Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Triennale in Informatica e in TWM

Analisi Matematica

Prof. Gianluca Gorni

Testo di riferimento: M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli, *Analisi matematica*, MacGraw-Hill, ISBN: prima edizione 9788838662348, seconda edizione 978883866-2812. Materiale didattico attinente al corso è disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Analisi1`

Regolamento d'esame: Ci sono tre modi per ottenere i crediti del corso: (a) due prove parziali scritte senza orale, (b) due prove parziali scritte più orale, (c) un singolo scritto globale più orale. Al termine dei due periodi didattici si svolgono i 2 **"compitini"** (prove parziali), ognuno con votazione data in trentesimi. Chi prende meno di 12 in un compitino deve passare alla modalità scritto globale più orale. *Chi sostiene i due compitini è pregato di iscriversi anche al primo appello orale su esse3.* Per chi supera tutti e due i compitini con voto di almeno 12, si calcola la **media** dei due voti, arrotondata per eccesso, e troncata al tetto massimo di 30; tale media, quando di almeno 18, verrà inserita su esse3 al primo appello orale (per chi si è iscritto). A quel punto chi trova la media può segnalare su esse3 la sua accettazione come voto definitivo; in alternativa, può presentarsi a sostenere un orale, che di solito migliora di qualche punto il voto, in un appello orale a scelta. La **lode** si può avere soltanto con l'orale. Per chi ha una media ≥ 12 e < 18 l'orale è obbligatorio.

Lo studente che i compitini o non li ha fatti, o non li ha superati, o li ha superati ma con voto che non l'aggrada, deve superare **uno scritto globale e un orale**. Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere in che appello dare l'orale. Si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e vale l'ultimo scritto consegnato. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento.

I compitini e gli scritti *non hanno scadenza* di validità ai fini di quando fare l'orale.

Gli orali sono di sola teoria. Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco nell'ultima pagina.

Programma Dettagliato

Insiemi numerici: operazioni e ordinamento. Illustrazione della struttura del corso e degli esami. I vari tipi di numeri: naturali, interi relativi, razionali, reali. Le proprietà algebriche dei numeri reali: somma e prodotto sono commutativi e associativi, esistenza dello zero, dell'uno, degli opposti e dei reciproci, distributività. Le regole di base delle disuguaglianze fra numeri reali: tricotomia, transitività, invarianza per traslazioni e per dilatazioni e contrazioni. Altre proprietà delle disuguaglianze. Densità dei numeri reali: fra due numeri distinti ce ne sono infiniti altri (fra cui la media aritmetica). Il principio di Archimede (non ci sono numeri infiniti o infinitamente piccoli). Numeri irrazionali: la radice quadrata di 2 non è razionale (senza dimostrazione). Fra due numeri reali ci sono sempre infiniti numeri razionali. Significato e uso dell'implicazione e della doppia implicazione, con esempi. I simboli per gli intervalli aperti, chiusi, semiaperti, illimitati. Il valore assoluto di un numero reale. Ulteriori regole di manipolazione delle disuguaglianze: sommare o moltiplicare membro a membro due disuguaglianze, la regola dei segni, togliendo un addendo positivo la somma rimpicciolisce. Esempi di soluzione di disequazioni: passaggi reversibili, schema per la regola dei segni, schema per i sistemi, disuguaglianze sempre vere o sempre false. Disequazioni contenenti valori assoluti. Il massimo e il minimo due o più numeri reali, o di due o più funzioni. Insiemi anche infiniti di numeri reali e loro modi di specificazione: elenco con puntini, test di appartenenza, insieme dei risultati di una funzione. Esempi di esistenza e non esistenza di massimo o minimo di un insieme infinito di numeri reali. Definizione di maggiorante e di minorante di un insieme di numeri reali. Insiemi limitati o illimitati inferiormente o superiormente. Esempi di ricerca di maggioranti e minoranti. Il principio di completezza dei numeri reali. Casistica di massimi, minimi, estremi superiori e inferiori. Esempi.

Funzioni elementari e induzione. Ripasso sulla definizione e proprietà delle potenze. Disuguaglianze, potenze e radici. Come trasformare le disuguaglianze $\sqrt{A} \geq B$ e $\sqrt{A} \leq B$ in espressioni che non contengono radici quadrate. Esercizi sulle disequazioni con radice quadrata. Esercizi sulle disequazioni con una radice quadrata. Ripasso sulle funzioni esponenziali. Ripasso sui logaritmi. Equazioni e disequazioni con logaritmi ed esponenziali. Proposizioni, predicati, tabelle di verità. Il principio di induzione. *Dimostrazione per induzione delle formule per le somme notevoli* $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ *e* $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$. La disuguaglianza di Bernoulli. Esercizi sull'induzione. Varianti del principio di induzione. La successione di Fibonacci: definizione ricorsiva e alcune proprietà dimostrate per induzione. La formula per la somma di una progressione geometrica.

Limiti. Introduzione al concetto di limite. La definizione di limite nel caso x_0, ℓ finiti. Varianti: limiti da sinistra e da destra, per eccesso e per difetto. Ricapitolazione delle definizione di limite. La definizione di continuità. La definizione di intorno di un punto (finito o infinito). Il teorema dell'unicità del limite. Dimostrazione del teorema dell'unicità del limite. Algebra dei limiti: *limite della somma*, prodotto, quoziente *di due funzioni aventi limiti finiti* (denominatore che non tende a 0) (*dimostrazione per la somma*). Limiti di base: costante e funzione x. Limite al finito dei polinomi. Limiti di somma, prodotto, reciproco e quoziente di funzioni nei casi non banali e forme indeterminate. Il teorema del confronto (o "dei due carabinieri"). Dimostrazione del teorema del confronto. Esempi. Limite della funzione composta, ovvero cambio di variabile nel limite (senza dimostrazione). Limiti al finito e agli estremi di polinomi, esponenziali, logaritmi e funzioni trigonometriche (senza dimostrazione). Limiti dei rapporti fra esponenziali e polinomi, e fra logaritmi e polinomi (senza dimostrazione). Le disuguaglianze notevoli $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ e $|x| \leq \tan x$, giustificate per via geometrica. Il limite fondamentale $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x = 1$. Il limite notevole $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)/x^2 = 1/2$. Esercizi.

Monotonia e limiti. Definizione di funzione crescente (strettamente o debolmente), decrescente (strettamente o debolmente), monotona. Esempi. Il caso delle successioni. Teorema: le funzioni (o successioni) monotone hanno sempre i limiti unilaterali (per $x \to -\infty$, $x \to x_0^-$, $x \to x_0^+$, $x \to +\infty$). Dimostrazione per le sole successioni crescenti limitate. *La successione fondamentale* $(1 + \frac{1}{n})^n$. *Dimostrazione che la successione fondamentale* $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ *è crescente. Dimostrazione che la successione ausiliaria* $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ *è decrescente. Dimostrazione che* a_n *converge a un limite finito.* Il numero di Nepero e. I limiti notevoli $\lim_{x\to\pm\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$, $\lim_{t\to 0}(1 + t)^{1/t} = e$. Il logaritmo naturale in base e e l'esponenziale in base e. I limiti notevoli $\lim_{x\to 0}(\ln(1 + x))/x = 1$, $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = 1$.

Limiti di successioni, ordini di infinito e notazione di Landau. Limiti contenenti il fattoriale e affini: $n!$, $n!/n$, $n!/n^2$, $n!$/polinomio, $n!/2^n$, $n!/3^n$, $n!$/esponenziale, n^n, $n^n/n!$, $\binom{2n}{n}$. La gerarchia degli infiniti non è archimedea: data una successione di infiniti, esiste sempre un infinito più grande di tutti loro. Infiniti lenti per $n \to +\infty$: $\sqrt{n}, \sqrt[3]{n}, \dots, \log n, \log(\log n) \dots$. Infiniti intermedi: $n \log n$, $n2^n$. La notazione di Landau: i simboli o, O, Θ, Ω nel caso $n \to +\infty$.

Funzioni continue. Proprietà globali delle funzioni continue. Richiami sul concetto di insieme immagine e di funzione continua. *Il teorema di Weierstrass sui massimi e minimi, con dimostrazione per bisezione.* Corollario: le funzioni continue su intervalli chiusi e limitati sono limitate. *Il teorema dell'esistenza degli zeri, con dimostrazione per bisezione.* Esempi di applicazione del teorema degli zeri. Il teorema dei valori intermedi. Il corollario sulle soluzioni di $f(x) = g(x)$. Esempio: l'equazione $\cos x = x$. Funzioni inverse: definizione in astratto e le relazioni di base $f^{-1}(f(x)) \equiv x$, $f(f^{-1}(y)) \equiv y$. Il caso di funzioni dai reali nei reali: il grafico di f^{-1} si ottiene dal grafico di f simmetrizzando specularmente rispetto alla bisettrice del I-III quadrante. Funzioni inverse notevoli: quadrato e radice quadrata, esponenziale e logaritmo, seno e arcoseno, coseno e arcocoseno, tangente e arcotangente. Cenno alla continuità della funzione inversa.

La derivata. Introduzione alla derivata: cosa succede "ingrandendo" il grafico di una funzione. Richiami su incrementi e pendenze di segmenti e di rette. Cosa succede alla pendenza di un segmento di grafico ad alti ingrandimenti. Introduzione al concetto di derivata: dall'intuitivo al simbolico. Definizione formale di derivata e di derivabilità. Regole di derivazione: derivata di costante, di polinomio di primo grado $mx + q$, di x^2. Derivata di x^3, exp, ln, sin, cos. *Se una funzione è derivabile è anche continua (con dimostrazione). Algebra delle derivate: formule per la derivata di somma, prodotto e quoziente di funzioni derivabili (con dimostrazione).* Derivata della funzione composta (con dimostrazione parziale). Derivata della funzione inversa (senza dimostrazione), con significato geometrico. Derivate di arcsen, arccos e arctan. Derivata di x^n con $n \in \mathbb{Z}$. Derivate di $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $|x|$, $\ln|x|$, x^α con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$. Esercizi sul calcolo delle derivate.

Funzioni derivabili e studio di funzione. Punti angolosi, cuspidi, flessi verticali, tangenti verticali. Derivata destra e sinistra. Punti di massimo o minimo locale (punti estremali locali). *Teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno la derivata, se c'è, è nulla (con dimostrazione). Il teorema del valor medio di Rolle, con dimostrazione e significato geometrico. Il teorema del valor medio di Lagrange, con dimostrazione e significato geometrico.* Conseguenza: il teorema della derivata nulla, con dimostrazione. Le relazioni fra monotonia e segno della derivata, con dimostrazione. Esempi. Il teorema del valor medio di Cauchy, con cenno di dimostrazione e cenno di significato geometrico. *Il teorema dell'Hôpital, con dimostrazione nel caso 0/0.* Esempi. Esercizi sulla regola de L'Hôpital. Definizione di derivata seconda e successive. Notazioni. La derivata seconda ha a che fare con la curvatura del grafico della funzione. Funzioni concave o convesse, definite tramite la posizione rispetto alle rette tangenti. Il teorema sulla relazione fra convessità/concavità e il segno della derivata seconda (con dimostrazione). Esempio. Asintoti obliqui di un grafico di funzione. Esercizi sullo studio di funzione.

Area, integrali e primitive. Introduzione alla teoria dell'integrale: il problema delle aree, trapezoidi, plurirettangoli, suddivisioni marcate, somme di Riemann. Andamento delle somme di Riemann in funzione del numero di intervallini, e dell'ampiezza. Definizione formale di integrale secondo Riemann. Enunciato del teorema fondamentale del calcolo integrale. Primi esempi applicativi. Il problema delle primitive (o antiderivate, o integrali indefiniti). Se esiste una primitiva su un intervallo questa non è mai unica, ma due primitive differiscono per una costante. Il problema del calcolo delle primitive. Cenno all'algoritmo di Risch. Esempi di funzioni elementari che non hanno primitive elementari. Linearità dell'integrale indefinito. Integrali immediati e "quasi immediati". Esempi. Integrazione per parti e integrazione per sostituzione. Esempi. Integrazione di funzioni razionali: decomposizione in fratti semplici, completamento del quadrato perfetto e gli altri casi di denominatore di secondo grado, con esempi. Esempi.

I teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale

Oltre alla **dimostrazione** dei teoremi seguenti, lo studente dovrà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti che sono stati introdotti nel corso, e di saper illustrare definizioni e teoremi con **esempi**, qualora ce ne siano di semplici.

1. Le formule per le somme $1+2+3+\cdots+n$ e $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ con dimostrazione.
2. Il teorema del limite della somma di due funzioni aventi limiti finiti.
3. La successione fondamentale $(1+1/n)^n$: dimostrazione che è crescente, che la successione ausiliaria $(1+1/n)^{n+1}$ è decrescente, e che hanno entrambe limite finito, coincidente
4. Il teorema di Weierstraß sui massimi e minimi (dimostrazione col metodo di bisezione).
5. Teorema dell'esistenza degli zeri.
6. Le funzioni derivabili sono continue. Esempio di funzione continua ma non derivabile.
7. derivata del prodotto per costante, della somma, del prodotto, del reciproco e del quoziente di funzioni derivabili.
8. Teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno una funzione derivabile ha derivata nulla.
9. Teorema di Rolle, con significato geometrico.
10. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.
11. Regola de l'Hôpital: enunciato generale, dimostrazione nel caso $0/0$ in un punto finito con limite finito.