi su logaritmi ed esponenziali. Ripasso sulle funzioni trigonometriche. Introduzione al principio di induzione: proposizioni, predicati, tabelle di verità. Il principio di induzione. Esempio banale: $n \geq 0$. Esempi: *dimostrazione per induzione che* $1+2+3+\cdots+n = n(n+1)/2$, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$. Altri esempi: dimostrazione per induzione che $n! \geq n+5$, e della disuguaglianza di Bernoulli $(1+h)^n \geq 1+nh$ se $h > -1$, $n < 10^n$. Varianti del principio di induzione. La successione di Fibonacci F_n. Dimostrazione che $F_n \geq n$ per $n \geq 5$.

Limiti. Esempi introduttivi al concetto di limite. Come si arriva alla definizione di limite di una successione. Esempi introduttivi al concetto di limite in variabile reale. Rassegna delle definizioni di limite nei vari casi di variabile reale o intera, x_0 finito o $\pm\infty$, limite finito o $\pm\infty$, limite da destra o da sinistra, per eccesso o per difetto. Una interpretazione geometrica della definizione di limite. Esempi semplici di uso diretto della definizione di limite. Condizioni sul dominio della funzione perché il limite sia sensato. Il teorema dell'unicità del limite (con dimostrazione). Il limite bilaterale esiste se e solo se i limiti unilaterali esistono e coincidono. Il teorema dell'algebra dei limiti. *Dimostrazione che il limite della somma è uguale alla somma dei limiti, qualora questi ultimi siano finiti.* Limiti di base delle funzioni $x, 1/x, a^x, \log_a x, \operatorname{sen} x, \cos x, \tan x$. Le funzioni $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ non hanno limite per $x \to +\infty$. La funzione segno e i suoi limiti per $x \to 0^{\pm}$. Definizione di funzione continua in un punto. Teorema del confronto, o dei carabinieri, con dimostrazione. Esempi. Il teorema del limite della funzione composta, ovvero il cambio di variabile nei limiti. Il limite fondamentale $(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ per $x \to 0$, con dimostrazione. I limiti dei rapporti fra logaritmi, polinomi ed esponenziali. Il limite notevole $(1 - \cos x)/x^2 \to 1/2$ per $x \to 0$. Nota: le funzioni continue hanno la proprietà che $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x))$.

Monotonia e limiti. Definizione di funzione monotona, strettamente o debolmente crescente o decrescente. Esempi. Le funzioni monotone hanno sempre i limiti unilaterali. Se la successione reale a_n è monotona allora esiste il $\lim_{n\to+\infty} a_n$ (con dimostrazione). La successione fondamentale $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$: dimostrazione che è crescente. La successione ausiliaria $b_n := (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$: dimostrazione che è decrescente. *Dimostrazione che la successione fondamentale $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ ha limite finito, usando anche la successione ausiliaria $(1 + 1/n)^{n+1}$.* Il numero di Nepero e. Esponenziali e logaritmi in base e. I limiti notevoli $\lim_{x\to\pm\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$, $\lim_{t\to 0}(1 + t)^{1/t} = e$, $\lim_{x\to 0}(\log(1 + x))/x = 1$, $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = 1$. Alcuni errori frequenti nel calcolo dei limiti.

Limiti di successioni, ordini di infinito e notazione di Landau. Limiti contenenti il fattoriale e affini: $n!$, $n!/n$, $n!/n^2$, $n!$/polinomio, $n!/2^n$, $n!/3^n$, $n!$/esponenziale, n^n, $n^n/n!$, $2nn$. La gerarchia degli infiniti per $n \to +\infty$: logaritmi, radici, polinomi, esponenziali, fattoriali, e infiniti intermedi. I simboli di Landau: $o, O, \Omega, \omega, \Theta$.

Funzioni continue. Proprietà globali delle funzioni continue. Premessa: le disuguaglianze deboli sulle funzioni si conservano passando al limite. *Il teorema dell'esistenza degli zeri.* Significato geometrico. Dimostrazione per bisezione. Il teorema dei valori intermedi. L'insieme dei valori assunti da una funzione (insieme immagine). Enunciato del teorema di Weierstraß sui massimi/minimi. Punti di massimo e minimo globale per una funzione. *Il teorema di Weierstraß sui massimi e minimi, con dimostrazione per bisezione.* Funzioni iniettive e funzione inversa: definizione astratta, le relazioni di base $f^{-1}(f(x)) = x$, $f(f^{-1}(y)) = y$. Invertibilità per funzioni dai reali nei reali, e sua relazione con la crescenza/decrescenza stretta. Come si deduce il grafico della funzione inversa a partire dal grafico della funzione di partenza. Funzioni inverse notevoli: funzione identità, funzione di primo grado, quadrato/radice, potenza/radice n-esima, esponenziale/logaritmo, seno/arcoseno, coseno/arcocoseno, tangente/arcotangente. Casistica dei punti di discontinuità.

La derivata. Introduzione al concetto di derivata. Ingrandendo il grafico di una funzione si vede apparire una retta. La retta tangente. La pendenza di un segmento o di una retta. Il rapporto incrementale e come si comporta all'avvicinarsi dei due punti. Definizione di derivata di una funzione in un punto. La derivata delle funzioni elementari: costante, x, x^2. La derivata delle funzioni elementari: x^3, e^x, $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\sqrt{x}$, $|x|$. Definizione di derivabilità. *Teorema: una funzione derivabile in un punto è anche continua nel punto. Esempio di una funzione continua in un punto ma non derivabile: il valore assoluto nell'origine.* Casistica di punti di non derivabilità: punti angolosi, flessi verticali, cuspidi. L'algebra delle derivate: *derivata del prodotto di una funzione con una costante, della somma di due funzioni, del prodotto di due funzioni, del reciproco di una funzione, del quoziente di due funzioni (con dimostrazione).* Derivata della funzione composta. Derivata della funzione inversa, con dimostrazione e significato geometrico. Derivata della tangente e delle funzioni goniometriche inverse. Derivata di x^n, con le cautele da tenere quando n non è intero e $x < 0$. Derivata di $\log|x|$.

Funzioni derivabili e studio di funzione. Punti di massimo e minimo (estremo) locale: definizione e generalità. *Il teorema di Fermat: nei punti di massimo o minimo* *locale interni la derivata è nulla, se c'è (con dimostrazione).* Definizione di punto stazionario. Strategie per la ricerca di punti di estremo locale. *Il teorema di Rolle, con dimostrazione e significato geometrico. Il teorema del valor medio di Lagrange, con dimostrazione e significato geometrico.* Il teorema del valor medio di Cauchy (senza dimostrazione). Conseguenze dei teoremi del valor medio: il teorema della derivata nulla, con dimostrazione. Relazioni fra monotonia e segno della derivata, con dimostrazione. Cautele quando il dominio non è un intervallo, e alla possibilità di flessi orizzontali. *Il teorema de l'Hôpital (con dimostrazione nel caso 0/0 per x_0 finito).* Come si usa correttamente la regola de l'Hôpital. Definizione e notazioni per la derivata seconda, terza, e successive. Il concetto intuitivo di direzione di curvatura di una curva. Definizione di funzione convessa o concava in termini di posizione delle rette tangenti rispetto al grafico della funzione. Teorema sulla relazione fra convessità e concavità e segno della derivata seconda (con dimostrazione). Asintoti obliqui del grafico di una funzione: definizione e criterio per trovarli. Esercizi sullo studio di funzione.

Area, integrali e primitive. Introduzione al concetto di area. Trapezoidi e plurirettangoli. suddivisioni marcate di un intervallo. Area dei plurirettangoli e somme di Riemann. Esperimenti sullo scostamento fra l'area dei plurirettangoli e l'area "vera". La notazione di integrale. Definizione formale di integrale secondo Riemann. Enunciato del teorema fondamentale del calcolo. Primi esempi. Definizione di primitiva (o antiderivata, o integrale indefinito). Le primitive, quando ci sono, non sono uniche. Su un intervallo due primitive di una funzione differiscono per una costante. Le funzioni continue hanno una primitiva (senza dimostrazione). Il problema del calcolo esplicito delle primitive. Cenno all'algoritmo di Risch. Esempi di funzioni elementari che non hanno primitive elementari. Linearità dell'integrale. Integrali immediati e "quasi immediati". Esempi. Integrazione per parti. Esempi. Integrazione per sostituzione, o cambio di variabile. Esempi. Esempi di integrale per sostituzione. Integrazione di funzioni razionali: la divisione per l'abbassamento di grado del numeratore e il caso di denominatore di secondo grado con discriminante positivo. I casi in cui il discriminante del denominatore è negativo o nullo.

I teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale

Oltre alla **dimostrazione** dei teoremi seguenti, lo studente dovrà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti che sono stati introdotti nel corso, e di saper illustrare definizioni e teoremi con **esempi**, qualora ce ne siano di semplici.

1. Le formule per le somme $1+2+3+\cdots+n$ e $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ con dimostrazione.
2. Il teorema del limite della somma di due funzioni aventi limiti finiti.
3. La successione fondamentale $(1+1/n)^n$: dimostrazione che è crescente, che la successione ausiliaria $(1+1/n)^{n+1}$ è decrescente, e che hanno entrambe limite finito, coincidente
4. Il teorema di Weierstraß sui massimi e minimi (dimostrazione col metodo di bisezione).
5. Teorema dell'esistenza degli zeri.
6. Le funzioni derivabili sono continue. Esempio di funzione continua ma non derivabile.
7. derivata del prodotto per costante, della somma, del prodotto, del reciproco e del quoziente di funzioni derivabili.
8. Teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno una funzione derivabile ha derivata nulla.
9. Teorema di Rolle, con significato geometrico.
10. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.
11. Regola de l'Hôpital: enunciato generale, dimostrazione nel caso $0/0$ in un punto finito con limite finito.