Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Triennale in Informatica

Analisi Matematica
Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni

Testo di riferimento: Giulio Cesare Barozzi, *Primo Corso di Analisi Matematica*, Zanichelli. Materiale didattico attinente al corso è disponibile presso
`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Analisi1`

Regolamento d'esame: Ci sono tre modi per ottenere i crediti del corso: (a) tre compitini scritti senza orale, (b) tre compitini più orale, (c) un singolo scritto globale più orale. Durante il corso si svolgono 3 **"compitini"**, ognuno con votazione data in trentesimi. Per chi supera tutti i tre compitini con voto di almeno 12 si calcola la **media** dei tre voti, arrotondata per eccesso, e troncata al tetto massimo di 30. Chi ha la media ≥ 18 può accettarla come voto definitivo, oppure sostenere un orale, che di solito migliora di qualche punto il voto. In entrambi i casi lo studente scelga un appello orale, si iscriva su sindy indicando cosa intende fare, e si presenti di persona per l'orale o per firmare l'accettazione del voto finale. La **lode** si può avere soltanto con l'orale. Per chi ha una media ≥ 12 e < 18 l'orale è obbligatorio, e va dato in un appello a scelta.
Lo studente che i compitini o non li ha fatti, o non li ha superati, o li ha superati con voto che non lo soddisfa, deve superare **uno scritto globale e un orale**. Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere se dare l'orale nello stesso appello o nel successivo. In quest'ultimo caso si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e si ritorna a poter scegliere se dare l'orale subito o all'appello successivo. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento. Gli studenti del **vecchio ordinamento** possono iscriversi a questo esame su `sindy` premendo sul bottone "`Esami di altre iniziative didattiche`".
Gli orali sono di sola teoria. Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco nell'ultima pagina.

1. Numeri

Barozzi: Capitolo 1, Sezioni dalla 1.3 alla 1.6. Dispensa in rete.

Numeri, disuguaglianze e induzione. Numeri reali: concepire i numeri reali come allineamenti decimali infiniti. Le proprietà algebriche dell'addizione e della moltiplicazione sui reali. L'ordinamento dei numeri reali e suoi collegamenti con le operazioni. Regole per la manipolazione delle disuguaglianze. Esercizi su disuguaglianze e disequazioni. Definizione del valore assoluto e della funzione segno. Alcune proprietà del valore assoluto. Il valore assoluto della differenza di due numeri è la loro distanza. Disuguaglianza triangolare. Disequazioni contenenti valori assoluti. Esercizi sulle disequazioni.

Induzione. Predicati ereditari (o induttivi). Il principio dell'induzione. Dimostrazioni per induzione. La formula per la somma $1+2+3+\cdots+n$. La formula per la somma $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$. La disuguaglianza di Bernoulli. Dimostrazione della formula di scomposizione di x^n-1 e di a^n-b^n in fattori. Applicazione: se $a,b \geq 0$ allora $a<b$ equivale a $a^n<b^n$. Dimostrazione per induzione che se $x_1,x_2,\ldots,x_n$ sono n numeri non negativi con somma uguale a n, allora il loro prodotto è minore o uguale a 1. Applicazioni della disuguaglianza trovata: la media geometrica è sempre minore o uguale alla media aritmetica; la radice ennesima di a è minore o uguale a $1+(a-1)/n$. Esercizi di dimostrazione per induzione.

Massimi, minimi, estremi superiori e inferiori. Definizione di massimo e minimo di un insieme di numeri reali. Caso di un insieme finito. Non tutti gli insiemi di numeri hanno massimo o minimo. Definizione di limitatezza superiore o inferiore, di maggiorante, minorante, limitatezza. Esempi. L'insieme $\{n/(n+1) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ è limitato, ha minimo ma non massimo. L'insieme dei maggioranti dell'insieme $\{n/(n+1) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Definizione di estremo superiore o inferiore di un insieme limitato superiormente o inferiormente. Principio di completezza dell'insieme dei numeri reali. Giustificazione intuitiva del principio usando gli allineamenti decimali infiniti. Più e meno infinito, loro relazioni d'ordine con i numeri reali, e loro uso come estremo superiore o inferiore di insiemi non limitati. Intervalli, loro classificazione e notazioni. Esercizi sugli estremi superiori e inferiori. Esercizi sugli estremi superiori e inferiori. Dimostrazione dell'esistenza della radice quadrata di 2 usando il principio di completezza dei numeri reali. Disequazioni con massimi e minimi, con interpretazione geometrica. Disequazioni irrazionali.

Funzioni elementari. Richiami sulla definizione e le proprietà di esponenziale e logaritmo. Richiami sulla definizione e le proprietà delle funzioni trigonometriche.

2. Limiti e continuità

Barozzi: Capitolo 3 dall'Esempio 2.2-2.

Limiti e continuità. Esempi introduttivi al concetto di limite: una successione con limite finito, una successione con limite infinito, una funzione con limite finito in un punto finito. Definizione di limite con epsilon e delta nel caso di limite finito in un punto finito. Definizione di punto di accumulazione di un insieme. Teorema di unicità del limite. Definizione di limite nel caso di limite finito all'infinito, e di limite infinito all'infinito. Limiti con infiniti negativi, limiti unilaterali, definizione di continuità. Esempi di calcolo di delta in funzione di epsilon.

Teoremi sui limiti. *Teorema del limite della somma di due funzioni aventi limiti finiti.* Limite del prodotto e quoziente di funzioni aventi limite. Continuità di somma, prodotto, quoziente di funzioni continue. Forme indeterminate. Esempi. Limite del quoziente. Limite del valore assoluto e della radice. *Teorema del confronto, o dei carabinieri.*

Limiti fondamentali. La funzione seno non ha limite all'infinito, e il $sen(1/x)$ non ha limite in 0. Limiti della funzione esponenziale (senza dimostrazione). La disuguaglianza $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$. Il seno e coseno sono funzioni continue. La disuguaglianza $|x| \leq \tan x$. Il limite fondamentale: $(\operatorname{sen} x)/x$ tende a 1 per x che tende a 0. Il limite di $(1-\cos x)/x^2$ per x che tende a 0. Continuità e limiti del logaritmo. I limiti di $(a^x)/x$, $(a^x)/x^n$ e $(\log x)/x$ per x che tende a $+\infty$. Esercizi. Funzioni monotòne: crescenti o decrescenti, strettamente o debolmente. Le funzioni monotòne hanno sempre i limiti unilaterali. La forma indeterminata 1^∞. *La successione fondamentale* $(1+1/n)^n$ *è crescente, la successione ausiliaria* $(1+1/n)^{n+1}$ *è decrescente, e la successione fondamentale* $(1+1/n)^n$ *ha limite finito*, detto numero di Nepero. Logaritmi naturali. Come nasce la successione fondamentale $(1+1/n)^n$ in un problema finanziario di interesse composto. Limiti notevoli che discendono dalla successione fondamentale: $(1+1/x)^x$ per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$, $(1+t)^{1/t}$ e $(1/t)\ln(1+t)$ e $(e^t-1)/t$ per $t \to 0$. Altri limiti notevoli: $a^n/n!$, $\sqrt[n]{a}$ per $n \to +\infty$. Esercizi sul calcolo di limiti con fattoriali e con forme indeterminate del tipo 1^∞, 0^0, ∞^0.

Teoremi sulle funzioni continue su tutto un intervallo. Proprietà globali delle funzioni continue: *il teorema della limitatezza, dimostrato per bisezione: le funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato sono limitate. Teorema di Weierstrass sui massimi e minimi globali delle funzioni continue su intervalli chiusi e limitati.* Esempi. *Il teorema dell'esistenza degli zeri.* Esempi esplicativi del teorema dell'esistenza degli zeri. Il teorema dei valori intermedi. Teorema sulle relazioni fra invertibilità, monotonia stretta e continuità per funzioni definite su intervalli.

3. Derivate

Barozzi: Cap. 4; Sez. 7.2 e 7.3 (in parte).

La derivata. Esempio introduttivo al concetto di derivata. Definizione di rapporto incrementale e di derivata di una funzione. Notazioni. Esempi: le derivate di $mx+q$, x^2, x^3. La derivata di x^n, e^x, $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$. *Le funzioni derivabili sono continue. Esempi di funzioni continue non derivabili: il valore assoluto e* $x\operatorname{sen}(1/x)$. Definizione di derivata destra e sinistra. Punti angolosi. Derivata della somma di funzioni, e del prodotto di una funzione per una costante. Derivata del prodotto, reciproco e quoziente di funzioni. Derivata della tangente. Esercizi sul calcolo di derivate. *La derivata della funzione composta di due funzioni derivabili.* Esercizi sulla derivata della funzione composta. La derivata della funzione inversa, con significato geometrico. La derivata di arcoseno, arcocoseno e arcotangente. Esercizi sul calcolo delle derivate.

Massimi e minimi. Punti di massimo e di minimo locale. Punti di massimo e minimo locale. Il segno della derivata destra e sinistra nei punti di minimo o massimo locale. La derivata (se esiste) si annulla nei punti di massimo o minimo interni. Casistica di punti di massimo e minimo locale, in particolare il valore assoluto e $x \mapsto x^3$.

Funzioni derivabili in tutto un intervallo e studio di funzione. Teoremi globali sulle funzioni derivabili: *il teorema di Rolle con significato geometrico*, e *il teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.* Il teorema della derivata nulla. Una funzione derivabile su un intervallo è debolmente crescente (risp. decrescente) se e solo se la derivata prima è maggiore o uguale (risp. minore o uguale) a zero su tutto l'intervallo. Il teorema del valor medio di Cauchy (senza dimostrazione). *La regola de l'Hôpital: enunciato generale, e dimostrazione nel caso di caso 0/0 con limite finito in un punto finito.* Esempi. Esercizi sulla regola de l'Hôpital e sullo studio di funzioni. Derivata seconda e derivate successive. Definizione di funzione convessa e di funzione concava (o che volge la concavità verso l'alto o verso il basso). Significato geometrico del segno della derivata seconda: una funzione derivabile due volte su un intervallo è convessa (o concava) se e solo se la derivata seconda è maggiore o uguale (risp. minore o uguale) a zero su tutto l'intervallo. Punti di flesso. Asintoti verticali, orizzontali e obliqui al grafico di una funzione. Esercizi sullo studio di funzioni.

Formula di Taylor. Il valore $m = f'(x_0)$ è l'unico per il quale $\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0) - m(x - x_0))/(x - x_0) = 0$. Similmente l'unico p per il quale $\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - p(x - x_0)^2)/(x - x_0) = 0$ è $p = f''(x_0)/2$. Il polinomio di Taylor $P_n(x)$ di ordine n di una funzione in un punto è l'unico polinomio di grado $\leq n$ per il quale $(f(x) - P_n(x))/(x - x_0)^n$ tende a 0 per $x \to x_0$, e vale $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k/k!$ (senza dimostrazione). Polinomi di MacLaurin. Primo esempio: il polinomi di MacLaurin dell'esponenziale. I polinomi di MacLaurin di seno e coseno. Fenomenologia illustrata dei polinomi di Taylor al crescere dell'ordine: l'adagiamento dei polinomi sulla funzione può migliorare su una zona sempre più ampia, oppure migliorare su una zona limitata ma peggiorare altrove, oppure ancora migliorare ma su una regione via via più piccola e adagiarsi progressivamente su un'altra funzione diversa o addirittura andare all'infinito. La notazione di Landau $o(f(x)) = f(x) \cdot$ infinitesimo. I polinomi di MacLaurin di $1/(1-x)$ dedotti dall'uguaglianza $1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)$. I polinomi di Maclaurin di $1/(1+x)$, $1/(1+x^2)$, $\log(1+x)$, $\arctan x$. Cenno al calcolo di polinomi di Maclaurin di combinazioni di funzioni usando la notazione di Landau. Esercizi.

4. Integrali

Appunti del corso (dispensa in rete).

Integrale. Introduzione all'integrale: generalità sul problema dell'area di una figura piana. Trapezoidi. Suddivisioni marcate di un intervallo e plurirettangoli. Somme di Riemann. L'idea di base che quando la suddivisione “si infittisce”, l'area del plurirettangolo si stabilizza attorno al “valore vero” dell'area. Esplorazioni numeriche per saggiare l'idea. Il semplice numero di intervallini non è un buon indice di “fittezza”. L'ampiezza di una suddivisione come la lunghezza dell'intevallino più lungo. Definizione di integrale secondo Riemann. La notazione di Leibniz per l'integrale. Interpretazione delle somme di Riemann e dell'integrale nel caso di funzioni non positive. Cenno storico alle varie teorie dell'integrale, in particolare all'integrale secondo Lebesgue e a quello secondo Henstock-Kurzweil. Un esempio di una funzione non integrabile secondo Riemann: $1/\sqrt{x}$ fra 0 e 1. Definizione di calibro e di suddivisione adattata a un calibro. Definizione di integrale secondo Henstock-Kurzweil. Confronto con l'integrale secondo Riemann. Come il meccanismo dei calibri può regolare l'ampiezza degl'intervallini e la posizione dei punti marcati. Il problema di costruire suddivisioni adattate a un dato calibro. Teorema di esistenza di suddivisioni adattate a un dato calibro. Suddivisioni adattate a due calibri contemporaneamente. Teorema di unicità dell'integrale.

Il teorema fondamentale del calcolo. *Enunciato del teorema fondamentale del calcolo.* Esempi di applicazione. Un lemma sulle funzioni derivabili. Somme telescopiche. *Dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo.*

Calcolo di primitive. Definizione di primitiva (o integrale indefinito). Il problema di trovare primitive elementari. Cenno a dei casi di funzioni elementari senza primitiva elementare. Due primitive su un intervallo differiscono per una costante. Primi esempi di calcolo di primitive. Notazione per l'integrale indefinito. Regole di base: $\int F' = F$, $D\int f = f$, $\int(f+g) = \int f + \int g$, $\int cf = c\int f$. Rassegna di integrali immediati. Integrali quasi immediati. Integrazione per parti. Esercizi sull'integrazione per parti. Integrazione per sostituzione, o cambio di variabile. Esempio: calcolo dell'area del cerchio. Esempi di calcolo di integrali per sostituzione. Integrali di funzioni razionali. Esempi.

5. Serie

Barozzi: Sez. 6.1 esclusi l'esempio 6.1-6, Sez. 6.2 escluso l'esempio 6.2-3, Sez. 6.3 fino alla definizione 6.3-1, escluso l'approfondimento dell'esempio 6.3-1.

Serie convergenti, divergenti, indeterminate. Introduzione al concetto di somma infinita, o serie: la somma del paradosso di Zenone $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \cdots$ e il numero decimale periodico 0,3333... Altri esempi: $1 + 1 + 1 + \cdots$, $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. La serie geometrica $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$: le sue somme parziali e il loro limite. La serie telescopica di Mengoli $1/(1 \cdot 2) + 1/(2 \cdot 3) + 1/(3 \cdot 4) + 1/(4 \cdot 5) + \cdots + 1/(n(n+1)) + \cdots$. Definizione generale di serie convergente, divergente o indeterminata in termini del limite delle somme parziali. Linearità delle serie: somma di due serie e prodotto di una serie per uno scalare. Criterio necessario per la convergenza è che il termine generale tenda a 0. *La serie armonica* $1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \cdots$ *diverge (nonostante il termine generale tenda a 0): prima dimostrazione associando i termini in blocchi, e seconda dimostrazione sfruttando la disuguaglianza* $(1 + 1/n)^n < e$. La serie $1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + 1/\sqrt{4} + \cdots$ diverge, nonostante il termine generale tenda a 0.

Serie a termini positivi. Serie a termini positivi: o convergono o divergono, non possono essere indeterminate. Criterio del confronto fra serie positive: se la più piccola diverge anche la più grande diverge, e se la più grande converge anche la la più piccola converge. La serie armonica generalizzata: $1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + \cdots$ converge: dimostrazione per confronto con la serie di Mengoli, e cenni alla storia di questa serie. Serie a termini positivi: criterio del rapporto, criterio della radice ennesima, criterio del confronto asintotico, criterio dell'integrale. Applicazione del criterio dell'integrale: la serie armonica generalizzata $\sum 1/n^\alpha$. Variante del criterio del confronto asintotico per le serie a termini positivi.

Serie a termini di segno qualunque. Il criterio della convergenza assoluta per le serie a termini di segno qualsiasi. *Il criterio di Leibniz per la convergenza semplice delle serie a segno alterno.* Esempio: la serie armonica a segni alterni $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \ldots$

6. Funzioni di due variabili

Dispensa disponibile in rete:
`http://www.dimi.uniud.it/gorni/Dispense/funzioni2var.pdf`.

Funzioni di due variabili e loro visualizzazione: superfici in tre dimensioni, grafici di densità, linee di livello. Esercizi su dominio e linee di livello. Cenni alla distanza, limiti e continuità in due variabili. Casistica di funzioni discontinue. Derivate parziali: significato geometrico e metodi di calcolo. Cenni al piano tangente ed esempi di superfici continue senza piano tangente. Derivate parziali seconde e matrice hessiana. Teorema di Schwarz sulle derivate seconde miste (senza dimostrazione). Definizione di punto stazionario (o critico). Prima casistica di punti stazionari: massimi locali, minimi locali e punti di sella. Regola pratica per classificare i punti stazionari usando la matrice hessiana (senza dimostrazione). Esercizi sui punti stazionari. Casistica di punti stazionari non decidibili dalla matrice hessiana.

I teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale

Oltre alla **dimostrazione** dei teoremi seguenti, lo studente dovrà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti che sono stati introdotti nel corso, e di saper illustrare definizioni e teoremi con **esempi**, qualora ce ne siano di semplici.

1. Limite della somma di due funzioni aventi limiti finiti.
2. Teorema del confronto, o dei due carabinieri.
3. La successione fondamentale $(1 + 1/n)^n$ è crescente, la successione ausiliaria $(1 + 1/n)^{n+1}$ è decrescente, e la successione fondamentale $(1 + 1/n)^n$ ha limite finito.
4. Il teorema della limitatezza: le funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato sono limitate.
5. Teorema di Weierstrass sui massimi e minimi globali delle funzioni continue su intervalli chiusi e limitati.
6. Teorema dell'esistenza degli zeri.
7. Le funzioni derivabili sono continue. Esempio di funzione continua ma non derivabile.
8. La derivata della funzione composta di due funzioni derivabili.
9. Teorema di Rolle, con significato geometrico.
10. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.
11. Regola de l'Hôpital: enunciato generale, dimostrazione nel caso $0/0$ in un punto finito con limite finito.
12. Il teorema fondamentale del calcolo.
13. La serie armonica $1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \cdots$ diverge: prima dimostrazione associando i termini in blocchi, e seconda dimostrazione sfruttando la disuguaglianza $(1 + 1/n)^n < e$.
14. Il criterio di Leibniz per la convergenza semplice delle serie a segno alterno.