Università degli Studi di Udine Anno Accademico 2009/2010

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Triennale in Informatica e in TWM

Analisi Matematica

Prof. Gianluca Gorni

Testo di riferimento: M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli, *Analisi matematica*, MacGraw-Hill, ISBN: 9788838662348. Materiale didattico attinente al corso è disponibile presso

`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Analisi1`

Regolamento d'esame: Ci sono tre modi per ottenere i crediti del corso: (a) due prove parziali scritte senza orale, (b) due prove parziali scritte più orale, (c) un singolo scritto globale più orale. Al termine dei due periodi didattici si svolgono i 2 **"compitini"** (prove parziali), ognuno con votazione data in trentesimi. Chi prende meno di 12 in un compitino deve passare alla modalità scritto globale più orale. Chi sostiene i due compitini si iscriva al primo appello orale su esse3. Per chi supera tutti e due i compitini con voto di almeno 12, si calcola la **media** dei due voti, arrotondata per eccesso, e troncata al tetto massimo di 30; tale media verrà inserita su esse3 al primo appello orale (per chi si è iscritto). A quel punto che trova la media può segnalare su esse3 la sua accettazione come voto definitivo, oppure può presentarsi a sostenere un orale, che di solito migliora di qualche punto il voto, in un appello orale a scelta. La **lode** si può avere soltanto con l'orale. Per chi ha una media ≥ 12 e < 18 l'orale è obbligatorio.

Lo studente che i compitini o non li ha fatti, o non li ha superati, o li ha superati ma con voto che non l'aggrada, deve superare **uno scritto globale e un orale.** Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere in che appello dare l'orale. Si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e vale l'ultimo scritto consegnato. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento.

Gli orali sono di sola teoria. Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco nell'ultima pagina.

Programma Dettagliato

Insiemi numerici. Richiami sugli insiemi numerici: numeri naturali, numeri interi, numeri razionali, numeri reali. Proprietà algebriche della somma e del prodotto: commutativa, associativa, distributiva, esistenza dello zero e dell'unità, esistenza di opposti e reciproci. Proprietà della relazione di ordinamento: riflessiva, antisimmetrica, transitiva, tricotomia. Proprietà che legano le operazioni di somma e prodotto con l'ordinamento: a una disuguaglianza si può sommare membro a membro una stessa quantità, e la si può moltiplicare membro a membro per un numero positivo. Proprietà di densità dei numeri razionali: fra due numeri reali distinti ci sono sempre infiniti numeri razionali. Proprietà di Archimede: dati due numeri positivi, esiste sempre un multiplo intero del primo dei due che supera l'altro. Cenno alla rappresentazione decimale dei numeri reali e razionali. Numeri irrazionali. La radice quadrata di 2 è irrazionale (con dimostrazione). Fra due numeri reali distinti ci sono sempre infiniti irrazionali. I vari tipi di intervalli, a estremi finiti o infiniti, compresi o non compresi. Il valore assoluto di un numero reale. Definizione di maggiorante e di minorante di un insieme di numeri reali. Definizione di massimo e di minimo di un insieme di numeri reali. Gli insiemi finiti hanno sempre massimo e minimo. Esempi. Definizione di estremo superiore e di estremo inferiore di un insieme di numeri reali (caso limitato e caso non limitato). Il principio di completezza dei numeri reali: ogni insieme (limitato) di numeri reali ha sempre estremo superiore ed estremo inferiore.

Funzioni elementari e induzione. La radice aritmetica n-esima di un numero reale positivo. Potenze con esponente razionale o reale. Proprietà delle potenze. Esempi. Definizione di logaritmo in base a. Proprietà del logaritmo. Esempi. Disuguaglianza triangolare: $|x + y| \le |x| + |y|$. Sommatorie. La formula della somma di una progressione geometrica. Il principio di induzione. Esempi: *le formule per le somme* $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ *e* $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$. La disuguaglianza di Bernoulli. Ripasso sulle funzioni trigonometriche: seno, coseno, tangente. Generalità sulle funzioni: dominio, dominio naturale, codominio, grafico, immagine. Esempi. Definizione di successione e suo grafico. Definizione di funzione limitata, e di massimo/minimo ed estremo superiore/inferiore di una funzione a valori reali. La funzione inversa di una funzione iniettiva. Come si disegna il grafico della funzione inversa di una funzione reale di una variabile reale. Le funzioni trigonometriche inverse: arcoseno, arcocoseno, arcotangente.

Elementi di topologia. Distanza fra due punti, intorno sferico di un punto, prime proprietà degli intorni. Retta ampliata, intorni di infinito. Definizione di punto di accumulazione e di punto isolato di un insieme. Esempi. Ogni intorno di un punto di accumulazione contiene infiniti punti dell'insieme (con dimostrazione). *Il teorema di Bolzano-Weierstrass: un sottinsieme limitato di* $\mathbb{R}$ *che contenga infiniti punti ha almeno un punto di accumulazione (dimostrato col procedimento di bisezione).* Proprietà vere definitivamente per x che tende a x_0. L'estremo superiore di un insieme limitato superiormente è o un punto isolato o un punto di accumulazione. Esempi ed esercizi. Punti interni, esterni e di frontiera per un insieme. Insiemi aperti e insiemi chiusi. Chiusura di un insieme. Per un sottinsieme E di $\mathbb{R}$ si equivalgono: (a) E è chiuso; (b) tutti i punti di frontiera di E appartengono a E; (c) tutti i punti di accumulazione di E appartengono a E (con dimostrazione). Un sottinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ ha sempre minimo e massimo.

Limiti. Esempi introduttivi al concetto di limite. Lo schema generale "quando la variabile indipendente è circa uguale a un valore, la variabile dipendente è circa uguale a un altro valore". La struttura della definizione di limite: precisione in partenza, precisione in arrivo, e l'ordine in cui vengono assegnate le precisioni. Definizione rigorosa in termini di intorni. Varianti della definizione di limite: limiti da destra o da sinistra, per eccesso o per difetto. Studio di alcuni limiti usando la definizione. Se il limite è maggiore (o minore) di un numero, allora anche la funzione è definitivamente maggiore (o minore) di quel numero. Se una funzione è $\ge$ (o $\le$) di un numero, allora anche il limite lo è. Il teorema di permanenza del segno.*Il teorema dell'algebra dei limiti: limite di prodotto per costante, somma, prodotto, reciproco e quoziente di funzioni aventi limiti finiti. Dimostrazione per il caso della somma e del prodotto.* Il teorema del confronto (detto anche "dei carabinieri"; solo enunciato). La casistica delle situazioni escluse dal teorema. Le "forme indeterminate" $+\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞. Il limite delle funzioni monotone (solo enunciato). Il teorema del limite della funzione composta (o del cambio di variabile; solo enunciato). I limiti notevoli di potenze ed esponenziali. Le potenze con base ed esponente entrambi variabili: le forme indeterminate 0^0, ∞^0, 1^∞. I limiti notevoli di a^x/x^n e $(\log x)/x^n$ per $x \to +\infty$. Il limite notevole $(\operatorname{sen} x)/x \to 1$ per $x \to 0$ (con dimostrazione). Il limite notevole $(1-\cos x)/x^2 \to 1/2$ per $x \to 0$. Il limite notevole $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ (solo enunciato). Esponenziali e logaritmi in base e. I limiti notevoli $(e^x-1)/x \to 1$, $(\ln(1+x))/x \to 1$ per $x \to 0$. Come si risolvono le disequazioni con radicali della forma $\sqrt{a} > b$, $\sqrt{a} < b$. Disequazioni con massimi, minimi e valori assoluti. Esercizi. Alcuni limiti notevoli di successioni: $a^n/n! \to 0$, $n!/n^n \to 0$ e simili. Esercizi. *La successione fondamentale* $(1+1/n)^n$*: dimostrazione che è crescente, dimostrazione che la successione ausiliaria* $(1+1/n)^{n+1}$ *è decrescente, e dimostrazione che hanno entrambe limite finito, coincidente.* Definizione del numero di Nepero e. Un problema di matematica finanziaria in cui compare naturalmente la successione fondamentale $(1+1/n)^n$ e il numero e. Limiti notevoli collegati al limite fondamentale. Esercizi.

Sottosuccessioni. Il concetto di sottosuccessione e come si esprime formalmente: a_{n_k}, dove $k \mapsto n_k$ è una successione strettamente crescente a valori nei numeri naturali. Una successione ha limite se e solo se ogni sua sottosuccessione ha quello stesso limite. Il teorema di Weierstrass per le successioni: se una successione è limitata, allora ammette una sottosuccessione convergente (senza dimostrazione). Definizione di successione di Cauchy (o successione fondamentale) e il criterio di convergenza di Cauchy (solo enunciato).

Successioni ricorsive. Esempi di successioni definite ricorsivamente. Tecniche per studiare il limite di successioni ricorsive. Esempi: $a_{n+1} = a_n^2$, $a_n = -a_{n-1}$. Studio di successioni ricorsive: $a_n = a_{n-1}/(1+a_{n-1})$, Fibonacci, rapporto fra i termini successivi della successione di Fibonacci.

Funzioni continue. Richiamo sulla definizione di continuità di una funzione. Continuità destra e sinistra. Teorema di permanenza del segno. Casistica dei punti di discontinuità (eliminabili, salto, prima e seconda specie). Le funzioni monotone possono avere discontinuità soltanto di tipo salto. *Teorema dell'esistenza degli zeri, dimostrato col metodo di bisezione.* Teorema dei valori intermedi (senza dimostrazione). Rapporti fra continuità, monotonia, invertibilità e valori intermedi per funzioni definite su un intervallo (senza dimostrazione). Definizione di compattezza (sequenziale) per un insieme di numeri reali. Teorema: un insieme è compatto se e solo se è chiuso e limitato (con dimostrazione). Una funzione continua manda compatti in compatti (con dimostrazione). Teorema di Weierstraß sui massimi e minimi di funzioni continue su un intervallo compatto (con dimostrazione). Definizione di funzione lipschitziana. Esempi di funzioni lipschitziane o non lipschitziane: $\operatorname{sen} x$, x^2, $\sqrt{x}$. Cenno alla definizione di uniforme continuità.

La derivata. Il concetto di derivata introdotto usando l'idea di zoom nel grafico di una funzione. Definizione di derivata in termini del rapporto incrementale. Notazioni per la derivata. Derivata di una costante, della funzione lineare $ax+b$, delle potenze x^2, x^3, x^n, dell'esponenziale e^x, del valore assoluto. *Una funzione derivabile è anche continua (con dimostrazione). Ammonimento sulle funzioni continue non derivabili.* Derivate destre e sinistre, punti angolosi e cuspidi. La derivata di una funzione pari è una funzione dispari (con dimostrazione). *Algebra delle derivate: derivata di prodotto di una funzione per una costante, della somma, differenza, prodotto e quoziente di due funzioni (con dimostrazione).* Derivata della funzione composta (con dimostrazione). Esempi di calcolo di derivate di funzioni composte. Derivata della funzione inversa (con dimostrazione). Derivata di arcoseno, arcocoseno e arcotangente. Riepilogo delle derivate delle funzioni elementari. Esercizi di calcolo di derivate.

Funzioni derivabili e studio di funzione. *Teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno una funzione derivabile ha derivata nulla.* Definizione di punto stazionario (o critico). *Teorema di Rolle (con dimostrazione e significato geometrico). Teorema del valor medio di Lagrange (con dimostrazione e significato geometrico).* Teorema del valor medio di Cauchy (senza dimostrazione). *Il teorema de L'Hôpital per le forme indeterminate* $0/0$ *e* ∞/∞ *(dimostrazione per il caso* $0/0$ *in un punto finito).* Come si usa la regola de L'Hôpital. Esempi di calcolo di limiti usando la regola de L'Hôpital. Conseguenza della regola de L'Hôpital: se $f(x)$ è continua in x_0 e $f'(x)$ ha limite per $x \to x_0$ allora $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$. Derivata seconda, terza e successive. Definizione: una funzione derivabile è detta convessa se il suo grafico è al di sopra di tutte le sue rette tangenti; è detta concava se è al di sotto delle rette tangenti. Esempi grafici di funzioni convesse, concave, e nessuno delle due. Criterio di convessità usando la derivata seconda. Una funzione è convessa su un intervallo se e solo se la sua derivata seconda è maggiore o uguale a zero su tutto l'intervallo (con dimostrazione). Definizione di flesso come punto in cui si passa da convesso a concavo o viceversa. Esempio. Definizione di retta asintotica obliqua. Criterio pratico per trovare eventuali rette asintotiche. Esempio di calcolo di asintoti. Studio di funzioni: generalità. Esempio di studio di funzione.

Area, integrali e primitive. Introduzione al concetto di integrale. Il problema dell'area delle figure piane curvilinee. I trapezoidi e i plurirettangoli. Suddivisioni marcate di un intervallo e somme di Riemann. All'infittirsi della suddivisione, le somme di Riemann si stabilizzano attorno a un valore limite. Definizione di integrale secondo Riemann. Cenno ad altre teorie dell'integrazione. Enunciato del teorema fondamentale del calcolo. Esempi di applicazione del teorema fondamentale. Definizione di funzione primitiva (o antiderivata, o "integrale indefinito") di una funzione data, e sua connessione col problema dell'area. La primitiva, se c'è, non è mai unica. Su un intervallo due primitive differiscono sempre per una costante. Linearità dell'integrale. Primitive immediate. Esempi. Primitive "quasi" immediate. Esempi. Primitive "quasi" immediate: esempi. Integrazione per parti. Esempi. Esempi. Integrazione per sostituzione (cambio di variabile): prima e seconda versione. Esempi. Tecniche per l'integrazione di funzioni razionali: riduzione di grado del numeratore, decomposizione in fratti semplici, caso di denominatore di grado 2 con discriminante negativo.

I teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale

Oltre alla **dimostrazione** dei teoremi seguenti, lo studente dovrà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti che sono stati introdotti nel corso, e di saper illustrare definizioni e teoremi con **esempi**, qualora ce ne siano di semplici.

1. Le formule per le somme $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ e $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ con dimostrazione.
2. Il teorema di Bolzano-Weierstrass: un sottinsieme limitato di $\mathbb{R}$ che contenga infiniti punti ha almeno un punto di accumulazione.
3. Il teorema del limite della somma e del prodotto di due funzioni aventi limiti finiti.
4. La successione fondamentale $(1 + 1/n)^n$: dimostrazione che è crescente, dimostrazione che la successione ausiliaria $(1 + 1/n)^{n+1}$ è decrescente, e dimostrazione che hanno entrambe limite finito, coincidente
5. Teorema dell'esistenza degli zeri.
6. Le funzioni derivabili sono continue. Esempio di funzione continua ma non derivabile.
7. La derivata di somma, prodotto e quoziente di due funzioni derivabili.
8. Teorema di Fermat: in un punto di massimo o minimo locale interno una funzione derivabile ha derivata nulla.
9. Teorema di Rolle, con significato geometrico.
10. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.
11. Regola de l'Hôpital: enunciato generale, dimostrazione nel caso $0/0$ in un punto finito con limite finito.