Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Triennale in Informatica e in Tecnologie Web e Multimediali

Analisi Matematica
Programma Dettagliato

Prof. GIANLUCA GORNI, Dott. PAOLO BAITI

Testo di riferimento: GIULIO CESARE BAROZZI, *Primo Corso di Analisi Matematica*, Zanichelli. Materiale didattico attinente al corso è disponibile presso
`http://www.dimi.uniud.it/~gorni/Analisi1`

Regolamento d'esame: Durante il corso si svolgono 3 **"compitini"**, ognuno con votazione data in trentesimi. Chi supera tutti i compitini con voto di almeno 12 è esonerato da altre prove scritte; per chi fra questi ha un voto medio ≥ 18 l'orale è facoltativo (si faccia vivo/a a un appello orale per firmare il registro) e vale la media dei voti dei tre compitini, arrotondata per eccesso; la lode si può avere solo con l'orale; per chi ha una media ≥ 12 e < 18 l'orale è obbligatorio, e va dato in un qualsiasi appello, pena l'annullamento dei compitini.
Gli studenti che non hanno fatto o superato i compitini devono sostenere **scritto e orale.** Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere se dare l'orale nello stesso appello o nel successivo. In quest'ultimo caso si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e si ritorna a poter scegliere se dare l'orale subito o all'appello successivo. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento. Gli studenti del **vecchio ordinamento** possono iscriversi a questo esame su `sindy` premendo sul bottone "`Esami di altre iniziative didattiche`".
Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

1. Limiti e continuità

Barozzi: Capitolo 3, Sezioni dalla 3.2 alla 3.8.

Intorni e punti di accumulazione. Preliminari al concetto rigoroso di limite: intorno di un numero reale, punti di accumulazione (finiti) di un insieme, intorni di $+\infty$, $+\infty$ come punto di accumulazione di un insieme. Esempi: punti di accumulazione di un insieme finito, di $[0,1]$, di $[0,1[$, aggiungendo o togliendo un numero finito di punti a un insieme non cambiano i punti di accumulazione, $+\infty$ non è punto di accumulazione di $[0,1]$. $+\infty$ è punto di accumulazione dell'insieme dei numeri naturali. Esempi introduttivi al concetto di limite: la successione $n \mapsto n/(n+1)$, la successione dei rapporti fra i termini consecutivi della successione di Fibonacci, la pendenza della retta secante a una parabola.

Limiti e continuità. Definizione di limite di una funzione in un punto di accumulazione (finito) del dominio. Varie riformulazioni della definizione. Teorema di unicità del limite. Definizione di continuità di una funzione in un punto. Riformulazioni della definizione di continuità. Come si può definire il limite a partire dalla continuità. Illustrazione intuitiva del concetto di continuità. Definizione di divergenza positiva o negativa di una funzione in un punto finito. Esempio. Funzioni irregolari, o senza limite, con esempio. Definizione di limite finito di una funzione all'infinito. Esempio. Limite finito di una successione. Proprietà vere definitivamente. Definizione di limite sinistro e destro di una funzione in un punto. Continuità a destra e a sinistra. Esempio: la funzione parte intera. Discontinuità di prima e di seconda specie.

Operazioni coi limiti. *Limite di somma*, differenza, prodotto e quoziente di funzioni (dimostrazione per la somma e per il prodotto). Una funzione che ha limite finito in un punto è limitata in un intorno del punto. Elenco dei risultati sui limiti di somma, differenza, prodotto e rapporto di funzioni conoscendo i limiti delle funzioni componenti. Forme indeterminate con esempi. Limite del prodotto di una funzione per una costante e del valore assoluto di una funzione. Continuità di somma, differenza, prodotto e rapporto di funzioni continue. Continuità della composizione. Teoremi di confronto per i limiti: supponiamo che $f(x) \to a$ e $g(x) \to b$ per $x \to x_0$, allora $f(x) \le g(x)$ (per ogni x) implica $a \le b$, mentre $a < b$ implica $f(x) < g(x)$ per x abbastanza vicino a x_0. Teorema di permanenza del segno. *Teorema dei due carabinieri*.

Limiti fondamentali. Le disuguaglianze $|\operatorname{sen} x| \le |x|$, $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \le |x - y|$, $|\cos x - \cos y| \le |x - y|$. Il seno e il coseno sono continui. La disuguaglianza $0 < \operatorname{sen} x < x < \tan x$ per $0 < x < \pi/2$. Il limite fondamentale $(\operatorname{sen} x)/x \to 0$ per $x \to 0$. Richiamo sul limite di a^n per $n \to +\infty$ e sulla disuguaglianza di Bernoulli. Continuità della funzione esponenziale. Il numero di Nepero come limite della successione $(1 + 1/n)^n$. Come la successione $(1 + 1/n)^n$ compare in un problema di interesse composto. *Dimostrazione che le successioni* $(1 + 1/n)^n$ *e* $(1 + 1/n)^{n+1}$ *sono rispettivamente crescente e decrescente e che tendono allo stesso limite finito*. Un esempio di problema di interesse bancario composto che conduce al numero di Nepero. Un metodo iterativo per calcolare la radice quadrata. Le successioni monotone hanno sempre limite (dimostrazione nel caso crescente). Le funzioni monotone hanno sempre limiti unilaterali (senza dimostrazione). Limiti all'infinito dell'esponenziale. Il logaritmo e il suo limite all'infinito e in zero.

Funzioni continue su tutto un intervallo. *Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è limitata*: dimostrazione usando la bisezione. Definizione di punto di massimo o minimo globale di una funzione. *Teorema di Weierstraß* sull'esistenza di punti di massimo e di minimo globale di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato. *Teorema dell'esistenza degli zeri*: dimostrazione col metodo di bisezione. Teorema dei valori intermedi. Richiami sulle funzioni iniettive e le funzioni invertibili. Le funzioni strettamente monotone e continue sono invertibili e l'inversa è continua. Esempi: radice quadrata, logaritmo, funzioni trigonometriche inverse.

Altri limiti notevoli. $\lim_{x\to+\infty}(1 + 1/x)^x$, $\lim_{x\to-\infty}(1 + 1/x)^x$, $\lim_{t\to 0}(1 + t)^{1/t}$, $\lim_{t\to 0}(\ln(1 + t))/t$, $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x$, $\lim_{x\to 0}(1 - \cos x)/x^2$, $\lim_{n\to+\infty} a^n/n^p$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, $\lim_{n\to+\infty} n!/n^n$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$.

2. Derivate

Barozzi: Sezione 4.1, Sezione 4.2, Sezione 4.3, Sezione 4.4 fino all'esempio 4.4-1 escluso, Sezione 4.5 fino alla Proposizione 4.5-3 compresa, Sezione 4.6 esclusa l'osservazione 1, Prop. 4.7-1.

La derivata. Il rapporto incrementale di una funzione, e alcune situazioni in cui compare naturalmente. Definizione di derivata di una funzione in un punto, e definizione di derivabilità. Notazioni. Derivate di funzioni elementari: $mx + 1$, x, costante, x^2, e^x, logaritmo, seno, coseno. *Le funzioni derivabili sono continue. Esempi di funzioni continue non derivabili.* Derivate destre e sinistre. Derivate seconde e successive. Derivata della somma di due funzioni derivabili. Derivata del prodotto di una funzione derivabile per una costante. Derivata del prodotto. Applicazione: derivata di x^n. Derivata del reciproco. Derivata del rapporto di due funzioni. Applicazioni: derivata di $1/x$ e della tangente. *Derivata della composizione.* Derivata della funzione inversa. Applicazioni: derivata della radice quadrata e dell'arcotangente. Esercizi di calcolo di derivate. Derivata dell'arcoseno e della funzione x^α.

Massimi e minimi. Definizione di punti di massimo e minimo globale e locale, e di punto estremale. Segno delle derivate sinistre e destre nei punti estremali interni. Nei punti estremali interni in cui la funzione è derivabile la derivata è nulla. Esempi: il valore assoluto, x^2, x^3.

Funzioni derivabili in tutto un intervallo e studio di funzione. *Teorema di Rolle. Teorema del valor medio di Lagrange.* Teorema della derivata nulla. Relazioni fra monotonia e segno della derivata. Conseguenze della disuguaglianza $m_1 \le f'(x) \le m_2$ per ogni x (senza dimostrazione), e altre disuguaglianze deducibili dal teorema di Lagrange. Stime di errori nelle approssimazioni. Teorema degli incrementi finiti di Cauchy. *Teoremi de l'Hôpital: enunciato generale e dimostrazione nel caso 0/0 in un punto finito con limite finito.* Asintoti al grafico di una funzione. Relazioni fra il segno della derivata seconda e la posizione del grafico di f rispetto alla retta tangente: teorema locale nell'ipotesi $f''(x_0) > 0$ o $f''(x_0) < 0$, teorema globale nell'ipotesi $f'' \ge 0$ o $f'' \le 0$ su tutto l'intervallo. Concavità, convessità e flessi. Studio di funzioni.

3. Integrali

Barozzi: Esempio 5.5-2, Sezione 5.1 fino a pagina 296, Prop. 5.2-2, 5.3-1, 5.3-2, 5.3-3, 5.2-3, 5.2-1, Corollario seguente alla prop. 5.2-3, tabella 5.2-1, Sez. 5.4 fino all'esempio 5.4-3 incluso, Sezione 5.8 fino all'esempio 5.8-7.

Integrale. Il problema dell'area del trapezoide compreso fra l'asse delle ascisse e il grafico di una funzione. Approssimazione dell'area del trapezoide della funzione $f(x) = x^2$ su $[0, b]$ con plurirettangoli contenuti e contenenti e calcolo dell'area col passaggio al limite. Definizione di suddivisione, somma inferiore, somma superiore, integrabilità e integrale di una funzione limitata su un intervallo. Significato geometrico dell'integrale. Integrale orientato (integrale fra a e b quando $a > b$). Proprietà dell'integrale (senza dimostrazione): stima dell'integrale sapendo che $m \le f \le M$, linearità, additività rispetto all'intervallo, confronto, valore assoluto.

Il teorema fondamentale e conseguenze. La funzione integrale. *Il teorema fondamentale del calcolo.* Primitive di una funzione. Due primitive di una funzione su un intervallo differiscono per una costante. La formula fondamentale del calcolo integrale.

Calcolo di primitive. Il problema del calcolo delle primitive, o integrali indefiniti. Primitive immediate. Primitive della somma di due funzioni, e del prodotto di una funzione per una costante. Integrali che si riportano alla formula della derivata della funzione composta. Formula dell'integrale per parti (per gli integrali indefiniti). Esempi. Cambio di variabile negli integrali indefiniti. Esempi. Calcolo dell'area del cerchio.

Integrali impropri. Il problema dell'area di una regione illimitata di piano. Definizione di integrali generalizzati (o impropri) di prima specie, convergenti o divergenti. Esempi: e^{-x}, $1/(1+x^2)$, $1/x$, integrali campione $1/x^s$, integrati a $+\infty$. Integrali di seconda specie: definizione ed integrali campione $1/x^s$ vicino a 0. Criteri per l'esistenza e la convergenza degli integrali generalizzati di prima specie. Le funzioni positive hanno sempre integrale improprio (convergente o divergente). Criterio del confronto. Equivalenza asintotica fra funzioni e relazione $f = O(g)$, con conseguenze sulla convergenza degli integrali impropri. Esempi.

4. Serie

Barozzi: Sezione 6.1 esclusi gli esempi 6.1-5 e 6.1-6, Sezione 6.2 escluso l'esempio 6.2-3.

Serie. Introduzione storica alle serie, o somme infinite. Esempi: la serie $1/2+1/4+1/8+1/16+\cdots$, con interpretazione geometrica; la serie $1-1+1-1+1-1+\cdots$. Impostazione delle serie in termini di successione delle somme parziali, convergenti o meno. La serie geometrica: formula per le somme parziali e criterio di convergenza. Serie telescopiche: la serie di Mengoli. Criterio necessario di convergenza delle serie: il termine generale dev'essere infinitesimo. *La serie armonica: dimostrazione della divergenza in modo elementare e in modo avanzato (con stima logaritmica delle somme parziali).* Le serie a termini positivi non sono mai indeterminate (senza dimostrazione).

Criteri di convergenza. Criterio del confronto per serie positive (senza dimostrazione). Criterio dell'equivalenza asintotica per le serie positive (senza dimostrazione). Applicazione: convergenza della serie armonica generalizzata $1/1^2+1/2^2+1/3^2+\cdots$. Cenno al problema aperto del valore della serie $1/1^3+1/2^3+1/3^3+1/4^3+\cdots$. Convergenza di serie a termini positivi: criterio del rapporto e criterio della radice ennesima.

5. Equazioni differenziali lineari

Barozzi, Paragrafo 7.7 fino all'esempio 7.7-11, escluso l'esempio 7.7-10.

Equazioni del primo ordine. Un problema di fisica (decadimento radioattivo) e uno di biologia (crescita di una popolazione di batteri) che portano all'equazione differenziale $y'(t)/y(t) = \lambda$. Risoluzione di questa equazione. *Equazione differenziale lineare del prim'ordine: $y' + a(t)y = f(t)$ e sua risoluzione.* Esempi.

Equazioni del secondo ordine. Equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti: $y'' + ay' + by = f(t)$. Caso omogeneo ($f(t) \equiv 0$): equazione caratteristica e risoluzione completa (senza dimostrazione). Esempi. Principio generale nel caso non omogeneo: la soluzione generale della non omogenea si ottiene sommando una soluzione della non omogenea più la soluzione dell'omogenea associata. Risoluzione della non omogenea per alcune forme di $f(t)$.

6. Funzioni di due variabili

Dispensa disponibile in rete:
`http://www.dimi.uniud.it/~gorni/Dispense/funzioni2var.pdf`.

Le funzioni reali di due variabili: visualizzazione con superfici in tre dimensioni, con grafici di densità, con curve di livello. Insieme di esistenza e insiemi di livello. Alcuni esempi di funzioni non continue in un punto (illustrate per via grafica). Derivate parziali: significato geometrico e loro calcolo. Piano tangente (definizione geometrica). Esempi di funzioni continue senza piano tangente (illustrate per via grafica). Gradiente e suo significato geometrico. Punti stazionari. Massimi, minimi e selle. Derivate parziali seconde e matrice hessiana. Regola per lo studio dei punti stazionari usando la matrice hessiana (senza dimostrazione). Esempio. Carrellata di punti stazionari non coperti dalla regola.

I teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale

Oltre alla **dimostrazione** dei teoremi seguenti, lo studente dovrà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti che sono stati introdotti nel corso, e di saper illustrare definizioni e teoremi con **esempi**, qualora ce ne siano di semplici.

1. Teorema del limite della somma di due funzioni.
2. Teorema dei due carabinieri.
3. Studio delle successioni $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ e $b_n := (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$.
4. Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è limitata.
5. Teorema di Weierstraß.
6. Teorema dell'esistenza degli zeri.
7. La derivabilità implica la continuità, ma non viceversa.
8. Derivata della composizione di funzioni derivabili.
9. Teorema di Rolle, con significato geometrico.
10. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico
11. Regola de l'Hôpital: enunciato generale, dimostrazione in un caso.
12. Il teorema fondamentale del calcolo.
13. La serie armonica: dimostrazione della divergenza in modo elementare e in modo avanzato (con stima logaritmica delle somme parziali)
14. Risoluzione dell'equazione differenziale lineare del prim'ordine $y' + a(t)y = f(t)$ (con tutti i passaggi).