Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Triennale in Informatica

Analisi Matematica
Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni

Collaboratore: Dott. Stéphane Matiz

Testo di riferimento: Giulio Cesare Barozzi, *Primo Corso di Analisi Matematica*, Zanichelli. Materiale didattico attinente al corso è disponibile presso
`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Analisi1`

Regolamento d'esame: Ci sono tre modi per ottenere i crediti del corso: (a) tre compitini scritti senza orale, (b) tre compitini più orale, (c) un singolo scritto globale più orale. Durante il corso si svolgono 3 **"compitini"**, ognuno con votazione data in trentesimi. Per chi supera tutti i tre compitini con voto di almeno 12 si calcola la **media** dei tre voti, arrotondata per eccesso, e troncata al tetto massimo di 30. Chi ha la media ≥ 18 può accettarla come voto definitivo, oppure sostenere un orale, che di solito migliora di qualche punto il voto. In entrambi i casi lo studente scelga un appello orale, si iscriva su sindy indicando cosa intende fare, e si presenti di persona per l'orale o per firmare l'accettazione del voto finale. La **lode** si può avere soltanto con l'orale. Per chi ha una media ≥ 12 e < 18 l'orale è obbligatorio, e va dato in un appello a scelta.
Lo studente che i compitini o non li ha fatti, o non li ha superati, o li ha superati con voto che non lo soddisfa, deve superare **uno scritto globale e un orale**. Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere se dare l'orale nello stesso appello o nel successivo. In quest'ultimo caso si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e si ritorna a poter scegliere se dare l'orale subito o all'appello successivo. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento. Gli studenti del **vecchio ordinamento** possono iscriversi a questo esame su `sindy` premendo sul bottone "`Esami di altre iniziative didattiche`".
Gli orali sono di sola teoria. Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco nell'ultima pagina.

1. Numeri

Barozzi: Capitolo 1, Sezioni dalla 1.3 alla 1.6. Dispensa in rete.

Numeri e disuguaglianze. Numeri: interi, interi relativi, razionali, numeri simbolici esatti, numeri approssimati in virgola mobile. Allineamenti decimali infiniti e algoritmi per generarli: numeri calcolabili. Dimostrazione (a grandi linee) che esistono numeri non calcolabili. L'insieme dei numeri reali visto come l'insieme degli allineamenti decimali infiniti. Regole di base delle operazioni e dell'ordinamento dei numeri reali. Varie regole di manipolazione delle disuguaglianze. Il valore assoluto e il segno di un numero reale. La disuguaglianza triangolare. La distanza fra due numeri è il valore assoluto della differenza. Alcune formule utili sul valore assoluto:

$-|x| \le x \le |x|$, $|x| < y \iff -y < x < y$, $|x-y| < a \iff y-a < x < y+a$. Disequazioni col valore assoluto.

Induzione. Proposizioni e predicati. Tabella di verità di un predicato sui numeri naturali. Le tabelle di verità che non contengono la sequenza VF. Forma astratta del principio di induzione: se una tabella di verità inizia con V e non contiene la sequenza VF, allora è fatta di tutti V. Schema astratto di come si applica il principio di induzione: chiarire bene il predicato $P(n)$, studiare il caso base $P(1)$, e dimostrare che si può passare da $P(n)$ a $P(n+1)$ con passaggi che conservano la verità. Esempio banale. Esempio non banale: la formula $1+2+3+\cdots+n = n(n+1)/2$. Esempio: $1^2+2^2+\cdots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$. Il prodotto notevole $x^n-1 = (x-1)(x^{n-1}+\cdots+x+1)$. Generalizzazione: $a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$. Conseguenze: unicità della radice n-esima aritmetica, e una disuguaglianza fra numeri positivi si può elevare alla n. Disuguaglianza di Bernoulli. Se la somma di n numeri positivi è uguale a n, allora il loro prodotto è ≤ 1. Conseguenza: disuguaglianza fra media aritmetica e media geometrica. La disuguaglianza $\sqrt[n]{a} \le 1 + (a-1)/n$.

Massimi, minimi, estremi superiori e inferiori. Insiemi di numeri reali: definiti tramite criterio implicito, o come insieme dei valori di una funzione. Definizione di massimo di un insieme di numeri reali. Il massimo e il minimo di un insieme, se esistono, sono unici. Gli insiemi finiti non vuoti hanno sempre massimo e minimo, ma gli insiemi infiniti non sempre. Definizione di maggiorante e minorante (stima per eccesso o per difetto). Insiemi limitati o illimitati superiormente o inferiormente. Esempi. Il principio di completezza dei numeri reali: se di un insieme non vuoto c'è almeno un maggiorante (o minorante), allora l'insieme dei maggioranti (risp., minoranti) è sempre una semiretta con estremo compreso. Maggioranti e minoranti non migliorabili. Estremo superiore e inferiore di un insieme. Giustificazione del principio di completezza usando gli allineamenti decimali infiniti. Insiemi illimitati inferiormente o superiormente, uso dei simboli $+\infty, -\infty$. L'esistenza della radice quadrata di 2 dimostrata usando il principio di completezza. Esistenza delle radici quadrate ed ennesime dei numeri positivi. Esercizio sul calcolo degli estremi inferiore e superiore. Disequazioni con massimi e minimi e con radicali.

Funzioni elementari. Richiami sulle funzioni esponenziali e logaritmiche: proprietà di base e formule notevoli. Richiami sulle funzioni trigonometriche: definizione di seno, coseno, tangente, valori notevoli, formule notevoli, arcoseno e arcocoseno. La disuguaglianza $|\operatorname{sen} x| \le |x|$.

2. Limiti e continuità

Barozzi: Capitolo 3 dall'Esempio 2.2-2.

Limiti e continuità. Esempi introduttivi alla nozione di limite: la successione $n/(n+1)$, la successione di Fibonacci. Esempi introduttivi alla nozione di limite: i rapporti fra i termini successivi della successione di Fibonacci, la pendenza di una retta secante a una parabola. Definizione formale di limite finito di una funzione di variabile reale in un punto finito. Teorema dell'unicità del limite. Varianti della definizione di limite: limite finito all'infinito, limite infinito all'infinito, limite infinito a destra o a sinistra di un punto ecc. Definizione di continuità e confronto con la definizione di limite. Esempi di funzioni che non hanno limite: il segno di x per $x \to 0$, il $\operatorname{sen} x$ per $x \to +\infty$, il $\operatorname{sen}(1/x)$ per $x \to 0$, $1/x$ per $x \to 0$. Regola per il limite bilaterale quando sono noti i limiti da destra e da sinistra. Calcolo dei limiti nei casi base: funzione costante e funzione identità.

Teoremi sui limiti. *Teorema del limite della somma di due funzioni* (dimostrazione nel caso di limiti finiti in un punto finito). Il caso indeterminato $+\infty - \infty$. Esempi. Teorema del limite del prodotto di due funzioni (senza dimostrazione). Il caso indeterminato $0 \cdot \infty$. Limite del rapporto di due funzioni (senza dimostrazione). Forme indeterminate $0/0$ e ∞/∞. Esempi. Limite della funzione composta, ovvero cambio di variabile nei limiti (senza dimostrazione). Limite della radice quadrata, cubica, ecc. Esempi. Confronto: se $f(x) \leq g(x)$ allora $\lim f(x) \leq \lim g(x)$. *Teorema dei due carabinieri* (con dimostrazione). Teorema del carabiniere all'infinito. Esempi.

Limiti fondamentali. Continuità e limiti agli estremi di esponenziali e logaritmi (senza dimostrazione). Limiti notevoli di a^x/x e $(\log x)/x$ per $x \to +\infty$ (senza dimostrazione). Continuità di seno (con dimostrazione) e coseno. Il limite fondamentale $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)/x = 1$ (con dimostrazione). Successioni monotone: debolmente o strettamente crescenti o decrescenti. Le funzioni monotone hanno sempre i limiti unilaterali. *Dimostrazione che la successione* $(1 + 1/n)^n$ *cresce e che* $(1 + 1/n)^{n+1}$ *decresce, e che* $(1 + 1/n)^n$ *ha limite finito.* Il numero di Nepero. Un problema finanziario in cui compare la successione $(1 + 1/n)^n$. Il limite di $(1 + 1/x)^x$ per $x \to \pm\infty$. Logaritmi ed esponenziali in base e. Altri limiti notevoli: $(1 + t)^{1/t} \to e$, $(\log(1 + t))/t \to 1$, $(e^t - 1)/t \to 1$ per $t \to 0$, $n! \to +\infty$, $a^n/n! \to 0$, $n^n/n! \to +\infty$, $\sqrt[n]{a} \to 1$, $\sqrt[n]{n} \to 1$ per $n \to +\infty$.

Teoremi sulle funzioni continue su tutto un intervallo. Il teorema di Cantor sugli intervalli inclusi. Proprietà globali delle funzioni continue: *il teorema di limitatezza* (una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua è necessariamente limitata) (dimostrato col metodo di bisezione). Esempi. Definizione di punto di massimo o minimo globale. *Il teorema di Weierstrass sui massimi e minimi* (dimostrato riportandosi al teorema di limitatezza). Esempi. *Il teorema dell'esistenza degli zeri* (dimostrato per bisezione). Esempi. Il teorema dei valori intermedi. Teorema sulle relazioni fra invertibilità, monotonia e proprietà dei valori intermedi. Esempi di funzioni inverse notevoli: radici quadrate, logaritmo, arcoseno, arcocoseno, arcotangente.

3. Derivate

Barozzi: Cap. 4; Sez. 7.2 e 7.3 (in parte).

La derivata. Introduzione al concetto di derivata. Definizione di rapporto incrementale, derivata e derivabilità. Derivata di costanti e di polinomi di primo grado. Derivata della potenza x^n. Derivata di esponenziale, logaritmo, seno e coseno. Derivata della somma di funzioni derivabili. *Una funzione derivabile in un punto è anche continua nel punto. Esempio di funzione continua ma non derivabile.* Derivata del prodotto di una funzione per una costante. Esempi. Derivata del prodotto di funzioni derivabili. Derivata del reciproco. Derivata del rapporto. Derivata di tangente e cotangente. *Derivata della funzione composta.* Esempi. Derivata della funzione inversa. Interpretazione geometrica. Derivata di arcoseno, arcocoseno, arcotangente. Derivata della potenza x^α nel caso α non intero positivo. Derivata di $\log|x|$. Derivate seconde e successive.

Massimi e minimi. Punti di massimo e minimo locali e significato geometrico. Il segno delle derivate sinistre e destre nei punti di massimo o minimo locale. Nei punti di massimo e minimo locale interni la derivata (se c'è) si annulla. Esempio di un punto in cui la derivata si annulla ma non è di massimo o minimo locale.

Funzioni derivabili in tutto un intervallo e studio di funzione. Proprietà globali delle funzioni derivabili: *teorema di Rolle con significato geometrico. Il teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.* Conseguenze: teorema della derivata nulla, teorema di crescenza e decrescenza. Esempi. Il teorema del valor medio di Cauchy. *La regola de l'Hôpital (dimostrazione nel caso finito).* Teorema del valor medio del secondo ordine. Posizione del grafico di una funzione rispetto alle rette tangenti: funzioni convesse, concave, e flessi. Relazione fra convessità/concavità e segno della derivata seconda. Esercizi sulla regola de l'Hôpital. Asintoti del grafico di una funzione. Esercizi sullo studio di funzione.

Formula di Taylor. Una caratterizzazione della retta tangente: la retta $y = mx + q$ è la retta tangente al grafico di f in x_0 se e solo se $\lim_{x\to x_0}(f(x) - mx - q))/(x - x_0) = 0$. Generalizzazione: fra tutte le parabole $p(x) = a + b(x - x_0) = c(x - x_0)^2$, ce n'è una sola per la quale $\lim_{x\to x_0}(f(x) - p(x))/(x - x_0)^2 = 0$, e precisamente è quella per la quale $a = f(x_0)$, $b = f'(x_0)$, $c = f''(x_0)/2$. Ancora più in generale: fra tutti i polinomi di grado n della forma $p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$, ce n'è uno solo per il quale $\lim_{x\to x_0}(f(x) - p(x))/(x - x_0)^n = 0$, e precisamente è quello per il quale $a_i = f^{(i)}(x_0)/i!$, chiamato il polinomio di Taylor di ordine n della funzione f nel punto x_0. Il polinomio di Taylor prende il nome di polinomio di MacLaurin quando $x_0 = 0$. Funzioni con polinomi di MacLaurin notevoli: e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$. Derivate successive e calcolo dei polinomi di MacLaurin di $1/(1 - x)$. Lo stesso polinomio ottenuto dal prodotto notevole $(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1}$. Variante: i polinomi di MacLaurin di $1/(1 + x)$. I polinomi di MacLaurin di $\log(1+x)$. La notazione di Landau: $o(f(x))$ vuol dire $f(x)$ moltiplicata per un infinitesimo (cioè qualcosa di trascurabile rispetto a $f(x)$) quando $x \to x_0$. Regole di calcolo: $o(1) =$ infinitesimo, $o(f(x))+o(f(x)) = o(f(x))$, $g(x)o(f(x)) = o(f(x)g(x))$, $o(f(x))o(g(x)) = o(f(x)g(x))$, $o(cf(x)) = o(f(x))$. Esempi: $x^2 = o(x)$ per $x \to 0$, $x = o(x^2)$ per $x \to +\infty$, $\log x = o(x)$ per $x \to +\infty$. Il polinomio di Taylor di ordine n di $f(x)$ è l'unico fra i polinomi $p(x)$ di grado $\leq n$ per il quale $f(x) = p(x)+o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$. Esempio: calcolo del polinomio di MacLaurin di e^{2x}.

4. Integrali

Appunti del corso (dispensa in rete).

Integrale. Il problema dell'area di una regione piana. Trapezoidi. Suddivisioni marcate di un intervallo. Plurirettangoli e somme di Riemann. Idea guida: all'infittirsi della suddivisione, le somme di Riemann si stabilizzano attorno al valore dell'area. Esplorazioni numeriche. Ampiezza di una suddivisione. Interpretazione nel caso di funzioni non positive. Il simbolo di integrale. Definizione di integrale secondo Riemann. Cenno storico su altre definizioni di integrale. Una funzione non integrabile secondo Riemann: $1/\sqrt{x}$ su $[0, 1]$. Difetti della definizione di Riemann. Definizione di calibro e di suddivisione adattata a un calibro. Definizione di integrale secondo Henstock-Kurzweil. Come i calibri possono regolare l'ampiezza degli intervallini e la posizione dei punti marcati. Il problema della costruzione di suddivisioni adattate a un dato calibro. Teorema di esistenza di suddivisioni adattate a un calibro. Esistenza di suddivisioni adattate a due calibri contemporaneamente. Unicità dell'integrale.

Il teorema fondamentale del calcolo. Enunciato del teorema fondamentale del calcolo. Esempi di applicazione. Lemma sulla derivata. Somme telescopiche. *Dimostrazione del teorema fondamentale.*

Calcolo di primitive. Definizione di funzione primitiva (o antiderivata, o "integrale indefinito") di una funzione data, e sua connessione col problema dell'area. La primitiva, se c'è, non è mai unica. Su un intervallo due primitive differiscono sempre per una costante. Una primitiva di $1/x$ è $\ln|x|$. Per le funzioni continue su un intervallo esistono primitive (senza dimostrazione), però possono non essere funzioni elementari. Esempi: e^x/x, $(\ln x)/x$, $1/\sqrt{1-(1/2)\,\mathrm{sen}^2\,x}$ non hanno primitive elementari. Cenno agli algoritmi per il calcolo delle primitive. Primitive immediate e primitive "quasi immediate". Integrazione per parti. Esempi. Integrazione per sostituzione (cambio di variabile): prima e seconda versione. Esempi. Tecniche per l'integrazione di funzioni razionali: riduzione di grado del numeratore, decomposizione in fratti semplici, caso di denominatore di grado 2 con discriminante negativo.

5. Serie

Barozzi: Sez. 6.1 esclusi l'esempio 6.1-6, Sez. 6.2 escluso l'esempio 6.2-3, Sez. 6.3 fino alla definizione 6.3-1, escluso l'approfondimento dell'esempio 6.3-1.

Serie convergenti, divergenti, indeterminate. Introduzione al concetto di serie: il paradosso di Zenone. La serie $1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$. Definizione di serie, di somma parziale e di somma, convergenza divergenza e indeterminazione. Una serie indeterminata: $1-1+1-1+1-1+\cdots$. La serie geometrica: $1+r+r^2+r^3+\ldots$: studio della convergenza. Il criterio necessario: se $\sum a_n$ converge, allora $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Il criterio non è sufficiente. *La serie armonica* $1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \cdots$ *diverge: dimostrazione in due modi: associando opportunamente i termini, oppure minorando i termini e sfruttando la disuguaglianza* $(1+1/n)^n < e$. La serie $1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \ldots$ diverge. Serie telescopiche: la serie di Mengoli $1/1\cdot 2 + 1/2\cdot 3 + 1/3\cdot 4 + \cdots$.

Serie a termini positivi. Criterio del confronto. Linearità delle serie. La serie armonica generalizzata $1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots$: dimostrazione della convergenza tramite confronto con la serie di Mengoli. Note storiche. Il criterio del rapporto (prima e seconda versione). La serie esponenziale $x^0/0! + x^1/1! + x^2/2! + \cdots + x^n/n! + \cdots$: dimostrazione della convergenza quando $x > 0$. Il criterio della radice ennesima. Criterio del confronto asintotico. Esempi. Il criterio dell'integrale. Applicazione del criterio dell'integrale: convergenza della serie armonica generalizzata $1/1^\alpha + 1/2^\alpha + 1/3^\alpha + \cdots$.

Serie a termini di segno qualunque. Serie a termini di segno qualunque. Criterio della convergenza assoluta. La serie armonica a segni alterni: $1/1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + \cdots$. *Il criterio di Leibniz sulle serie a segni alterni.* Esempi.

6. Funzioni di due variabili

Dispensa disponibile in rete:
`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Dispense/funzioni2var.pdf`.

Funzioni di due variabili e loro visualizzazione: grafici di superficie, grafici di densità, curve di livello. Cenno alla definizione di distanza fra punti del piano, e di limite e continuità per funzioni di due variabili. Casistica di funzioni discontinue. Il concetto di derivata parziale col significato geometrico. Piano tangente a una superficie. Esempi di funzioni continue con superficie senza piano tangente. Derivate parziali seconde. Enunciato del teorema di Schwarz sulle derivate seconde miste. Matrice hessiana di una funzione. Definizione dei punti stazionari. I tre tipi principali di punti stazionari: massimi locali, minimi locali, selle. Regola pratica per distinguere i tre tipi principali di punti stazionari usando la matrice hessiana. Casistica dei casi non coperti dalla regola: massimi e minimi deboli, flessi orizzontali, sella piatta, sella di scimmia, esempio di Peano. Esercizi su dominio, curve di livello e punti stazionari di funzioni di due variabili.

I teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale

Oltre alla **dimostrazione** dei teoremi seguenti, lo studente dovrà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti che sono stati introdotti nel corso, e di saper illustrare definizioni e teoremi con **esempi**, qualora ce ne siano di semplici.

1. Limite della somma di due funzioni aventi limiti finiti.
2. Teorema del confronto, o dei due carabinieri.
3. La successione fondamentale $(1 + 1/n)^n$ è crescente, la successione ausiliaria $(1 + 1/n)^{n+1}$ è decrescente, e la successione fondamentale $(1 + 1/n)^n$ ha limite finito.
4. Il teorema della limitatezza: le funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato sono limitate.
5. Teorema di Weierstrass sui massimi e minimi globali delle funzioni continue su intervalli chiusi e limitati.
6. Teorema dell'esistenza degli zeri.
7. Le funzioni derivabili sono continue. Esempio di funzione continua ma non derivabile.
8. La derivata della funzione composta di due funzioni derivabili.
9. Teorema di Rolle, con significato geometrico.
10. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.
11. Regola de l'Hôpital: enunciato generale, dimostrazione nel caso $0/0$ in un punto finito con limite finito.
12. Il teorema fondamentale del calcolo.
13. La serie armonica $1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \cdots$ diverge: prima dimostrazione associando i termini in blocchi, e seconda dimostrazione sfruttando la disuguaglianza $(1 + 1/n)^n < e$.
14. Il criterio di Leibniz per la convergenza semplice delle serie a segno alterno.