Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Triennale in Informatica

Analisi Matematica
Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni

Collaboratore: Dott. Stéphane Matiz

Testo di riferimento: Giulio Cesare Barozzi, *Primo Corso di Analisi Matematica*, Zanichelli. Materiale didattico attinente al corso è disponibile presso
`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Analisi1`

Regolamento d'esame: Ci sono tre modi per ottenere i crediti del corso: (a) due prove parziali scritte senza orale, (b) due prove parziali scritte più orale, (c) un singolo scritto globale più orale. Al termine dei due periodi didattici si svolgono i 2 **"compitini"** (prove parziali), ognuno con votazione data in trentesimi. Chi prende meno di 12 in un compitino deve passare alla modalità scritto globale più orale. Chi sostiene i due compitini si iscriva al primo appello orale su esse3. Per chi supera tutti e due i compitini con voto di almeno 12, si calcola la **media** dei due voti, arrotondata per eccesso, e troncata al tetto massimo di 30; tale media verrà inserita su esse3 al primo appello orale (per chi si è iscritto). A quel punto che trova la media può segnalare su esse3 la sua accettazione come voto definitivo, oppure può presentarsi a sostenere un orale, che di solito migliora di qualche punto il voto, in un appello orale a scelta. La **lode** si può avere soltanto con l'orale. Per chi ha una media ≥ 12 e < 18 l'orale è obbligatorio.

Lo studente che i compitini o non li ha fatti, o non li ha superati, o li ha superati con voto che non lo soddisfa, deve superare **uno scritto globale e un orale**. Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere in che appello dare l'orale. Si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e vale l'ultimo scritto consegnato. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento.

Gli orali sono di sola teoria. Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco nell'ultima pagina.

1. Numeri

Barozzi: Capitolo 1, Sezioni dalla 1.3 alla 1.6. Dispensa in rete.

Numeri e disuguaglianze. Generalità sui vari tipi di numeri: interi, zero, frazioni, numeri negativi, numeri irrazionali, numeri complessi. I numeri reali visti come allineamenti decimali infiniti. Non tutti gli allineamenti decimali infiniti sono generabili da algoritmi: cenno di dimostrazione con l'argomento diagonale. Gli assiomi di base dell'insieme dei numeri reali: somma, prodotto e confronto. Assiomi algebrici: somma e prodotto sono commutativi e associativi, esistono gli elementi neutri zero e uno, esistono opposti e reciproci, e vale la proprietà distributiva. Esempi di proprietà derivate dagli assiomi: unicità dello zero, dell'uno, degli opposti e dei reciproci. Le operazioni di differenza e divisione. Proprietà di base della relazione d'ordine sui numeri reali. Regole di manipolazione delle disuguaglianze, facendo attenzione a quali trasformazioni sono reversibili e quali no. Valore assoluto, segno, max e min, e loro proprietà principali. Disuguaglianza triangolare. Esercizi su disuguaglianze e disequazioni, valore assoluto.

Induzione. Generalità sulle proposizioni e i predicati. Tabella di verità di un predicato. I predicati induttivi (o ereditari) sono quelli in cui Vero non è mai seguito da Falso. I tre tipi di predicati induttivi: quelli tutti veri, quelli con un numero finito di Falsi seguiti da tutti veri, e i tutti falsi. Il principio di induzione: se un predicato comincia con vero ed è induttivo, allora è sempre vero. Come si verifica se un predicato $P(n)$ è induttivo: si cerca di trasformare $P(n)$ in $P(n+1)$ usando trasformazioni che conservano la verità. Esempi di dimostrazioni per induzione: $1+2+3+\cdots+n = n(n+1)/2$, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, disuguaglianza di Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx$ per $x > -1$, prodotti notevoli $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$ e $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$. Conseguenze notevoli: formula per la somma geometrica $1+x+x^2+\cdots+x^n = (1-x^{n+1})/(1-x)$ se $x \neq 1$, e se $a, b > 0$ allora $a > b \iff a^n > b^n$. Dimostrazione per induzione che se $x_1, \ldots, x_n$ sono n numeri ≥ 0 con somma uguale a n, allora il loro prodotto è ≤ 1. Applicazione: la media geometrica è sempre minore o uguale alla media aritmetica. Conseguenza: $\sqrt[n]{a} \leq 1 + (a-1)/n$. Esercizi sull'induzione.

Massimi, minimi, estremi superiori e inferiori. Definizione di massimo e minimo di un insieme di numeri reali. Il massimo e il minimo quando esistono sono unici, ma possono non esistere. Gli insiemi finiti di numeri hanno sempre massimo e minimo. Definizione di maggiorante e minorante. Definizione di insiemi limitati superiormente o inferiormente. Quando esiste un maggiorante o un minorante, non è mai unico. Gli insiemi dei maggioranti e dei maggioranti sono sempre semirette (quando non sono vuoti). Calcolo dei maggioranti e dei minoranti di $[0,1]$, $]0,1[$, $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$. Principio di completezza dell'insieme dei numeri reali: le semirette dei maggioranti e dei minoranti sono sempre con estremo compreso. Giustificazione del principio di completezza usando le rappresentazioni decimali dei numeri reali (a grandi linee). Definizione di estremo superiore e inferiore di un insieme di numeri reali. Il caso di insiemi illimitati con estremi superiori o inferiori infiniti. Fra i numeri reali esiste la radice quadrata di 2: dimostrazione usando il principio di completezza. Esercizi su massimi, minimi, estremi superiori e inferiori. Esercizi su esponenziali e logaritmi.

2. Limiti e continuità

Barozzi: Capitolo 3 dall'Esempio 2.2-2.

Limiti e continuità. Esempi introduttivi al concetto di limite: $a_n = n/(n+1)$, la successione F_n di Fibonacci, la successione $r_n = F_{n+1}/F_n$. La pendenza della retta passante che congiunge $(1,1)$ e (x, x^2). Uno schema generale in cui rientrano gli esempi. Il concetto di limite. Definizione precisa di limite nei vari casi di punto e limite finiti o infiniti, e unilaterali. Esercizi sulla definizione di limite. Notazioni per il concetto di limite. Definizione di continuità.

Teoremi sui limiti. Teorema di unicità del limite. *Teorema del limite della somma di due funzioni che hanno limite finito* (con dimostrazione). Teoremi del limite della differenza, prodotto, quoziente di due funzioni che hanno limiti finiti. Limiti delle funzioni di base: costante, funzione identità, funzione reciproco. Limiti della somma, prodotto e quoziente negli altri casi. Forme indeterminate. Teorema del limite della funzione composta, ovvero cambio di variabile nel limite. *Teorema del confronto, detto anche dei carabinieri.* Continuità della funzione esponenziale e logaritmo. Definizione di funzione (debolmente o strettamente) crescente o decrescente, o monotona. Significato algebrico e geometrico. Le funzioni monotone hanno sempre limiti unilaterali.

Limiti fondamentali. Continuità delle funzioni trigonometriche. Dimostrazione geometrica della disuguaglianza $\operatorname{sen} x \leq x \leq \tan x$ per $0 \leq x \leq \pi/2$. Dimostrazione del limite fondamentale $(\operatorname{sen} x)/x \to 0$ per $x \to 0$. *La successione fondamentale $(1+1/n)^n$ è crescente, la successione ausiliaria $(1+1/n)^{n+1}$ è decrescente, e entrambe tendono a un numero compreso fra 2 e 3*, chiamato numero di Nepero (con dimostrazione). Un problema di interesse composto in finanza in cui interviene la successione fondamentale $(1+1/n)^n$. Limiti notevoli che si riconducono alla successione fondamentale $(1+1/n)^n$: $\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$, $\lim_{x\to 0}(e^x-1)/x = \lim_{x\to 0}(\log(1+x))/x = 1$. Alcuni limiti notevoli nel discreto: $n! \to +\infty$, $a^n/n! \to 0$, $n^n/n! \to +\infty$, $\sqrt[n]{a} \to 1$, $\sqrt[n]{n} \to 1$ per $n \to +\infty$. Esercizi sul calcolo dei limiti.

Teoremi sulle funzioni continue su tutto un intervallo. Distinzione fra proprietà puntuali, locali e globali di una funzione. Il teorema di Cantor sugli intervalli inclusi. *Il teorema della limitatezza*, dimostrato per assurdo col metodo di bisezione. *Il teorema del massimo e del minimo di Weierstrass*, dimostrato riconducendosi al teorema della limitatezza. *Il teorema dell'esistenza degli zeri*, dimostrato per bisezione. Il teorema dei valori intermedi. Relazioni fra continuità, invertibilità ed esistenza dei valori intermedi.

3. Derivate

Barozzi: Cap. 4; Sez. 7.2 e 7.3 (in parte).

La derivata. Esempio introduttivo al concetto di derivata. Definizione di rapporto incrementale, di derivata e di funzione derivabile in un punto. La derivabilità vista come proprietà dei grafici di essere praticamente rettilinei se visti "al microscopio". Calcolo della derivata di x^2, x^3, x^n. Derivata della somma e del prodotto di funzioni derivabili (con dimostrazione), *una funzione derivabile è continua* (con dimostrazione), *derivata di reciproco, rapporto, composizione* (con dimostrazione) e inversa (senza dimostrazione). Derivata delle funzioni elementari: esponenziale, logaritmo, seno e coseno, arcoseno, arcocoseno, arcotangente, x^c con c qualunque, x^x. Dimostrazione delle formule per la derivata di reciproco, quoziente, composizione e inversa.

Massimi e minimi. Punti di massimo e minimo locali e significato geometrico. *Nei punti di massimo e minimo locale interni la derivata (se c'è) si annulla. Esempio di un punto in cui la derivata di una certa funzione si annulla ma non è punto di massimo o minimo locale.*

Funzioni derivabili in tutto un intervallo e studio di funzione. Proprietà globali delle funzioni derivabili: *teorema di Rolle con significato geometrico. Il teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.* Conseguenze: teorema della derivata nulla, teorema di crescenza e decrescenza. Esempi. Il teorema del valor medio di Cauchy (senza dimostrazione). *La regola de l'Hôpital (dimostrazione nel caso finito).* Posizione del grafico di una funzione rispetto alle rette tangenti: funzioni convesse, concave, e flessi. Relazione fra convessità/concavità e segno della derivata seconda. Esercizi sulla regola de l'Hôpital. Asintoti del grafico di una funzione. Esercizi sullo studio di funzione.

Formula di Taylor. La notazione di Landau $o(f(x))$ e $O(f(x))$ per $x \to x_0$. La definizione di derivata rivisitata con la notazione di Landau. Il teorema dei polinomi di Taylor (dimostrazione del caso del secondo ordine). Polinomi di Taylor notevoli. Esercizi.

4. Integrali

Appunti del corso (dispensa in rete).

Integrale. Il problema dell'area di una regione piana. Trapezoidi. Suddivisioni marcate di un intervallo. Plurirettangoli e somme di Riemann. Idea guida: all'infittirsi della suddivisione, le somme di Riemann si stabilizzano attorno al valore dell'area. Esplorazioni numeriche. Ampiezza di una suddivisione. Interpretazione nel caso di funzioni non positive. Il simbolo di integrale. Definizione di integrale secondo Riemann. Cenno storico su altre definizioni di integrale. Una funzione non integrabile secondo Riemann: $1/\sqrt{x}$ su $[0,1]$. Difetti della definizione di Riemann. Definizione di calibro e di suddivisione adattata a un calibro. Definizione di integrale secondo Henstock-Kurzweil. Come i calibri possono regolare l'ampiezza degli intervallini e la posizione dei punti marcati. Il problema della costruzione di suddivisioni adattate a un dato calibro. Teorema di esistenza di suddivisioni adattate a un calibro. Esistenza di suddivisioni adattate a due calibri contemporaneamente. Unicità dell'integrale.

Il teorema fondamentale del calcolo. Enunciato del teorema fondamentale del calcolo. Esempi di applicazione. Lemma sulla derivata. Somme telescopiche. *Dimostrazione del teorema fondamentale.*

Calcolo di primitive. Definizione di funzione primitiva (o antiderivata, o "integrale indefinito") di una funzione data, e sua connessione col problema dell'area. La primitiva, se c'è, non è mai unica. Su un intervallo due primitive differiscono sempre per una costante. Una primitiva di $1/x$ è $\ln|x|$. Primitive immediate e primitive "quasi immediate". Integrazione per parti. Esempi. Integrazione per sostituzione (cambio di variabile): prima e seconda versione. Esempi. Tecniche per l'integrazione di funzioni razionali: riduzione di grado del numeratore, decomposizione in fratti semplici, caso di denominatore di grado 2 con discriminante negativo.

I teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale

Oltre alla **dimostrazione** dei teoremi seguenti, lo studente dovrà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti che sono stati introdotti nel corso, e di saper illustrare definizioni e teoremi con **esempi**, qualora ce ne siano di semplici.

1. Limite della somma di due funzioni aventi limiti finiti.
2. Teorema del confronto, o dei due carabinieri.
3. Dimostrazione che la successione fondamentale $(1 + 1/n)^n$ cresce, che $(1 + 1/n)^{n+1}$ decresce, e che hanno entrambe lo stesso limite finito compreso fra 2 e 3.
4. Il teorema della limitatezza: le funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato sono limitate.
5. Teorema di Weierstrass sui massimi e minimi globali delle funzioni continue su intervalli chiusi e limitati.
6. Teorema dell'esistenza degli zeri.
7. Le funzioni derivabili sono continue. Esempio di funzione continua ma non derivabile.
8. La derivata del reciproco di una funzione derivabile, e del rapporto e della funzione composta di due funzioni derivabili.
9. Nei punti di massimo e minimo locale interni la derivata (se c'è) si annulla. Esempio di un punto in cui la derivata di una certa funzione si annulla ma non è punto di massimo o minimo locale.
10. Teorema di Rolle, con significato geometrico.
11. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.
12. Regola de l'Hôpital: enunciato generale, dimostrazione nel caso $0/0$ in un punto finito con limite finito.
13. Il teorema fondamentale del calcolo.