Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Triennale in Informatica e in TWM

Analisi Matematica

Prof. Gianluca Gorni

Testo di riferimento: M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli, *Analisi matematica*, MacGraw-Hill, ISBN: 9788838662348. Materiale didattico attinente al corso è disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Analisi1`

Regolamento d'esame: Ci sono tre modi per ottenere i crediti del corso: (a) due prove parziali scritte senza orale, (b) due prove parziali scritte più orale, (c) un singolo scritto globale più orale. Al termine dei due periodi didattici si svolgono i 2 **"compitini"** (prove parziali), ognuno con votazione data in trentesimi. Chi prende meno di 12 in un compitino deve passare alla modalità scritto globale più orale. *Chi sostiene i due compitini è pregato di iscriversi anche al primo appello orale su esse3.* Per chi supera tutti e due i compitini con voto di almeno 12, si calcola la **media** dei due voti, arrotondata per eccesso, e troncata al tetto massimo di 30; tale media, quando di almeno 18, verrà inserita su esse3 al primo appello orale (per chi si è iscritto). A quel punto chi trova la media può segnalare su esse3 la sua accettazione come voto definitivo; in alterntiva, può presentarsi a sostenere un orale, che di solito migliora di qualche punto il voto, in un appello orale a scelta. La **lode** si può avere soltanto con l'orale. Per chi ha una media ≥ 12 e < 18 l'orale è obbligatorio.

Lo studente che i compitini o non li ha fatti, o non li ha superati, o li ha superati ma con voto che non l'aggrada, deve superare **uno scritto globale e un orale.** Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere in che appello dare l'orale. Si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e vale l'ultimo scritto consegnato. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento.

Gli orali sono di sola teoria. Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco nell'ultima pagina.

Programma Dettagliato

Insiemi numerici: operazioni e ordinamento. Richiami sugli insiemi numerici: numeri naturali, numeri interi, numeri razionali, numeri reali. Proprietà algebriche della somma e del prodotto: commutativa, associativa, distributiva, esistenza dello zero e dell'unità, esistenza di opposti e reciproci. Proprietà della relazione di ordinamento: riflessiva, antisimmetrica, transitiva, tricotomia. Proprietà che legano le operazioni di somma e prodotto con l'ordinamento: a una disuguaglianza si può sommare membro a membro una stessa quantità, e la si può moltiplicare membro a membro per un numero positivo. Proprietà di densità dei numeri razionali: fra due numeri reali distinti ci sono sempre infiniti numeri razionali. Proprietà di Archimede: dati due numeri positivi, esiste sempre un multiplo intero del primo dei due che supera l'altro. Cenno alla rappresentazione decimale dei numeri reali e razionali. Numeri irrazionali. La radice quadrata di 2 è irrazionale (con dimostrazione).

Fra due numeri reali distinti ci sono sempre infiniti irrazionali. I vari tipi di intervalli, a estremi finiti o infiniti, compresi o non compresi. Il valore assoluto di un numero reale. Definizione di maggiorante e di minorante di un insieme di numeri reali. Definizione di massimo e di minimo di un insieme di numeri reali. Gli insiemi finiti hanno sempre massimo e minimo. Esempi. Definizione di estremo superiore e di estremo inferiore di un insieme di numeri reali (caso limitato e caso non limitato). Il principio di completezza dei numeri reali: ogni insieme (limitato) di numeri reali ha sempre estremo superiore ed estremo inferiore.

Funzioni elementari e induzione. Esercizio su massimi, minimi, maggioranti, minoranti, estremi superiori e inferiori. Una proprietà della potenza a esponente intero: se $0 < x < y$ allora $x^n < y^n$. Unicità delle radici ennesime aritmetiche dei numeri positivi. Esistenza delle radici ennesime usando il principio di completezza (senza dimostrazione). Potenze a esponente razionale e reale. Elenco riassuntivo delle proprietà algebriche delle potenze. Riassunto delle proprietà dei logaritmi. Come si risolvono le disequazioni in cui compare una radice quadrata. Esercizi sulle disequazioni con radicali, logaritmi ed esponenziali. La disuguaglianza triangolare (con dimostrazione). Il simbolo di sommatoria. Proposizioni e predicati. Predicati induttivi o ereditari. I predicati induttivi sono di tre tipi: tutto falso, tutto vero, sequenza di falsi seguita da tutti veri. Il principio di induzione: se un predicato comincia con vero ed è induttivo, allora è sempre vero. Lo schema di strategia per affrontare le dimostrazioni per induzione: trasformare $P(n)$ in $P(n+1)$ usando delle trasformazioni che conservano la verità. *Esempi svolti:* $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$, $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$. La disuguaglianza di Bernoulli $(1+x)^n \geq 1 + nx$ per $x > -1$, $n \in \mathbb{N}$, dimostrata per induzione. Esercizi sulle dimostrazioni per induzione. Varianti del principio di induzione, con un esempio di applicazione alla successione di Fibonacci.

Elementi di topologia. La distanza (euclidea) di due punti della retta, e sue prime proprietà. Definizione di intorno sferico di un punto della retta. Prime proprietà degli intorni. Intorno (sferico) di $+\infty$ e di $-\infty$. Definizione di punto di accumulazione di un insieme. Esempi. *Il teorema di Bolzano-Weierstrass* sull'esistenza di punti di accumulazione degli insiemi infiniti e limitati (dimostrazione usando il metodo di bisezione). Definizione di punti interni, esterni e di frontiera per un insieme. Esempi. Definizione di parte interna, frontiera, chiusura di un insieme. Definizione di insieme aperto e di insieme chiuso. Esempi. Caratterizzazioni degli insiemi chiusi (senza dimostrazione). Teorema: un insieme chiuso e limitato ha sempre massimo e minimo (con dimostrazione).

Limiti. La definizione di limite nei vari casi di x_0, ℓ finiti o infiniti. La definizione generale di limite in termini di intorni. La definizione di limite applicata in un alcuni esempi. Varianti del concetto di limite: limite da destra o da sinistra, per eccesso o per difetto, continuità. Teorema dell'unicità del limite. Algebra dei limiti nel caso di limiti finiti. Dimostrazione che *il limite della somma è la somma dei limiti, se questi ultimi sono finiti.* Casistica dell'algebra dei limiti nei casi infiniti, infinitesimi e indeterminati. Forme indeterminate per somma, prodotto e quoziente di funzioni. Limiti fondamentali: il limite di una costante e di x. Il significato di '0' nell'espressione 0/0. Il teorema del confronto, o "dei carabinieri" (con dimostrazione). Le disuguaglianze trigonometriche $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$, $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$. Esempi di applicazione. La continuità di $\operatorname{sen} x$ e di $\cos x$.

Monotonia e limiti. Funzioni monotone: debolmente o strettamente crescenti o decrescenti. Definizione formale algebrica e interpretazione grafica. Esempi. Le funzioni monotone hanno sempre i limiti unilaterali (da sinistra, da destra, a $\pm\infty$), quando hanno senso. Dimostrazione nel caso di una successione a_n debolmente crescente. *La successione fondamentale* $(1 + 1/n)^n$ *è crescente* (con dimostrazione), e quindi ha limite. *La successione ausiliaria* $(1 + 1/n)^{n+1}$ *è decrescente* (con dimostrazione), ed è maggiore di $(1 + 1/n)^n$. Conclusione: $(1 + 1/n)^n$ *ha un limite finito*, chiamato numero di Nepero e indicato con e. I logaritmi e gli esponenziali naturali, cioè in base e. Un problema finanziario in cui compare la successione $(1 + 1/n)^n$. Dal limite fondamentale $(1 + 1/n)^n \to e$ per $n \to +\infty$ seguono altri limiti notevoli: $(1 + 1/x)^x \to e$ per $x \to \pm\infty$, $(1 + t)^{1/t} \to e$ per $t \to 0$, $(e^x - 1)/x \to 1$ e $(\log_e(1 + x))/x \to 1$ per $x \to 0$.

Limiti di successioni. Il fattoriale $n!$. Limiti notevoli col fattoriale: $n!/a^n \to +\infty$ e $n^n/n! \to +\infty$ per $n \to +\infty$. Esercizi sui limiti con fattoriali. Il concetto di sottosuccessione di una successione data. Se una successione ha limite, anche tutte le sue sottosuccessioni hanno limite, ed è lo stesso. Variante del teorema di Bolzano-Weierstrass: ogni successione limitata ha almeno una sottosuccessione convergente (senza dimostrazione). Successioni ricorsive e tecniche per il calcolo del loro limite. Esempio: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$. Esercizi sulle successioni ricorsive: $a_{n+1} = (a_n)^2$, $a_{n+1} = a_n/(1 + a_n)$, con $a_0 \geq 0$. La successione di Fibonacci a_n e la successione dei rapporti dei termini consecutivi $r_n = a_{n+1}/a_n$. Esempi di studio di successioni ricorsive.

Infiniti, infinitesimi e notazione di Landau. Infiniti e infinitesimi, di ordine superiore o inferiore. Le notazioni di Landau: “o piccolo”, “O grande”, “omega piccolo”, “omega grande”. Esempi e interpretazione in termini di grafici.

Funzioni continue. Richiamo sulle funzioni continue: se f è continua in $\bar{x}$ e $a_n \to \bar{x}$ allora $\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$. *Il teorema dell’esistenza degli zeri*, dimostrato per bisezione. Esempi. Il teorema dei valori intermedi (cenno di dimostrazione). Se due funzioni continue su un intervallo si scambiano di ordine, allora in qualche punto devono coincidere. Esempi. Cenno alle relazioni fra stretta monotonia, continuità e invertibilità per funzioni su un intervallo. Il massimo e il minimo valore di una funzione reale su un insieme. Punti di massimo e di minimo (globali). Distinzione fra massimo e punto di massimo. Il teorema di Weierstraß: una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato ha sempre punti di massimo e punti di minimo globali (dimostrazione usando il teorema sull’esistenza di sottosuccessioni convergenti di una successione limitata).

La derivata. Il concetto di derivata introdotto usando l’idea di zoom nel grafico di una funzione. Definizione di rapporto incrementale e di derivata. Funzioni derivabili. Notazioni per la derivata. Retta tangente. Derivata di una costante e di un polinomio di primo grado. Derivata della potenza x^n, usando la formula del binomio di Newton. Derivata della funzione esponenziale e^x. Teorema: *una funzione derivabile è anche continua. Esempio di una funzione continua che non è derivabile*: il valore assoluto in $x_0 = 0$. Derivate sinistre e destre, punti angolosi, punti di cuspide e tangenti verticali. Algebra delle derivate: derivata di cf, $f + g$, fg, $1/f$, f/g (dimostrazione nel caso di *somma e prodotto*). Derivata della funzione composta $f(g(x))$ (dimostrazione parziale). Derivata della funzione inversa. Derivata del logaritmo, seno, coseno, tangente. Derivata delle funzioni trigonometriche inverse arcsen, arccos, arctan. Cenno alle funzioni iperboliche senh, cosh, tanh. Esercizi sul calcolo delle derivate.

Funzioni derivabili e studio di funzione. Definizione e significato geometrico di punti di massimo o minimo locale. *Il teorema di Fermat*: in un punto di massimo o minimo locale interno la derivata (se c'è) è nulla (con dimostrazione). *Il teorema di Rolle* (con dimostrazione). *Il teorema del valor medio di Lagrange*, con significato geometrico (con dimostrazione). Il teorema del valor medio di Cauchy (senza dimostrazione). Il teorema della derivata nulla: una funzione derivabile su un intervallo è costante se e solo se la derivata è identicamente nulla. Teorema: una funzione derivabile su un intervallo è debolmente crescente (o decrescente) se e solo se la derivata è ≥ 0 (rispettivamente ≤ 0) (con dimostrazione). *Il teorema dell'Hôpital* sulle forme indeterminate (con dimostrazione in uno dei casi). Esempio di una funzione che ha derivata nulla sul suo dominio, ma non è costante. Derivata seconda e successive. La convessità e la concavità di una funzione in termini di posizione rispetto alle rette tangenti. Teorema: una funzione derivabile due volte è convessa (o concava) su un intervallo se e solo se la derivata seconda è ≥ 0 (rispettivamente ≤ 0) (con dimostrazione). Asintoti obliqui del grafico di una funzione: definizione, criterio pratico ed esempi. Esempio di uno studio di funzione.

Area, integrali e primitive. Introduzione al concetto di integrale, motivato col problema delle aree dei trapezoidi. Definizione di trapezoide. Suddivisioni marcate, plurirettangoli, somme di Riemann. Esplorazione dell'idea che le somme di Riemann si stabilizzano quando la suddivisione si infittisce. Ampiezza di una suddivisione. Definizione di integrale secondo Riemann. Enunciato del teorema fondamentale del calcolo. Alcuni esempi del calcolo di aree. Il problema di trovare primitive di una funzione data. Proprietà di base delle primitive: non sono mai uniche, su un intervallo due primitive differiscono per una costante, linearità. Integrali immediati e quasi immediati. Integrazione per parti. Integrazione per sostituzione (o cambio di variabili). Esercizi sull'integrale per sostituzione. Integrale di funzioni razionali. Riduzione di grado con la divisione dei polinomi. Caso di denominatore quadratico con radici reali distinte: scomposizione in fratti semplici. Caso di denominatore con radici reali coincidenti: quadrato perfetto, che si riporta a integrali quasi immediati di tipo logaritmo e potenza. Caso di denominatore con radici complesse: ci si riporta a un integrale tipo logaritmo più uno tipo arcotangente, "completando il quadrato". Esempi.

I teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale

Oltre alla **dimostrazione** dei teoremi seguenti, lo studente dovrà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti che sono stati introdotti nel corso, e di saper illustrare definizioni e teoremi con **esempi**, qualora ce ne siano di semplici.

1. Le formule per le somme $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ e $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ con dimostrazione.
2. Il teorema di Bolzano-Weierstrass: un sottinsieme limitato di $\mathbb{R}$ che contenga infiniti punti ha almeno un punto di accumulazione.
3. Il teorema del limite della somma di due funzioni aventi limiti finiti.
4. La successione fondamentale $(1 + 1/n)^n$: dimostrazione che è crescente, dimostrazione che la successione ausiliaria $(1 + 1/n)^{n+1}$ è decrescente, e dimostrazione che hanno entrambe limite finito, coincidente
5. Teorema dell'esistenza degli zeri.
6. Le funzioni derivabili sono continue. Esempio di funzione continua ma non derivabile.
7. La derivata di somma, prodotto di due funzioni derivabili.
8. Teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno una funzione derivabile ha derivata nulla.
9. Teorema di Rolle, con significato geometrico.
10. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.
11. Regola de l'Hôpital: enunciato generale, dimostrazione nel caso $0/0$ in un punto finito con limite finito.