Università degli Studi di Udine — Anno Accademico 2007/2008

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Triennale in Informatica

Analisi Matematica
Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni

Collaboratore: Dott. Stéphane Matiz

Testo di riferimento: Giulio Cesare Barozzi, *Primo Corso di Analisi Matematica*, Zanichelli. Materiale didattico attinente al corso è disponibile presso
`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Analisi1`

Regolamento d'esame: Ci sono tre modi per ottenere i crediti del corso: (a) tre compitini scritti senza orale, (b) tre compitini più orale, (c) un singolo scritto globale più orale. Durante il corso si svolgono 3 **"compitini"**, ognuno con votazione data in trentesimi. Per chi supera tutti i tre compitini con voto di almeno 12 si calcola la **media** dei tre voti, arrotondata per eccesso, e troncata al tetto massimo di 30. Chi ha la media ≥ 18 può accettarla come voto definitivo, oppure sostenere un orale, che di solito migliora di qualche punto il voto. In entrambi i casi lo studente scelga un appello orale, si iscriva su sindy indicando cosa intende fare, e si presenti di persona per l'orale o per firmare l'accettazione del voto finale. La **lode** si può avere soltanto con l'orale. Per chi ha una media ≥ 12 e < 18 l'orale è obbligatorio, e va dato in un appello a scelta.
Lo studente che i compitini o non li ha fatti, o non li ha superati, o li ha superati con voto che non lo soddisfa, deve superare **uno scritto globale e un orale**. Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere se dare l'orale nello stesso appello o nel successivo. In quest'ultimo caso si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e si ritorna a poter scegliere se dare l'orale subito o all'appello successivo. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento. Gli studenti del **vecchio ordinamento** possono iscriversi a questo esame su `sindy` premendo sul bottone "`Esami di altre iniziative didattiche`".
Gli orali sono di sola teoria. Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco nell'ultima pagina.

1. Numeri

Barozzi: Capitolo 1, Sezioni dalla 1.3 alla 1.6. Dispensa in rete.

Numeri e disuguaglianze. Numeri: naturali, zero, interi negativi, frazioni, numeri reali come lunghezze dei segmenti, numeri simbolici esatti, numeri decimali infiniti, numeri "costruibili". Esistono numeri decimali infiniti non costruibili. L'argomento diagonale di Cantor per mostrare che esistono numeri non costruibili (a grandi linee). L'insieme dei numeri reali visto come la banca dati di tutti i numeri decimali infiniti, costruibili e non. Manipolazione dei numeri reali: somma, prodotto, confronto. Proprietà di base puramente algebriche: commutativa, associativa, esistenza di zero e uno, esistenza di opposti e reciproci. Differenza, divisione e altre proprietà derivate. Proprietà di base dell'ordinamento dei numeri reali: transitiva, tricotomia, $0 < 1$, sommare un numero a una disuguaglianza, moltiplicare una disuguaglianza per un numero positivo, proprietà di Archimede. Varie proprietà delle disuguaglianze che derivano da quelle di base. Valore assoluto. Proprietà del valore assoluto: $|xy| = |x| \cdot |y|$, $|x| < L \iff -L < x < L$, $-|x| \le x \le |x|$, disuguaglianza triangolare $|x + y| \le |x| + |y|$, interpretazione di $|x - y|$ come distanza fra x e y. Il segno di x.

Induzione. Introduzione al principio di induzione: proposizioni, predicati, tabelle di verità di predicati sui numeri naturali, predicati induttivi (o ereditari). I predicati induttivi hanno tabella di verità di una delle tre forme FFFFF..., VVVVVVV..., FFFFVVVVV... Il principio di induzione: se un predicato sui numeri naturali è induttivo e se la sua tabella di verità comincia con V, allora il predicato è sempre vero. Il principio di induzione usato per dimostrare che $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$. Disequazioni con valore assoluto. Dimostrazione che $1^2+2^2+\cdots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$. Il prodotto notevole $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + \cdots + x + 1)$. Generalizzazione: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$. Conseguenze: unicità della radice n-esima aritmetica, e una disuguaglianza fra numeri positivi si può elevare alla n. Disuguaglianza di Bernoulli. Se la somma di n numeri positivi è uguale a n, allora il loro prodotto è ≤ 1. Conseguenza: disuguaglianza fra media aritmetica e media geometrica. La disuguaglianza $\sqrt[n]{a} \le 1 + (a-1)/n$.

Massimi, minimi, estremi superiori e inferiori. Definizione di massimo di un insieme di numeri reali. Il massimo e il minimo di un insieme, se esistono, sono unici. Gli insiemi finiti non vuoti hanno sempre massimo e minimo, ma gli insiemi infiniti non sempre. Definizione di maggiorante e minorante (stima per eccesso o per difetto). Insiemi limitati o illimitati superiormente o inferiormente. Esempi. Maggioranti e minoranti "non migliorabili". Estremo superiore e inferiore di un insieme. Il principio di completezza dei numeri reali: se di un insieme non vuoto c'è almeno un maggiorante (o minorante), allora c'è anche un maggiorante (o minorante) non migliorabile. Giustificazione del principio di completezza usando gli allineamenti decimali infiniti. L'esistenza della radice quadrata di 2 dimostrata usando il principio di completezza. Esistenza delle radici quadrate ed ennesime dei numeri positivi. Esercizi su massimi, minimi, estremi superiori e inferiori, disequazioni irrazionali.

Funzioni elementari. Richiami sulle potenze a esponente non intero, e la funzione esponenziale. Richiami sui logaritmi e sulle funzioni trigonometriche. Esercizi su disequazioni con max/min e razionali, domini di funzione, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche. Richiami sulle funzioni trigonometriche inverse.

2. Limiti e continuità

Barozzi: Capitolo 3 dall'Esempio 2.2-2.

Limiti e continuità. Esempi introduttivi al concetto di limite: $n/(n+1)$, la successione F_n di Fibonacci, la successione dei rapporti F_{n+1}/F_n. Il coefficiente angolare della secante alla parabola $y = x^2$ passante per $(1,1)$ e (x, x^2), quando x è vicino a 1. Schema generale: $x \cong x_0 \Rightarrow f(x) \cong L$. Definizione precisa di limite nel caso x_0, L finiti: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \operatorname{dom} f\ 0 < |x - x_0| \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Unicità del limite (con dimostrazione). Esercizi su massimi e minimi di insiemi infiniti discreti, e un limite con la definizione. Definizione di limite nei vari casi L, x_0 finiti o infiniti. Esempi di non esistenza del limite: $\operatorname{sen} x$ per $x \to +\infty$, $\operatorname{sen}(1/x)$ per $x \to 0$, $1/x$ per $x \to 0$ (cenno all'infinito "senza segno").

Teoremi sui limiti. Il problema del calcolo del limite di una funzione assegnata. Limite della funzione costante $f(x) \equiv c$ e della funzione identità $f(x) \equiv x$. *Teorema del limite della somma di due funzioni* (dimostrazione nel caso di limiti finiti in un punto finito). Il caso indeterminato $+\infty - \infty$. Esempi. Teorema del limite del prodotto di due funzioni (senza dimostrazione). Il caso indeterminato $0 \cdot \infty$. Limite del rapporto di due funzioni (senza dimostrazione). Forme indeterminate $0/0$ e ∞/∞. Esempi. Limite della funzione composta, ovvero cambio di variabile nei limiti (senza dimostrazione). Limite della radice quadrata, cubica, ecc. Esempi. Confronto: se $f(x) \le g(x)$ allora $\lim f(x) \le \lim g(x)$. *Teorema dei due carabinieri* (con dimostrazione). Teorema del carabiniere all'infinito. Esempi. Definizione di funzioni debolmente (o strettamente) crescenti (o decrescenti), e di funzioni monotòne. Significato in termini di conservazione (o ribaltamento) dell'ordine. Significato in termini di andamento del grafico. Esempi. Relazioni fra monotonia e limiti: le funzioni monotòne hanno sempre i limiti unilaterali. Non esistenza del limite per funzioni oscillanti. Le funzioni oscillanti di solito si possono "spezzare" in tratti crescenti e tratti decrescenti. Cenno a funzioni che non sono monotone in nessun intervallo, per quanto piccolo.

Limiti fondamentali. Continuità e limiti agli estremi di esponenziali e logaritmi (senza dimostrazione). Limiti notevoli di a^x/x e $(\log x)/x$ per $x \to +\infty$ (senza dimostrazione). Continuità di seno (con dimostrazione) e coseno. La disuguaglianza notevole $\operatorname{sen} x < x < \tan x$ per $0 < x < \pi/2$ (con dimostrazione). Il limite fondamentale $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x = 1$ (con dimostrazione). Successioni monotone: debolmente o strettamente crescenti o decrescenti. Le funzioni monotone hanno sempre i limiti unilaterali. *Dimostrazione che la successione* $(1 + 1/n)^n$ *cresce e che* $(1 + 1/n)^{n+1}$ *decresce, e che hanno entrambe lo stesso limite finito* compreso fra 2 e 3. Il numero di Nepero. Un problema finanziario in cui compare la successione $(1+1/n)^n$. Il limite di $(1+1/x)^x$ per $x \to \pm\infty$. Logaritmi ed esponenziali in base e. Altri limiti notevoli: $(1 + t)^{1/t} \to e$, $(\log(1 + t))/t \to 1$, $(e^t - 1)/t \to 1$ per $t \to 0$, $n! \to +\infty$, $a^n/n! \to 0$, $n^n/n! \to +\infty$, $\sqrt[n]{a} \to 1$, $\sqrt[n]{n} \to 1$ per $n \to +\infty$.

Teoremi sulle funzioni continue su tutto un intervallo. Il teorema di Cantor sugli intervalli inclusi. Proprietà globali delle funzioni continue: *il teorema di limitatezza* (una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continua è necessariamente limitata) (dimostrato col metodo di bisezione). Esempi. Definizione di punto di massimo o minimo globale. *Il teorema di Weierstrass sui massimi e minimi* (dimostrato applicando il teorema di limitatezza a una funzione ausiliaria). Esempi. *Il teorema dell'esistenza degli zeri* (dimostrato per bisezione). Esempi. Il teorema dei valori intermedi. Teorema sulle relazioni fra invertibilità, monotonia e proprietà dei valori intermedi (senza dimostrazione). Esempi di funzioni inverse notevoli: radici quadrate, logaritmo, arcoseno, arcocoseno, arcotangente.

3. Derivate

Barozzi: Cap. 4; Sez. 7.2 e 7.3 (in parte).

La derivata. Introduzione al concetto di derivata. Definizione di rapporto incrementale, derivata e derivabilità. Derivata di costanti e di polinomi di primo grado. Derivata della potenza x^n. Derivata di esponenziale, logaritmo, seno e coseno. Derivata della somma di funzioni derivabili. *Una funzione derivabile in un punto è anche continua nel punto. Esempio di funzione continua ma non derivabile.* Derivata del prodotto di una funzione per una costante. Esempi. Derivata del prodotto di funzioni derivabili. Derivata del reciproco. Derivata del rapporto. Derivata di tangente e cotangente. *Derivata della funzione composta.* Esempi. Derivata della funzione inversa. Interpretazione geometrica. Derivata di arcoseno, arcocoseno, arcotangente. Derivata della potenza x^α nel caso α non intero positivo. Derivata di $\log|x|$. Derivate seconde e successive.

Massimi e minimi. Punti di massimo e minimo locali e significato geometrico. Il segno delle derivate sinistre e destre nei punti di massimo o minimo locale. Nei punti di massimo e minimo locale interni la derivata (se c'è) si annulla. Esempio di un punto in cui la derivata si annulla ma non è di massimo o minimo locale.

Funzioni derivabili in tutto un intervallo e studio di funzione. Proprietà globali delle funzioni derivabili: *teorema di Rolle con significato geometrico. Il teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.* Conseguenze: teorema della derivata nulla, teorema di crescenza e decrescenza. Esempi. Il teorema del valor medio di Cauchy (senza dimostrazione). *La regola de l'Hôpital (dimostrazione nel caso finito).* Teorema del valor medio del secondo ordine, con dimostrazione. Posizione del grafico di una funzione rispetto alle rette tangenti: funzioni convesse, concave, e flessi. Relazione fra convessità/concavità e segno della derivata seconda. Esercizi sulla regola de l'Hôpital. Asintoti del grafico di una funzione. Esercizi sullo studio di funzione.

Formula di Taylor. Uno studio sperimentale degli scostamenti fra una funzione e la retta tangente. Il polinomio di Taylor del secondo ordine (con dimostrazione). Il polinomio di Taylor di ordine qualsiasi (senza dimostrazione). Il polinomio di MacLaurin.Polinomi di Taylor (MacLaurin) notevoli: esponenziale, seno, coseno, $1/(1-x)$, $\log(1+x)$. Il polinomio di MacLaurin di $1/(1-x)$ trovato usando il prodotto notevole $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) = 1-x^{n+1}$. Esercizio: il polinomio di Taylor di $1/(1+x)$ usando il prodotto notevole. La notazione di Landau $o(f(x))$ e $O(f(x))$ per $x \to x_0$. Prime regole di calcolo: $o(1)$ = infinitesimo, $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$, $g(x)o(f(x)) = o(f(x)g(x))$, $o(f(x))o(g(x)) = o(f(x)g(x))$, $o(cf(x)) = o(f(x))$. Riscrittura del teorema di Taylor usando la notazione di Landau. Esercizi sui polinomi di Taylor.

4. Integrali

Appunti del corso (dispensa in rete).

Integrale. Il problema dell'area di una regione piana. Trapezoidi. Suddivisioni marcate di un intervallo. Plurirettangoli e somme di Riemann. Idea guida: all'infittirsi della suddivisione, le somme di Riemann si stabilizzano attorno al valore dell'area. Esplorazioni numeriche. Ampiezza di una suddivisione. Interpretazione nel caso di funzioni non positive. Il simbolo di integrale. Definizione di integrale secondo Riemann. Cenno storico su altre definizioni di integrale. Una funzione non integrabile secondo Riemann: $1/\sqrt{x}$ su $[0,1]$. Difetti della definizione di Riemann. Definizione di calibro e di suddivisione adattata a un calibro. Definizione di integrale secondo Henstock-Kurzweil. Come i calibri possono regolare l'ampiezza degli intervallini e la posizione dei punti marcati. Il problema della costruzione di suddivisioni adattate a un dato calibro. Teorema di esistenza di suddivisioni adattate a un calibro. Esistenza di suddivisioni adattate a due calibri contemporaneamente. Unicità dell'integrale.

Il teorema fondamentale del calcolo. Enunciato del teorema fondamentale del calcolo. Esempi di applicazione. Lemma sulla derivata. Somme telescopiche. *Dimostrazione del teorema fondamentale.*

Calcolo di primitive. Definizione di funzione primitiva (o antiderivata, o "integrale indefinito") di una funzione data, e sua connessione col problema dell'area. La primitiva, se c'è, non è mai unica. Su un intervallo due primitive differiscono sempre per una costante. Una primitiva di $1/x$ è $\ln|x|$. Per le funzioni continue su un intervallo esistono primitive (senza dimostrazione), però possono non essere funzioni elementari. Esempi: e^x/x, $(\ln x)/x$, $1/\sqrt{1-(1/2)\,\mathrm{sen}^2\,x}$ non hanno primitive elementari. Cenno agli algoritmi per il calcolo delle primitive. Primitive immediate e primitive "quasi immediate". Integrazione per parti. Esempi. Integrazione per sostituzione (cambio di variabile): prima e seconda versione. Esempi. Tecniche per l'integrazione di funzioni razionali: riduzione di grado del numeratore, decomposizione in fratti semplici, caso di denominatore di grado 2 con discriminante negativo.

5. Serie

Barozzi: Sez. 6.1 esclusi l'esempio 6.1-6, Sez. 6.2 escluso l'esempio 6.2-3, Sez. 6.3 fino alla definizione 6.3-1, escluso l'approfondimento dell'esempio 6.3-1.

Serie convergenti, divergenti, indeterminate. Introduzione al concetto di serie: il paradosso di Zenone. La serie $1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$. Definizione di serie, di somma parziale e di somma, convergenza divergenza e indeterminazione. Una serie indeterminata: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. La serie geometrica: $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots$: studio della convergenza. Il criterio necessario: se $\sum a_n$ converge, allora $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Il criterio non è sufficiente. *La serie armonica* $1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \cdots$ *diverge: dimostrazione elementare associando opportunamente i termini.* Serie telescopiche: la serie di Mengoli $1/1 \cdot 2 + 1/2 \cdot 3 + 1/3 \cdot 4 + \cdots$.

Serie a termini positivi. Il problema di decidere se una serie converge, senza chiedere il valore della somma. Le serie a termini positivi o convergono o divergono; non sono mai indeterminate. Criterio del confronto. Linearità delle serie. La serie armonica generalizzata $1/1^\alpha + 1/2^\alpha + 1/3^\alpha + \cdots$: cenno storico al problema del calcolo della sua somma. Studio della convergenza della serie armonica generalizzata usando il confronto con un integrale. Il criterio del rapporto. La serie esponenziale $x^0/0! + x^1/1! + x^2/2! + \cdots + x^n/n! + \cdots$: dimostrazione della convergenza quando $x > 0$. Il criterio della radice ennesima.

Serie a termini di segno qualunque. Serie a termini di segno qualunque. Criterio della convergenza assoluta. La serie esponenziale $x^0/0! + x^1/1! + x^2/2! + \cdots + x^n/n! + \cdots$ converge anche quando $x < 0$. La serie armonica a segni alterni: $1/1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + \cdots$. Il criterio di Leibniz sulle serie a segni alterni. Esempi.

6. Funzioni di due variabili

Dispensa disponibile in rete:
`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Dispense/funzioni2var.pdf`.

Funzioni di due variabili e loro visualizzazione: grafici di superficie, grafici di densità, curve di livello. Cenno alla definizione di distanza fra punti del piano, e di limite e continuità per funzioni di due variabili. Casistica di funzioni discontinue. Il concetto di derivata parziale col significato geometrico. Piano tangente a una superficie. Esempi di funzioni continue con superficie senza piano tangente. Derivate parziali seconde. Enunciato del teorema di Schwarz sulle derivate seconde miste. Matrice hessiana di una funzione. Definizione dei punti stazionari. I tre tipi principali di punti stazionari: massimi locali, minimi locali, selle. Regola pratica per distinguere i tre tipi principali di punti stazionari usando la matrice hessiana. Casistica dei casi non coperti dalla regola: massimi e minimi deboli, flessi orizzontali, sella piatta, sella di scimmia, esempio di Peano. Esercizi su dominio, curve di livello e punti stazionari di funzioni di due variabili.

I teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale

Oltre alla **dimostrazione** dei teoremi seguenti, lo studente dovrà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti che sono stati introdotti nel corso, e di saper illustrare definizioni e teoremi con **esempi**, qualora ce ne siano di semplici.

1. Limite della somma di due funzioni aventi limiti finiti.
2. Teorema del confronto, o dei due carabinieri.
3. Dimostrazione che la successione fondamentale $(1 + 1/n)^n$ cresce, che $(1 + 1/n)^{n+1}$ decresce, e che hanno entrambe lo stesso limite finito compreso fra 2 e 3
4. Il teorema della limitatezza: le funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato sono limitate.
5. Teorema di Weierstrass sui massimi e minimi globali delle funzioni continue su intervalli chiusi e limitati.
6. Teorema dell'esistenza degli zeri.
7. Le funzioni derivabili sono continue. Esempio di funzione continua ma non derivabile.
8. La derivata della funzione composta di due funzioni derivabili.
9. Teorema di Rolle, con significato geometrico.
10. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.
11. Regola de l'Hôpital: enunciato generale, dimostrazione nel caso $0/0$ in un punto finito con limite finito.
12. Il teorema fondamentale del calcolo.
13. La serie armonica $1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \cdots$ diverge: dimostrazione elementare associando opportunamente i termini.