Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Triennale in Informatica e in Tecnologie Web e Multimediali

# Analisi Matematica
# Programma Dettagliato

Prof. Gianluca Gorni, Dott. Paolo Baiti

Testo di riferimento: Giulio Cesare Barozzi, *Primo Corso di Analisi Matematica*, Zanichelli. Materiale didattico attinente al corso è disponibile presso
`http://www.dimi.uniud.it/~gorni/Analisi1`

**Regolamento d'esame:** Durante il corso si svolgono 3 **"compitini"**, ognuno con votazione data in trentesimi. Chi supera tutti i compitini con voto di almeno 12 è esonerato da altre prove scritte; per chi fra questi ha un voto medio $\geq 18$ l'orale è facoltativo (si faccia vivo/a a un appello orale per firmare il registro) e vale la media dei voti dei tre compitini, arrotondata per eccesso; la lode si può avere solo con l'orale; per chi ha una media $\geq 12$ e $< 18$ l'orale è obbligatorio, e va dato in un qualsiasi appello, pena l'annullamento dei compitini.
Gli studenti che non hanno fatto o superato i compitini devono sostenere **scritto e orale.** Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere se dare l'orale nello stesso appello o nel successivo. In quest'ultimo caso si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e si ritorna a poter scegliere se dare l'orale subito o all'appello successivo. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento. Gli studenti del **vecchio ordinamento** possono iscriversi a questo esame su `sindy` premendo sul bottone "`Esami di altre iniziative didattiche`".
Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

## 1. Numeri

Barozzi: Capitolo 1, Sezioni dalla 1.3 alla 1.6. Dispensa in rete.

**Numeri reali.** Numeri reali: rappresentazioni decimali infinite, numeri interi e frazioni, numeri simbolici esatti, numeri decimali approssimati. Proprietà di base dei numeri reali: proprietà algebriche delle quattro operazioni e loro legami con l'ordinamento. Concetto di massimo e minimo di un insieme di numeri reali. Gli insiemi finiti hanno sempre massimo e minimo, ma quelli infiniti no. Concetto di maggiorante e minorante, di limitatezza superiore e inferiore, e di estremo superiore e inferiore di un insieme di numeri reali. Il principio della completezza dei numeri reali: ogni sottinsieme non vuoto e limitato inferiormente (o inferiore) ha estremo superiore (inferiore). Giustificazione del principio usando gli allineamenti decimali. L'insieme delle frazioni della forma $1/n$ non ha minimo, ma lo 0 è l'estremo inferiore. Applicazione del principio della completezza: dimostrazione formale dell'esistenza della radice quadrata di 2. La radice di 2 non è razionale. Intervalli. Valore assoluto e sue principali proprietà.

**Induzione.** Generalità sulle proposizioni. Proposizioni induttive o ereditarie. Principio di induzione. Esempi: la formula per $1 + 2 + 3 + ... + n$, e la disuguaglianza di Bernoulli. La scomposizione $x^n - 1 = (x - 1)(1 + x + ... + x^{n-1})$ e sue conseguenze. Se la somma di $n$ numeri positivi fa $n$ allora il loro prodotto è minore o uguale a 1.

## 2. Limiti e continuità

Barozzi: Capitolo 3 dall'Esempio 2.2-2.

**Limiti e continuità.** Introduzione al concetto di limite. Studio della successione $n/(n+1)$, della successione di Fibonacci $F_n$ e (non rigorosamente) della successione dei rapporti $F_{n+1}/F_n$. Il coefficiente angolare della retta passante per i punti della parabola $y = x^2$ di ascissa 1 e $x$: tende a 2 quando $x$ tende a 1. Definizione rigorosa di limite $L$ di $f(x)$ per $x$ che tende a $x_0$ (eventualmente a destra o a sinistra) in alcuni dei casi possibili ($x_0$ e $L$ finiti o infiniti). Unicità del limite. La successione $(-1)^n$ non ha limite per $n$ the tende a infinito.

**Teoremi sui limiti.** *Limite della somma e del prodotto di due funzioni aventi limiti finiti.* Continuità di somma, prodotto e quoziente di funzioni continue. Teoremi del confronto. Le disuguaglianze deboli si conservano passando al limite. Teorema della permanenza del segno. *Teorema dei due carabinieri.* Cambio di variabile nei limiti, alias limite della funzione composta. Funzioni e successioni crescenti, decrescenti, monotone. Le successioni crescenti hanno sempre limite, che coincide con l'estremo superiore (con dimostrazione). Limiti delle successioni e funzioni monotone in generale.

**Limiti fondamentali.** Continuità di polinomi e funzioni razionali. Limite della funzione esponenziale all'infinito. Richiami sulle funzioni trigonometriche. La disuguaglianza $|\operatorname{sen} x| \le |x|$. La funzione seno è continua. La disuguaglianza $|x| \le |\tan x|$. Il limite fondamentale $(\operatorname{sen} x)/x$ per $x$ che tende a 0. *Studio della successione fondamentale* $(1 + 1/n)^n$ *e della sua associata* $(1 + 1/n)^{n+1}$. Il numero di Nepero. Come la successione $(1 + 1/n)^n$ compare in un problema finanziario. Calcolo della radice quadrata con un metodo iterativa.

**Altri limiti notevoli.** $\lim_{x\to+\infty}(1 + 1/x)^x$, $\lim_{x\to-\infty}(1 + 1/x)^x$, $\lim_{t\to0}(1 + t)^{1/t}$, $\lim_{t\to0}(\ln(1 + t))/t$, $\lim_{x\to0}(e^x - 1)/x$, $\lim_{x\to0}(1 - \cos x)/x^2$, $\lim_{n\to+\infty} a^n/n^p$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, $\lim_{n\to+\infty} n!/n^n$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$.

**Teoremi sulle funzioni continue su tutto un intervallo.** Teorema degli intervalli inclusi, di bisezione. *Le funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato sono limitate* (dimostrazione per bisezione). Definizione di punto di massimo o minimo globale. *Teorema di Weierstrass sui massimi e minimi delle funzioni continue su intervalli chiusi e limitati.* Definizione di zero di una funzione. *Teorema dell'esistenza degli zeri*, dimostrato per bisezione. Continuità della funzione inversa (senza dimostrazione). Richiami sulle funzioni inverse notevoli: radice ennesima, logaritmo, funzioni trigonometriche inverse.

## 3. Derivate

Barozzi: Sez. 4.1, 4.2, 4.3, Sez. 4.4 fino all'esempio 4.4-1 escluso; Sez. 4.5 esclusi il coroll. 3 e l'esempio 4.5-1; Prop. 4.6-1 e 4.6-3; Sez. 7.2 escluso l'es. 7.2-1; Sez. 7.3 fino alla prop. 7.3-1, Es. 7.3-3, Prop. 7.3-2, Laboratorio 7.4-1.

**La derivata.** Introduzione al concetto di derivata: pendenza della retta secante a una curva cartesiana. Rapporto incrementale di una funzione. Esempi di rapporti incrementali in fisica e in finanza. Definizione di derivabilità e di derivata. Derivata della funzione lineare, della potenza $x^n$, dell'esponenziale $e^x$, di seno e coseno, con dimostrazioni. *La derivabilità implica la continuità, ma non viceversa.* Esempi di funzioni continue ma non derivabili: il valore assoluto e $x \operatorname{sen}(1/x)$. Derivata sinistra e destra. Funzione derivata. Derivata seconda. Derivata di somma e prodotto di funzioni derivabili. Derivata del reciproco e del rapporto di funzioni derivabili. *Derivata della composizione di funzioni derivabili.* Derivata della funzione inversa. Esempi notevoli: derivata di tangente, radice quadrata, funzioni trigonometriche inverse.

**Massimi e minimi.** Punti di massimo e di minimo locale. Punti estremanti. La derivata (se esiste) si annulla nei punti estremanti interni. Casistica di punti di massimo e minimo locale, in particolare il valore assoluto e $x \mapsto x^3$.

**Funzioni derivabili in tutto un intervallo e studio di funzione.** *Teorema di Rolle, con significato geometrico. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.* Teorema della derivata nulla. Una funzione derivabile è debolmente crescente (o decrescente) in un intervallo se e solo se la derivata è maggiore (o minore) o uguale a zero su tutto l'intervallo. Teorema degli incrementi finiti di Cauchy (cenno di dimostrazione). Definizione di funzioni convesse e concave in termini di posizione rispetto alle rette tangenti. Una funzione derivabile due volte su un intervallo è convessa (o concava) se e solo se la derivata seconda è maggiore (risp. minore) o uguale a zero in tutto l'intervallo. *Regola dell'Hôpital (enunciato). Dimostrazione della regola de L'Hôpital nel caso* $0/0$ *in un punto finito con limite finito.* Uso della derivata seconda per decidere i massimi e minimi locali. Asintoti orizzontali e obliqui del grafico di funzioni.

**Formula di Taylor.** La notazione di Landau di "o piccolo e O grande". Riformulazione della derivabilità in termini di o piccolo. Formula di Taylor col resto di Peano (enunciato). Polinomi di Taylor e di MacLaurin. Simbolo di sommatoria. Confronto fra i grafici dell'esponenziale e del seno con i loro polinomi di MacLaurin. Il polinomio di Taylor della derivata è uguale alla derivata del polinomio di Taylor (coi gradi opportuni). Dimostrazione della formula di Taylor col resto di Peano. Formula di Taylor col resto di Lagrange (con cenno di dimostrazione). La formula di MacLaurin dell'esponenziale. L'esponenziale $e^x$ è uguale al limite di $1/0! + x/1! + (x^2)/2! + \ldots + (x^n)/n!$ per $n$ che tende a infinito. Il caso notevole $x = 1$. Polinomi di Taylor delle principali funzioni elementari.

## 4. Integrali

Appunti del corso (dispensa in rete).

**Integrale.** Il problema dell'area di una regione del piano. Trapezoidi e plurirettangoli. Suddivisioni marcate di un intervallo. Somme di Riemann associate a una funzione e a una suddivisione marcata. Calibri e suddivisioni adattate a un calibro. Definizione di integrabilità e di integrale usando i calibri.

**Il teorema fondamentale del calcolo.** Esistenza di suddivisioni marcate adattate a un dato calibro. Unicità dell'integrale. Somme telescopiche. Un lemma sulle funzioni derivabili. *Il teorema fondamentale del calcolo.* Primitive di una funzione.

**Altre proprietà dell'integrale.** Proprietà dell'integrale (senza dimostrazione): linearità, monotonia, disuguaglianza del valore assoluto, additività sugli intervalli, passaggio al limite su un estremo dell'intervallo. Integrali orientati.

**Calcolo di primitive.** Il problema del calcolo delle primitive, o integrali indefiniti. Primitive immediate. Primitive della somma di due funzioni, e del prodotto di una funzione per una costante. Integrali che si riportano alla formula della derivata della funzione composta. Formula dell'integrale per parti (per gli integrali indefiniti). Esempi. Cambio di variabile negli integrali indefiniti. Esempi. Calcolo dell'area del cerchio.

## 5. Serie

Barozzi: Sez. 6.1 esclusi gli esempi 6.1-5 e 6.1-6, Sez. 6.2 fino alla prop. 6.2-2' compresa, Esempio 6.2-3 fino a pag. 379, Prop. 6.2-3, Prop. 6.3-1, Esempio 6.3-1 escluso l'approfondimento, Prop. 6.3-2, Def. 6.3-1, Esempio 6.3-2.

**Serie convergenti, divergenti, indeterminate.** Il paradosso di Zenone e la serie $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots$ Somme parziali di una serie. Serie convergenti, divergenti, indeterminate. Le serie $0{,}333\dots$, $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$, $1 - 1 + 1 - 1 + 1\dots$ La serie geometrica in generale: formula per le somme parziali e risultati di convergenza. Non è vero che una serie converge se e solo se il termine generale è infinitesimo. *La serie armonica diverge: dimostrazione fatta raggruppando i termini con indici fra potenze successive di 2 e minorando. Altra dimostrazione usando una stima logaritmica delle somme parziali.* La serie di Mengoli. La serie di $1/\sqrt{n}$. Linearità della somma di serie convergenti. Condizione necessaria per la convergenza di una serie è che il termine generale sia infinitesimo.

**Serie a termini positivi.** Serie positive: non sono mai indeterminate. Criterio del confronto per le serie positive. La serie armonica generalizzata $1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots$: dimostrazione della convergenza per confronto con la serie di Mengoli, e cenno al valore della somma. Criterio del rapporto per la convergenza o divergenza di serie positive. Cenno alle serie di Taylor. La serie di MacLaurin della funzione esponenziale: dimostrazione della convergenza usando la formula di Taylor col resto di Lagrange, oppure usando il criterio del rapporto (per $x > 0$). Il criterio della radice ennesima per serie positive.

**Serie a termini di segno qualunque.** Serie armonica a segni alterni. *Criterio di Leibniz per la convergenza delle serie a segni alterni.* Serie a segno qualsiasi: criterio della convergenza assoluta. Uso del criterio della convergenza assoluta per la serie esponenziale quando $x < 0$. Criteri del rapporto e della radice combinati con la convergenza assoluta.

## 6. Funzioni di due variabili

Dispensa disponibile in rete:
`http://www.dimi.uniud.it/~gorni/Dispense/funzioni2var.pdf`.

Le funzioni reali di due variabili: visualizzazione con superfici in tre dimensioni, con grafici di densità, con curve di livello. Insieme di esistenza e insiemi di livello.

Alcuni esempi di funzioni non continue in un punto (illustrate per via grafica). Derivate parziali: significato geometrico e loro calcolo. Piano tangente (definizione geometrica). Esempi di funzioni continue senza piano tangente (illustrate per via grafica). Gradiente e suo significato geometrico. Punti stazionari. Massimi, minimi e selle. Derivate parziali seconde e matrice hessiana. Regola per lo studio dei punti stazionari usando la matrice hessiana (senza dimostrazione). Esempio. Carrellata di punti stazionari non coperti dalla regola.

## I teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale

Oltre alla **dimostrazione** dei teoremi seguenti, lo studente dovrà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti che sono stati introdotti nel corso, e di saper illustrare definizioni e teoremi con **esempi**, qualora ce ne siano di semplici.

1. Limite della somma e del prodotto di due funzioni aventi limiti finiti.
2. Teorema dei due carabinieri.
3. Studio della successione fondamentale $(1+1/n)^n$ e della sua associata $(1+1/n)^{n+1}$.
4. Le funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato sono limitate.
5. Teorema di Weierstrass sui massimi e minimi delle funzioni continue su intervalli chiusi e limitati.
6. Teorema dell'esistenza degli zeri.
7. La derivabilità implica la continuità, ma non viceversa.
8. Derivata della composizione di funzioni derivabili.
9. Teorema di Rolle, con significato geometrico.
10. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.
11. Regola de l'Hôpital: enunciato generale, dimostrazione nel caso $0/0$ in un punto finito con limite finito.
12. Il teorema fondamentale del calcolo.
13. La serie armonica diverge: dimostrazione fatta raggruppando i termini con indici fra potenze successive di 2 e minorando; altra dimostrazione usando una stima logaritmica delle somme parziali.
14. Criterio di Leibniz per la convergenza delle serie a segni alterni.