Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Triennale in Informatica e in TWM

Analisi Matematica

Prof. Gianluca Gorni

Testo di riferimento: M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli, *Analisi matematica*, MacGraw-Hill, ISBN: prima edizione 9788838662348, seconda edizione 978883866-2812. Materiale didattico attinente al corso è disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Analisi1`

Regolamento d'esame: Ci sono tre modi per ottenere i crediti del corso: (a) due prove parziali scritte senza orale, (b) due prove parziali scritte più orale, (c) un singolo scritto globale più orale. Al termine dei due periodi didattici si svolgono i 2 **"compitini"** (prove parziali), ognuno con votazione data in trentesimi. Chi prende meno di 12 in un compitino deve passare alla modalità scritto globale più orale. *Chi sostiene i due compitini è pregato di iscriversi anche al primo appello orale su esse3.* Per chi supera tutti e due i compitini con voto di almeno 12, si calcola la **media** dei due voti, arrotondata per eccesso, e troncata al tetto massimo di 30; tale media, quando di almeno 18, verrà inserita su esse3 al primo appello orale (per chi si è iscritto). A quel punto chi trova la media può segnalare su esse3 la sua accettazione come voto definitivo; in alternativa, può presentarsi a sostenere un orale, che di solito migliora di qualche punto il voto, in un appello orale a scelta. La **lode** si può avere soltanto con l'orale. Per chi ha una media ≥ 12 e < 18 l'orale è obbligatorio.

Lo studente che i compitini o non li ha fatti, o non li ha superati, o li ha superati ma con voto che non l'aggrada, deve superare **uno scritto globale e un orale**. Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere in che appello dare l'orale. Si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e vale l'ultimo scritto consegnato. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento.

Gli orali sono di sola teoria. Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco nell'ultima pagina.

Programma Dettagliato

Insiemi numerici: operazioni e ordinamento. Richiami introduttivi sui vari tipi di numeri: naturali, interi relativi, razionali, reali. I numeri reali come allineamenti decimali infiniti. Cenno agli allineamenti generabili da algoritmi e allineamenti non generabili. Proprietà delle operazioni fra numeri: commutativa, associativa, esistenza dello zero e dell'unità, esistenza di opposti e reciproci, proprietà distributiva. La proprietà associativa non è rigorosamente vera per i numeri macchina. La divisione non è associativa, per cui bisogna fare attenzione a come interpretare espressioni del tipo $a/b/c$. L'ordinamento fra numeri: tricotomia, invarianza per traslazioni. Cenno al significato dell'implicazione. L'implicazione ($\Rightarrow$) è il corrispettivo logico dell'inclusione fra insiemi. La doppia implicazione (se e solo se, $\iff$) è il corrispettivo dell'uguaglianza fra insiemi. Proprietà dell'ordinamento dei numeri razionali e reali: transitività, la disuguaglianza si mantiene moltiplicando per un numero positivo, si ribalta moltiplicando per un numero negativo, i quadrati sono sempre ≥ 0, non ci sono radici quadrate di numeri negativi, densità (fra due numeri distinti ce ne sono infiniti altri), proprietà di Archimede. La radice quadrata di 2 non è razionale (senza dimostrazione). Intervalli limitati e loro simbologia. La regola dei segni per il prodotto. Intervalli illimitati e loro simbologia. Definizione di valore assoluto. Esercizi sulle disequazioni. Disequazioni con valori assoluti, massimi e minimi. Esistenza o non esistenza di massimi e minimi di insiemi finiti o infiniti di numeri reali. Maggioranti e minoranti di un insieme. Esempi di calcolo di maggioranti e minoranti. Insiemi limitati e illimitati, superiormente o inferiormente. Estremo superiore e inferiore. Principio di completezza dei numeri reali. Esercizi su estremi superiori e inferiori.

Funzioni elementari e induzione. Sommario di proprietà di potenze e esponenziali. Definizione di logaritmo. Sommario di proprietà dei logaritmi. Esercizi su potenze e logaritmi. Risoluzione di disequazioni irrazionali della forma $\sqrt{A} \geq B$ e $\sqrt{A} \leq B$. Esercizi sulle disequazioni con radice quadrata. Alcune proprietà del valore assoluto, fra cui la disuguaglianza triangolare $|x+y| \leq |x|+|y|$, e il significato di $|x-y|$ come distanza fra x e y. La notazione di sommatoria. Introduzione al principio di induzione: proposizioni e predicati, tabella di verità di un predicato con parametro intero, predicati induttivi (o ereditari). I tre tipi di tabelle di verità dei predicati induttivi: sempre veri, sempre falsi, sequenza di falsi seguita da tutti veri. Il principio di induzione: se un predicato è induttivo e la tabella comincia con vero, allora è sempre vero. Caso base e passo induttivo. Esempio: *dimostrazione per induzione che* $1+2+3+\cdots+n = n(n+1)/2$ *e che* $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$. Dimostrazione per induzione che $r^0+r^1+r^2+\cdots+r^n = (1-r^{n+1})/(1-r)$. La disuguaglianza di Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1+nx$ se $x > -1$ e $n \geq 1$. La disuguaglianza $n \leq 10^n$. Importanza che l'induzione scatti dal caso base compreso. Varianti del principio di induzione. Uso dell'induzione per dimostrare proprietà della successione di Fibonacci. Ripasso delle proprietà di base delle funzioni trigonometriche.

Elementi di topologia. La distanza fra due punti x, y della retta $d(x,y) := |x-y|$, col significato di lunghezza del segmento che li congiunge. Cenno al caso di distanza fra punti del piano. Proprietà della distanza: $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \iff x = y$, $d(x,y) = d(y,x)$, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Definizione di intorno (sferico) di un punto x della retta con raggio r. Interpretazione geometrica e cenno al caso di punti del piano o dello spazio. Proprietà degli intorni: il centro appartiene a ogni suo intorno; l'intersezione di due intorni di un punto è ancora un intorno dello stesso punto; se y appartiene a un intorno di x, esiste un intorno di y contenuto nell'intorno dato di x; dati due punti distinti, esistono un intorno del primo e un intorno del secondo fra loro disgiunti. Definizione di intorni di $+\infty$ e di $-\infty$.

Limiti. Tre modi di vedere la vicinanza di due numeri: il metodo algebrico di prendere la loro distanza, il modo geometrico di vedere uno come un punto in un intorno dell'altro, e confrontando le cifre della rappresentazione decimale. Esempi introduttivi al concetto di limite: le successioni $1/n$ e $n/(n+1)$, la successione F_n di Fibonacci, la successione dei rapporti F_{n+1}/F_n, il coefficiente angolare della retta che passa per i punti $(1,1)$ e (x,x^2). Esempi introduttivi al concetto di limite. Lo schema generale $x \approx x_0 \Rightarrow f(x) \approx \ell$. Variabile indipendente, variabile dipendente e i punti a cui si avvicinano le due variabili. Il margine di approssimazione nella variabile dipendente è indicato con ε nel caso finito. La definizione di limite in variabile reale nel caso finito. Alcune interpretazioni. Rassegna delle definizioni di limite nei casi finito e infinito, da destra e da sinistra, per eccesso e per difetto. La condizione di sensatezza: x_0 sia interno al dominio di f o un suo estremo. Il teorema dell'unicità del limite. Alcuni esempi dell'applicazione diretta della definizione di limite. Il limite bilaterale esiste se e solo se esistono i limiti unilaterali e coincidono. Il teorema dell'algebra dei limiti: *limite di somma*, prodotto e quoziente *di funzioni aventi limiti finiti.* Dimostrazione del teorema della somma dei limiti. Limiti della costante e della funzione identità. Limiti dei polinomi e delle funzioni razionali nei punti finiti non singolari. Limite di somma, prodotto e quoziente nei casi non finiti e forme indeterminate. Alcune semplificazioni nel calcolo dei limiti: se $g(x) \to \ell$ finito non nullo, allora $\lim f(x)g(x)/h(x) = \lim f(x)\ell/h(x)$ e $\lim f(x)/(g(x)h(x)) = \lim f(x)/(\ell h(x))$. Attenzione alla "pseudoregola" secondo cui si potrebbe sempre sostituire a una sottoformula il suo limite. Limiti all'infinito di polinomi e funzioni razionali. Il teorema del confronto, o dei carabinieri. Applicazione al limite all'infinito di funzioni contenenti funzioni oscillanti come seno e coseno. Casistica dei limiti delle potenze a esponente reale. Casistica dei limiti di esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche. Limiti di rapporti fra esponenziali e potenze, o fra logaritmi e potenze. Il teorema del limite della funzione composta, ovvero il cambio di variabile nel limite. Le disuguaglianze $|\operatorname{sen} x| \le |x|$ e $\operatorname{sen} x \le \tan x$. Il limite fondamentale $(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ per $x \to 0$. Il limite notevole $(1 - \cos x)/x^2 \to 1/2$ per $x \to 0$.

Monotonia e limiti. Definizione di successione debolmente (o strettamente) crescente (o decrescente). Teorema: una successione a_n debolmente crescente o decrescente ha sempre limite per $n \to +\infty$. *La successione fondamentale $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ è crescente, la successione ausiliaria $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ è decrescente ed entrambe sono limitate e tendono allo stesso limite (con dimostrazione).* Il numero di Nepero e e il limite fondamentale $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$ per $n \to +\infty$. I limiti notevoli in variabile reale $(1 + \frac{1}{x})^x \to e$ per $x \to +\infty$, $(1 + x)^{1/x} \to e$, $(e^x - 1)/x \to 1$ e $(\log_e(1 + x))/x \to 1$ per $x \to 0$.

Limiti di successioni, ordini di infinito e notazione di Landau. Limite per $n \to +\infty$ di $n!$, $n!/n$, $n!/n^2$, $n!/2^n$, $n!/3^n$, $n!/5^n$. Il fattoriale va cresce più velocemente di tutti i polinomi e di tutti gli esponenziali. La successione n^n cresce più velocemente del fattoriale. La gerarchia delle successioni che tendono all'infinito. Infinitesimi. La gerarchia delle successioni infinitesime. Esercizi sui limiti contenenti fattoriali. Le notazioni di Landau: O grande, Omega grande, Theta grande, o piccolo, omega piccolo, tilde, con esempi.

Funzioni continue. Proprietà globali delle funzioni continue. Una funzione f è continua in $\bar{x}$ se per ogni successione a_n che tende a $\bar{x}$ si ha che $f(a_n)$ tende a $f(\bar{x})$. *Il teorema dell'esistenza degli zeri. Dimostrazione usando il metodo di bisezione.* Esempi illustrativi. Applicazione: i polinomi di grado dispari hanno almeno uno zero reale. Il teorema dei valori intermedi. *Il teorema di Weierstrass sui massimi e minimi (dimostrazione col metodo di bisezione).* I quattro tipi di monotonia di una funzione: stretta crescenza, debole crescenza, stretta decrescenza, debole decrescenza. Ci sono funzioni non monotone. Funzioni iniettive. Funzione inversa. Il teorema che lega la continuità, l'iniettività e la stretta monotonia per funzioni definite su un intervallo (senza dimostrazione). Il grafico della funzione inversa è speculare a quello della funzione di partenza rispetto alla bisettrice. Esempi notevoli di funzioni inverse: radice quadrata, arcoseno, arcocoseno, arcotangente, logaritmo ed esponenziale.

La derivata. Introduzione alla derivata tramite il concetto di zoom nel grafico di una funzione. Definizione di derivata, di rapporto incrementale, di retta tangente, di derivabilità. Notazioni per la derivata. La definizione di derivata in termini della notazione di Landau. Derivate di funzioni elementari: derivata di x^2 e di e^x. Derivata di una costante e derivata dei polinomi di primo grado. Teorema: una funzione derivabile è anche continua. Algebra delle derivate: *derivata del prodotto per costante, della somma, del prodotto, del reciproco e del quoziente di funzioni derivabili (con dimostrazione).* Derivata della composizione di funzioni (con dimostrazione parziale). Applicazioni: derivata di x^n con $n \in \mathbb{Z}$, derivate di polinomi. Derivata di logaritmo, seno e coseno. Come si usa la regola della derivata della funzione composta. Esercizi. La derivata della funzione inversa. La derivata della tangente e delle funzioni trigonometriche inverse. Derivata di x^α con α non intero, di a^x, di $\ln|x|$. Derivata del valore assoluto. Derivata destra e derivata sinistra, punti angolosi, cuspidi, tangenti verticali, flessi verticali. Esercizi di calcolo di derivate.

Funzioni derivabili e studio di funzione. Punti di massimo e minimo locali. *Teorema di Fermat: nei punti di massimo o minimo locali interni la derivata (se c'è) è nulla. Il teorema di Rolle, con significato geometrico. Il teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico e dimostrazione.* Il teorema del valor medio di Cauchy (senza dimostrazione). Conseguenze del teorema di Lagrange: teorema della derivata nulla e teorema sulla relazione fra monotonia e segno della derivata. Esempi. *Il teorema dell'Hôpital, con dimostrazione nel caso 0/0 e $x \to x_0^+$ finito.* Esempi. Definizione e notazioni per la derivata seconda e successive. La direzione di curvatura di un grafico: approccio usando la direzione di "sterzata" e quello usando la posizione rispetto alle rette tangenti. Formalizzazione dei due concetti. Definizione di funzioni convesse e di funzioni concave in termini di posizione rispetto alle rette tangenti. Teorema sulla relazione fra convessità/concavità e segno della derivata seconda. Riconoscimento dei punti di massimo o minimo locale usando il segno della derivata prima. Punti di flesso. Rette asintotiche. Esempi di studio di funzione.

Area, integrali e primitive. Introduzione al concetto di integrale. Il problema dell'area. Trapezoidi e plurirettangoli. Suddivisioni marcate e somme di Riemann. Ampiezza di una suddivisione. La definizione di integrale secondo Riemann. Enunciato del teorema fondamentale del calcolo, con alcuni esempi applicativi. Definizione di primitiva (o integrale indefinito, o antiderivata) di una funzione, e notazioni. Le primitive di una funzione, se esistono, sono sempre infinite, e su un intervallo differiscono fra loro per una costante. Esempi di funzioni che non hanno primitive elementari. Linearità dell'integrale indefinito. Integrali immediati e quasi immediati. Integrazione per parti, con esempi. Integrazione di funzioni razionali: decomposizione in fratti semplici, completamento del quadrato perfetto e gli altri casi di denominatore di secondo grado, con esempi. Integrazione per sostituzione, o cambio di variabile. Esempi.

I teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale

Oltre alla **dimostrazione** dei teoremi seguenti, lo studente dovrà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti che sono stati introdotti nel corso, e di saper illustrare definizioni e teoremi con **esempi**, qualora ce ne siano di semplici.

1. Le formule per le somme $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ e $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ con dimostrazione.
2. Il teorema del limite della somma di due funzioni aventi limiti finiti.
3. La successione fondamentale $(1 + 1/n)^n$: dimostrazione che è crescente, che la successione ausiliaria $(1 + 1/n)^{n+1}$ è decrescente, e che hanno entrambe limite finito, coincidente
4. Teorema dell'esistenza degli zeri.
5. Il teorema di Weierstraß sui massimi e minimi (dimostrazione col metodo di bisezione).
6. Le funzioni derivabili sono continue. Esempio di funzione continua ma non derivabile.
7. derivata del prodotto per costante, della somma, del prodotto, del reciproco e del quoziente di funzioni derivabili.
8. Teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno una funzione derivabile ha derivata nulla.
9. Teorema di Rolle, con significato geometrico.
10. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.
11. Regola de l'Hôpital: enunciato generale, dimostrazione nel caso $0/0$ in un punto finito con limite finito.