Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Triennale in Informatica

Analisi Matematica
Programma Dettagliato

Prof. GIANLUCA GORNI, Dott. PAOLO BAITI

Testo di riferimento: GIULIO CESARE BAROZZI, *Primo Corso di Analisi Matematica*, Zanichelli. Materiale didattico attinente al corso è disponibile presso
`http://www.dimi.uniud.it/~gorni`

Regolamento d'esame: Durante il corso si svolgono 3 **"compitini"**, ognuno con votazione data in trentesimi. Chi supera tutti i compitini con voto di almeno 12 è esonerato da altre prove scritte; per chi fra questi ha un voto medio ≥ 18 l'orale è facoltativo (si faccia vivo/a a un appello orale per firmare il registro) e vale la media dei voti dei tre compitini, arrotondata per eccesso; la lode si può avere solo con l'orale; per chi ha una media ≥ 12 e < 18 l'orale è obbligatorio, e va dato in un qualsiasi appello, pena l'annullamento dei compitini.

Gli studenti che non hanno fatto o superato i compitini devono sostenere **scritto e orale**. Per essere ammessi all'orale occorre un voto di almeno 12 trentesimi allo scritto. Chi supera uno scritto può scegliere se dare l'orale nello stesso appello o nel successivo. In quest'ultimo caso si può anche ritentare lo scritto, ma, qualora si decida di consegnare, viene annullato lo scritto precedente, e si ritorna a poter scegliere se dare l'orale subito o all'appello successivo. Durante uno scritto ci si può ritirare in qualsiasi momento. Gli studenti del **vecchio ordinamento** possono iscriversi a questo esame su `sindy` premendo sul bottone "`Esami di altre iniziative didattiche`".

Nel seguito si indicano in *corsivo* i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione all'orale, e di essi è riportato un elenco a parte alla fine.

1. Limiti e continuità

Barozzi, Capitolo 3, Sezioni dalla 3.2 alla 3.8.

Intorni e punti di accumulazione. Introduzione alla definizione di limite. Definizione di intorno di raggio r di un punto. Definizione di punto di accumulazione di un insieme di numeri reali. Esempi: $[a,b]$, $]a,b]$, insieme finito, $\mathbb{N}$. Intorni di $+\infty$. Definizione di $+\infty$ come punto di accumulazione di un insieme, ed equivalenza con l'illimitatezza dello stesso insieme. Intorni di $-\infty$ e $-\infty$ come punto di accumulazione di un insieme. Studio della successione $a_n := n/(n+1)$. La successione di Fibonacci F_n e studio della successione dei rapporti F_{n+1}/F_n.

Limiti e continuità. Definizione di limite di una funzione in un punto di accumulazione del dominio. Definizioni alternative di limite finito in un punto. Definizione di continuità in un punto. Teorema dell'unicità del limite. Definizione di divergenza positiva o negativa di una funzione in un punto. Definizioni di limite all'infinito, limite di successioni, limite da destra e da sinistra, continuità destra e sinistra. Esempio: la funzione "parte intera". Concetti di convergenza, divergenza, regolarità e irregolarità di una funzione.

Operazioni coi limiti. *Teorema del limite della somma di due funzioni.* Il caso indeterminato $+\infty - \infty$: esempi. Limite della differenza, prodotto e quoziente di due funzioni. Casi indeterminati per il prodotto e per il quoziente. Continuità della somma, differenza, prodotto di funzioni continue. Continuità della funzione composta. Teoremi di confronto per i limiti. Il valore assoluto è una funzione continua. Teorema di permanenza del segno. *Teorema dei due carabinieri.*

Limiti fondamentali. La funzione esponenziale è continua. Le disuguaglianze $|\operatorname{sen} x| \le |x|$, $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \le |x-y|$, $|\cos x - \cos y| \le |x-y|$. Il seno e il coseno sono continui. La disuguaglianza $0 < \operatorname{sen} x < x < \tan x$ per $0 < x < \pi/2$. Il limite fondamentale $(\operatorname{sen} x)/x \to 0$ per $x \to 0$. Richiamo sul limite di a^n per $n \to +\infty$ e sulla disuguaglianza di Bernoulli. Limiti unilaterali delle funzioni monotone. *Le successioni $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$ e $b_n := (1+\frac{1}{n})^{n+1}$: sono una crescente, l'altra decrescente, e tendono allo stesso limite finito, chiamato numero di Nepero (o di Eulero).* Un metodo iterativo per calcolare la radice quadrata. Un esempio di problema di interesse bancario composto che conduce al numero di Nepero.

Funzioni continue su tutto un intervallo. *Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è limitata. Teorema di Weierstraß*: una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato ha sempre massimo e minimo. *Teorema dell'esistenza degli zeri.* Teorema dei valori intermedi. Corollari: una funzione continua trasforma intervalli in intervalli e intervalli chiusi e limitati in intervalli chiusi e limitati. Funzioni inverse di funzioni strettamente monotone. Continuità della funzione inversa di una funzione strettamente monotona e continua. Continuità della radice n-esima, del logaritmo, delle funzioni trigonometriche inverse.

Altri limiti notevoli. $\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x$, $\lim_{x\to-\infty}(1+1/x)^x$, $\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}$, $\lim_{t\to 0}(\ln(1+t))/t$, $\lim_{x\to 0}(e^x-1)/x$, $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)/x^2$, $\lim_{n\to+\infty} a^n/n^p$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, $\lim_{n\to+\infty} n!/n^n$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$.

2. Derivate

Barozzi, Sezione 4.1 escluso l'esempio 4.1-2, Proposizione 4.2-1, Sezione 4.2, Paragrafo 4.3 fino all'esempio 4.3-4, Paragrafo 4.4 fino all'esempio 4.4-3 compreso; Proposizione 4.5-1, Paragrafo 4.5, esercizio 4.5-10, Paragrafo 4.6 fino all'esempio 4.6-5, Paragrafo 4.7 semplificato.

La derivata. Motivazione del concetto di derivata: rette tangenti al grafico di una funzione e velocità istantanea di un punto mobile. Definizione di rapporto incrementale, derivata, derivabilità. Notazioni. Derivata delle funzioni lineari.

Derivata di esponenziale, logaritmo, seno e coseno. *La derivabilità implica la continuità, ma non viceversa.* Esempi: il valore assoluto e $x \operatorname{sen}(1/x)$. Derivate destre e sinistre. Derivata seconda, terza e successive. Derivata della somma di funzioni derivabili. Derivata del prodotto di funzioni derivabili. Derivata di x^n per $n \in \mathbb{N}$. Derivata di $1/f$ e di f/g. Derivata di $1/x$, di x^n per $n \in \mathbb{Z}$, della tangente, dei polinomi, delle funzioni razionali fratte. *Derivata della composizione di funzioni derivabili.* Derivata della funzione inversa. Derivata della radice quadrata, della radice ennesima, di x^α per α reale e $x > 0$.

Massimi e minimi. Definizione di punti di massimo e minimo globale e locale, e di punto estremale. Segno delle derivate sinistre e destre nei punti estremali interni. Nei punti estremali interni in cui la funzione è derivabile la derivata è nulla. Esempi: il valore assoluto, x^2, x^3. Un semplice problema di massimo risolto col teorema di Weierstrass e le proprietà degli estremali.

Funzioni derivabili in tutto un intervallo e studio di funzione. *Teorema di Rolle, con significato geometrico. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico.* Teorema della derivata nulla. Esempio: $\arctan x + \arctan(1/x)$. Relazioni fra monotonia e segno della derivata. Come dedurre stime su una funzione da stime sulla derivata. Teorema del valor medio di Cauchy con cenno al significato geometrico. *Regola de l'Hôpital: enunciato generale, dimostrazione in un caso.* Esempi. Se la derivata ha limite finito in un punto, allora la funzione è derivabile nel punto (Esercizio 4.6-5). Definizione di punti di convessità, concavità e flesso per una funzione derivabile. Relazioni col segno della derivata seconda. Applicazione ai massimi e minimi locali. Esempi.

3. Integrali

Barozzi, Sezione 5.1, Sezione 5.2 esclusa la dimostrazione della Proposizione 5.2-2, Sezione 5.3, Sezione 5.4 fino all'esempio 5.4-3, Sezione 5.8 fino all'esempio 5.8-8 escluso.

Integrale. Il concetto di integrale: area di un trapezoide, suddivisioni, somme inferiori e superiori, integrale di una funzione continua. Il concetto di primitiva di una funzione. Su un intervallo due primitive differiscono per una costante. La definizione di integrale interpretata come il problema di trovare la posizione a partire dal grafico delle velocità.

Il teorema fondamentale e conseguenze. *Il teorema fondamentale del calcolo.* La formula dell'integrale di una funzione quando sia nota una primitiva. Esempi semplici di calcoli di integrali e primitive. Definizione di $\int_a^b$ quando $a > b$. Linearità dell'integrale. Se $f \le g$ e $a \le b$ allora $\int_a^b f \le \int_a^b g$. Disuguaglianze ottenute da $\cos x \le 1$ integrando. Teorema della media integrale (senza dimostrazione).

Calcolo di primitive. Integrazione per parti con esempi. Integrazione per sostituzione: schema astratto e uso concreto per integrali definiti e indefiniti. Applicazione: calcolo dell'area di un quarto di cerchio.

Integrali impropri. Definizione degli integrali impropri o generalizzati. Integrali di funzioni positive. Esempi di integrale su una semiretta: funzioni costanti, esponenziale decrescente, $1/(1+x^2)$, $1/x^s$. Esempi di integrali di funzioni non limitate: $1/x^s$ su $[0,1]$. *Criteri per la finitezza degl'integrali generalizzati: combinazioni lineari di funzioni integrabili sono integrabili, criterio del confronto, equivalenza asintotica.* Esempi di uso dei criteri di convergenza.

4. Serie

Barozzi, Sezione 6.1 fino all'esempio 6.1.5 compreso, paragrafo 6.2 fino all'esempio esclusa la dimostrazione dell'esempio 6.2.3, paragrafo 6.3 fino alla definizione 6.3.1 escluso l'approfondimento di pagina 383-385.

Serie. Serie: introduzione generale storica. Esempio: $1/2+1/4+1/8+1/16+\cdots=1$ vista geometricamente. Definizione moderna di serie in termini della successione degli addendi e di quella delle somme parziali. Esempio: la serie di Mengoli. Generalità sulle serie telescopiche. La serie geometrica. Linearità della somma di serie convergenti. La frazione generatrice di un numero decimale periodico. Le serie a termini positivi non sono mai indeterminate. *La serie armonica diverge, e stima logaritmica delle somme parziali.* La serie armonica generalizzata $1/1^2+1/2^2+1/3^2+\cdots$ converge. Cenni storici e problemi aperti.

Criteri di convergenza. Condizione necessaria perché una serie converga è che il termine generale tenda a zero. Criterio del confronto per le serie positive. *Criterio del rapporto.* La serie esponenziale converge (caso positivo). La formula $e=1/0!+1/1!+1/2!+1/3!+\cdots$ (senza dimostrazione). Criterio della radice ennesima (senza dimostrazione). Criterio di Leibniz per le serie a segno alterno. La serie armonica a segno alterno. Il criterio della convergenza assoluta. Criterio di asintoticità, con esempi. Criterio dell'integrale, con esempi.

5. Equazioni differenziali lineari

Barozzi, Paragrafo 7.7 fino all'esempio 7.7-11, escluso l'esempio 7.7-10.

Equazioni del primo ordine. Alcuni problemi delle scienze applicate che conducono a equazioni differenziali: il decadimento radioattivo e la crescita delle popolazioni batteriche. L'equazione differenziale lineare del primo ordine e la sua risoluzione col metodo del fattore integrante. Esempio. Cenno ai campi di direzioni e all'interpretazione geometrica delle equazioni differenziali del primo ordine.

Equazioni del secondo ordine. La forma generale dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine. Impostazione astratta del problema in termini di operatori lineari fra spazi a dimensione infinita. Risoluzione esplicita nel caso di coefficienti costanti: caso omogeneo e e alcuni casi non omogenei.

6. Funzioni di due variabili

Dispensa disponibile in rete:
`http://www.dimi.uniud.it/~gorni/Dispense/funzioni2var.pdf`.

Introduzione alle funzioni di due variabili. Grafici tridimensionali, grafici di densità, insiemi di livello. Esempio di calcolo di curve di livello. Definizione di distanza fra punti del piano, ed estensione delle definizioni di limite e di continuità (cenno). Illustrazione di alcuni esempi di discontinuità che non hanno un chiaro analogo in una dimensione. Derivate parziali, loro significato geometrico, esempi di calcolo, e piano tangente. Illustrazione di alcuni esempi di funzioni senza piano tangente. Il gradiente di una funzione di due variabili. Proprietà geometriche del gradiente (senza dimostrazione). Derivate parziali seconde e matrice hessiana. Punti di massimo, minimo locale e di sella interni e regole (senza dimostrazione) per distinguerli usando gradiente e matrice hessiana. Esempio.

I teoremi di cui si chiede la dimostrazione all'orale

Oltre alla **dimostrazione** dei teoremi seguenti, lo studente dovrà mostrare di conoscere le **definizioni** di tutti i concetti che sono stati introdotti nel corso, e di saper illustrare definizioni e teoremi con **esempi**, qualora ce ne siano di semplici.

1. Teorema del limite della somma di due funzioni.
2. Teorema dei due carabinieri.
3. Studio delle successioni $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ e $b_n := (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$.
4. Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è limitata.
5. Teorema di Weierstraß.
6. Teorema dell'esistenza degli zeri.
7. La derivabilità implica la continuità, ma non viceversa.
8. Derivata della composizione di funzioni derivabili.
9. Teorema di Rolle, con significato geometrico.
10. Teorema del valor medio di Lagrange, con significato geometrico
11. Regola de l'Hôpital: enunciato generale, dimostrazione in un caso.
12. Il teorema fondamentale del calcolo.
13. Criteri per la finitezza degl'integrali generalizzati: combinazioni lineari di funzioni integrabili sono integrabili, criterio del confronto, equivalenza asintotica.
14. La serie armonica diverge, e stima logaritmica delle somme parziali.
15. Criterio del rapporto per la convergenza di serie.